文献抄録

≪第5回 IFORS CONFERENCE 特集≫

1969年6月23日から6月27日までベニスで開かれた第5回国際OR学会に提出された論文のいくつかを特集として抄録しました．ここに抄録したのは全69篇中の19篇です．また，次回に残りの何篇かを抄録する予定です．

各論文の頭の記号は第1項がセッション，第2項は順番を示します．またセッション番号は下記の通りです．

セッション番号	セッション名称	セッション番号	セッション名称
2	Corporate Planning and Corporale Objectives	8	Mathematical Methods of Optimization
3	Operational Rerearch in the Public Sector	9	Informatics
4	Social and Political Sciences	10	Network Flows and Graph Theory
5	Stochastic Processes	10	
6	Transport and Traffic	11	Decision Analysis
7	Market Strategy and Marketing	12	General Interest Papers

〔4—1〕 **Emshoff, J. R.**, "Towards a Behavioral Theory of Conflict."
〔社会／ゲーム／理論的〕

大方の社会，政治問題についての解を得るには，ある提案がなされたとき現在の環境の下で各個人がどのように行動するかの記述的知識だけでは不充分で，そのためには，様々な環境の下での行動様式の予想が必要とされ行動の基本原理の理解が不可欠となる．

この論文の目的は行動問題へのOR手法の適用方法を提唱し，その結果を報告することにある．

研究プログラムの目的は競争環境での個人の選択を説明する理論を開発し，逐次的に一般化することであった。理論は種々の状態の下で個人がどのような選択を行なうかを推論するのに用いられる．もし，理論が誤りであればそれに修正がほどこされ，論理的帰結に対して新しい実験が繰り返される．正しい時には新しい場が理論のテストに与えられる．

以上のような方法論に従って用いられた最初のゲームは，図1に示されるような囚人のディレンマであった．実験に参加したのは学生である．"Lagged Tit-for-Tat 理論" がデータでテストされた．これは選択の80%を正しく予想した．次に，この理論を修正した "Choice-Matching 理論" を適用する．この理論はプレイの83%を正確に予想した．そこで，続いて Chicken ゲームに適用されたが，これはわずかに選択の59%を予想したにすぎない．

図1 Prizoners Dilemma

		プレイヤーB a	プレイヤーB b
プレイヤーA	a	3, 3	1, 4
プレイヤーA	b	4, 1	2, 2

図2 Chicken

		プレイヤーB a	プレイヤーB b
プレイヤーA	a	3, 3	2, 4
プレイヤーA	b	4, 2	1, 1

"Policy-Matching 理論" は Chicken をはじめ他のゲームに良好な結果を示したため，この理論は非対称ゲームでテストされた．だが，結果は69%を予想するにとどまった．そのため，"Policy-Matching 理論" をさらに一般化した "Role-Reversal 理論" を，Policy-Matching 理論のテストに用いたのと同じ非対称ゲームに適用した結果，予想適中率

は69%から76%に上がった．これはさらに極端な非対称ゲームでテストされたが，適中率は80%であった．

図 3　非対称

		プレイヤーB a	プレイヤーB b
プレイヤーA	a	5, 1	2, 3
プレイヤーA	b	1, 5	3, 2

ここで，信頼変数の測定方法を洗練することと，被験者の態度が選択に際しどのような役割をはたすかの検証をすることに努力が向けられた．“Role-Reversal 理論”の予想成功は被験者の態度によって影響をうけることが明らかにされた．（萱原秀二）

〔4—3〕 **Quade, E. S.**, “An Extended Concept of ‘Model’.”

〔社会／決定理論／理論的〕

ORを政治の方面に用いて成功を収めるためには，“モデル”の考え方をもう少し拡張する必要がある．

モデルにはいろいろな形式のものがあるが，ORで一番よく用いられるのは数学的モデルである．しかしこれは，政治的または社会的要素が大きく影響する場合には形成することが難しい．大気汚染，都市再開発，犯罪予防などの場合には，目標が不明確であり評価も定まらない．このような場合には，数量化や最適化が難しい．

ORにおけるモデルの機能は，いろいろな行動の結果を予測し，いろいろな方策の決定を与える論理的な方法を与えることであると定義することができる．確かに数学的モデルは便利ではあるが，これ以外に方法がないわけではない．

Delphi 法などはこのように考えてみると，1つの新しいモデルと見ることができる．以下この方法についても紹介する．

Delphi 法は一群の人々の意見を一連の質問によって個別に引き出し，それを集団の意見によって洗練し，最後に総合して1つの結論にまとめ上げるくり返しの手順である．

この方法は知識や能力のある人の直観や推理を活用しながら，一方では集団の意見分布を考慮に入れて反復思考した後に最終の結果に到達するやり方である．個人の意見の集約法であって，意見の一致を強制するような圧力は少しも加えていない．

この各回答法，フィード・バック，数値による推定，統計数値による集団の反応を用いる方法は従来のパネル討論法，委員会方式に較べて優れているところが多いと思われている．

この方法はアメリカの未来研究所の **O. Hermer**, RAND 社の N. Dalkey, E. S. Quade 等によって研究され，ビジネス・ゲーム，シミュレーション・ゲーム，心理学とくに深層面接法，階層別会議法などとも関係が深い．（近藤次郎）

〔4—4〕 **Lindsey, G. R.**,. “The Stability of Countries of Various Sizes.”

〔政治／統計／応用的〕

世界中には大小いろいろな国家があるが，大国は内部に様々な問題を抱えて分裂し，小国は隣国に合併されて大きい国になる．しかし安定な大きさが何処かに存在するはずである．

原子核は1個から238個までの粒子——プロトンと中性子——から成り立っており，融合と分解とによって遊離，結合を行なっているが，120から230ぐらいの粒子より構成されている場合が一番安定である．

いま人口が n の国において，国民1人に作用する統合力を軍事的力，経済的力，政治的力に分け，さらにそれを

$$F(n)=P_M\frac{G_M-n}{n}+P_E\frac{G_E-n}{n}+P_A\frac{G_A-n}{n}-P_Rn$$

と表わす．最後の項は，構成員の各自が潜在的に政治的な立場の違いを保有するために生ずる反撥力である．第1項は軍事的力をあらわす項で，$n<G_M$ のときにはその差に比例する力が軍事力を強化して隣国に対抗する目的で作用する．よって P_M は係数として1人あたりの影響力は $P_M(G_M-n)/n$ となる．第2項は経済上の活動が有利になるだけの人口 G_M までは団結する方向に力が作用する．G_A は人種，宗教，イデオロギー等が同一な理想の人口単位である．

著者は極東，アフリカ，ヨーロッパについて現実および歴史的分析から上式の P_M, G_M 等を定め，$F(n)>100$ のときは隣国と合併する気運にあり，$F(n)<-100$ のときには分解寸前にあるものとした．$F(n)>100$ となる人口は極東では 10^7，アフリカでは 3×10^5，ヨーロッパでは 5×10^5 であり，$F(n)<-100$ となるのはそれぞれ，3×10^8，3×10^7，10^8 であると述べている．

このような分析から現況を調べてみると，極東では1947年インドとパキスタンの分裂する直前の人口は 4.3×10^8 で，インドは現在 4.99×10^8 に達し，国

内に政情不安が高まっている．また蒙古1.2×10^6やシンガポール1.9×10^6は合併問題が絶えず起こっている．アフリカではスペイン，フランス，ポルトガルの植民地が独立しても，それらは人口が小さく3×10^5以下であるから独立国とはならず，隣国と合併することになる．このほか人口3.7×10^5のスワジランド，4.7×10^5のガボン，5.9×10^5のボスワニアは，統合することによって経済的に非常に有利になるものと思われる．

一方，エジプト3×10^7，エチオピア2.3×10^7，南アフリカ1.83×10^7，コンゴキ（キンシャシャ）1.67×10^7，スーダン1.41×10^7などはすべて限界以上またはそれに近い人口を有し，内部分裂の危険をはらんでいる．

ヨーロッパでは融合限界は5×10^5であるが，ルクセンブルグ3.5×10^5，マルタは3.2×10^5より少し大きいくらいである．だがマルタは島で事情が違い，ルクセンブルグはベネルックスやOECDによって軍事または経済的同盟を結んでいる．分解限界は10^8であるから，西ドイツや英国は安定であるが，OECDとなると政治問題では分裂している．

（近藤次郎）

〔5—1〕 **Adiri, I. and B. Avi-Itzhak,** Queueing Models for Time-sharing Service Systems."
〔計算機／待ち行列／理論的〕

この論文はタイムシェアリング方式の計算機に対する種々のモデルについて，著者達が最近研究し，発表した結果を総合報告的にまとめたものである．ここでは５つのモデルが報告されているが，そのタイプはすべてM/M/１である．

〔モデルＩ——ＲＲ１〕（ラウンドロビン方式；待ち行列の数１）

パラメーターがλのポアッソン過程に従って１台の計算機（サーバー）に客が到着し，待ち行列を作る．客の要する処理時間（サービス時間）は互いに独立で期待値が$1/\mu$の指数分布に従う．客は１回に最大θ（クワンタム処理時間）の処理をうけ，それで処理が終了しない場合は再び待ち行列に加わる．１回の処理に対して一定のスワップ時間τがかかる．

このモデルが一番簡単で基本的なものである．このモデルに対して，要する処理時間Lがlの客のtotal response time（客が到着してから処理が完全に終了するまでの時間），Tの期待値，$E(T|L=l)$の計算方法と，パラメーターの値が異なった場合のグラフ，各パラメーターの種々の値に対しての混雑の度合を表わすグラフ等が与えられている．

〔モデルII——修正されたＲＲ１〕

系内の客の数が１人のときは，待ち行列は空であり，処理をクワンタムで切って余計なスワップ時間を入れるのは無駄である．このような場合には，いつまででも処理が続けられるように修正したのがモデルIIである．モデルＩとモデルIIでの$E(T)$の違いをグラフで示している．

〔モデルIII——客の数が有限のＲＲ１〕

このモデルは１つの計算機にN台の端末がついているものに相当する．処理中，または待ち行列に参加している端末からは新しい要求は出せず，処理が完全に終了してから次の要求が出るまでの時間は，期待値が$1/\lambda$の指数分布に従うものとする．その他のことはモデルＩと全く同じである．色々な値のNに対して$E(T)$および$E(T|L=l)$のグラフが与えられている．

〔モデルIV——ＲＲｒ〕（ラウンドロビン方式；多段式待ち行列）

長い処理時間を要する客がいると，他の客の待ち時間が大きくなる．それまで処理を受けた回数がiでまだ処理の終了しない客は（$i+1$）番目の待ち行列に並ぶ．計算機は番号の小さい待ち行列ほど優先して処理を行ない，処理時間の短い客の待ち時間を少なくし，ラッシュを乗り切ろうとしたのがこのモデルである．種々の待ち行列の数rに対する$E(T|L=l)$のグラフ，$r=10$のときの種々のθに対する$E(T|L=l)$のグラフが与えられている．また各段の待ち行列にいる客に対するτとθが，iによって異なる場合についても考察されている．

〔モデルＶ——優先権のあるＲＲ１〕

優先権を認めた時について，注釈がつけられている．

（髙橋幸雄）

〔5—2〕 **Barfoot, C. B.,** "Stochastic Duels in which Each Contestant's Shots Form a Markov Chain."
〔ゲーム／決闘モデル／理論的〕

この論文はStochastic duels，つまり確率的な決闘モデルで，各人による射撃が，一定の推移確率を持つマルコフ連鎖として記述できるような場合の理論において，いくつかの発展を行なったものである．２人の敵対者Ａ，Ｂは無限の弾薬を持ち，一定の時間間隔ａ，ｂごとに射撃をし，一方が倒れるまで撃ち続けるものとする．この条件で，Ａの勝つ確

率 $P(A)$ が次の2つの場合に与えられる．(1)双方とも弾薬を装着していない武器を持って決闘を始め，したがって戦術的には対等の場合；(2)Aは奇襲をかけることができ，両者が撃ち合いを始める前に y ラウンドはBを射撃できる場合．ここで y は確率変数とする．

戦術的に対等の場合に $P(A)$ として始めに得られた表現は，各項が推移確率行列の部分行列と初期状態のベクトルの積であるようなものの無限級数である．この行列を項とする無限級数は，もし a/b が有理数ならば有限級数に帰着される．この場合この比は既約分数 α/β の形に直される．これらの仮定の下では $P(A)$ は行列のクロネッカー積とSubmatrix transpose と呼ばれる行列演算子とを用いて β 個の項よりなる有限級数に帰着されるのである．

ランダムな初期の奇襲を認める場合には，Bが撃ち始める前に y ラウンドだけAが一方的に撃つ場合にAが決闘に勝つ確率 $P(A|y)$ の期待値をとれば $P(A)$ が得られるわけだが，この結果もまた行列を項とする無限級数で与えられ，a/b が有理数の場合には有限級数になる．ここで y は幾何分布に従うと仮定した．

この種の決闘モデルの武器の間の闘いに対する potential application も示されるし，また，今後の研究分野についての議論も行なわれる．

（森村英典）

〔5―3〕 **Bansard, J. P., J. L. Descamps, G. Maarek and G. Morihain,** "Study of a Stochastic Renewal Process Applied to a Trigger-off Policy for Replacing Whole Sets of Components."

〔保全／マルコフ過程／理論的〕

複雑で高いパーフォーマンスの要求される装置で，その部品がランダムに故障するようなものは，部品のサブセットが無きずであるかどうかを見守るような procedure が保全のために必要である．

1つの保全方式は，故障が起こったときとか寿命に達したときに1つづつ取り替えることであるが，これは多数の部品で構成されているような機械では，あまりにも停止させる度数が多すぎる．このような停止は高い保全費用を必要とし，availability を下げ，多分収入を減らすことになろう．

この論文の目的は，故障が起こったとき，ある限度以上の年令に達したすべての部品を一緒に取り替えてしまうことにより，停止の頻度を減らそうという保全方式 "trigger-off" 方式の解析をすることである．ここで年令というのは前の取替からの時間を意味する．

この年令限度が，われわれの方式の決定変数である．次のような点に関する経済的，技術的要請をともに満たすような年令限度の最適な組が存在する：

（i） 各部品の信頼性

（ii） availability の減少および（または）収入の減少

（iii） 各部品の取替費用

数学的にいえば，この問題は再生過程である．各時点における状態を，装置の各アイテムのいろいろな要素の年令によって定義すれば，それは連続なマルコフ過程となる．trigger-off 方式は，ある特定の部品とその他のものの renewal chain 間の確率的従属性を作り出す．

われわれは，2部品問題を解析的に解いた．一般にこのような問題は，偏微分方程式で表わされ，その積分は容易に求められる．しかしながら極限条件下での挙動の解析には積分方程式を用いなければならない．

いろいろの故障分布（特に線型のもの）について解が得られ，そのような保全方式の availability などに関する影響を調べる．

2部品以上の一般の場合は，ある種の単純化の仮定を置かないかぎり解析的に表現することは容易でない．その条件は異なった renewal chain の間の従属性はその数が増すにつれて少なくなって行く，という事実に基づくものである．

これらの仮定をおけば，もっと一般的な方式についても議論することができ，それには，おのおのの故障に際して取り替えられるべき部品の最大数を新しい決定変数として含むようにすることが可能になる．

著者たちは Pierelatte アイソトープ工場でこの研究を適用し，若干の興味ある結果を得ている．SEMA は今，輸送機器の保全とか，武器システムの準備点検などの他の応用を指導中である．

適用可能な例は十分多いので，この分野でさらに研究を進めることの妥当性はあると思われる．

（森村英典）

〔5―4〕 **Mandelbrot, B. B. and J. R. Wallis.** "Operational Hydrology Using Self-Similar Processes."

〔水文学／シミュレーション／理論的〕

水文学へのＯＲ的アプローチは，長い間，２つの主要な水の流れの特徴のどちらも適切な数学的記述がないということのために邪魔されてきた．つまり，“Joseph 効果”（７年の周期で高水位または低水位への傾向が存在する．しかしそれは何十年，何世紀，何千年にわたって認められてもいる）と，“Noah 効果”（40カ月の周期での極端な高水位．しかし数日，数カ月，数年ということもある）とである．この研究は，新しいオペレーショナルな水文学を，Joseph 効果に対する “Self-Similar” モデルに基づいて概観することである．このようなモデルは高速計算機で容易にシミュレートされるし，それが Self-Similar であるという性質のために，ある種の次元解析を行なって，各々の特定の問題に対して重要なパラメータの数を減らすこともできる．これまでは，われわれの主な道具は次元解析によって補強されたコンピューター・シミュレーションであった．純解析的な取扱いは多くの興味ある数学上の問題を提起するが，どんな解析的結果も，例外的に有望な場合を除けば，しばらくの間は，おそらく実際家に採用されそうにはないようである．

（森村英典）

〔5—5〕 **Tumura, Y.**, “Some Applications of the Equilibrium Equations Method in the Queueing Problem.”

〔待ち行列／平衡方程式／理論的〕

ある種の待ち行列問題では，平衡確率を計算するのに平衡方程式の方法によるのが最も簡単であるが，若干の欠点もある．それは一般に，この方法が厳密でないし，一般的なシステムにおいてはそれらを解くのが難しい，という点である．

われわれは，一般的な待ち行列システムにおける平衡状態に関するいくつかの結果を得ている．複数サーバーのシステム $GI/G/m(N)$ （Nは待合室の許容数で∞の場合を含む）を考え，

$$p_n=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P_r}\{\eta(t)=n\},\quad q_n=\lim_{t_k\to\infty}\mathrm{P_r}\{\eta(t_k-0)=n\}$$

とを考えよう．ここで，$\eta(t)$ はシステム内の客の数であり，t_k は k 番目の客が到着した時点であるとする．

到着間隔およびサービス時間の分布がともに一般の場合には，もし $N>m$ ならば，平衡方程式は偏微分-差分方程式となり，解析的に解くのが難しくなる．それらを積分-差分方程式に帰着して逐次近似法を用いると，p_n および q_n の数値を計算することができる．

（森村英典）

〔7—5〕 **Wilkinson, C. W. and S. K. Gupta**, “Allocating Promotional Effort to Competing Activities——A Dynamic Programming Approach.”

〔マーケティング／数理計画／応用的〕

多くの活動，特に，マーケティングの分野の活動では，その利得は資源（または努力）の量の増加とともに増加率が減少する．そこで i 番目の活動のために使用される資源量が x_i のとき，その活動からの利得 r_i が

$$r_i=p_i\ (1-e^{-k_ix_i})\qquad k_i>0 \tag{1}$$

で表わされるものとし，利得の合計 $\sum_{i=1}^{i=N} r_i$ を最大にするように資源の総量XをN種の活動に配分する問題を考える．ここで，活動は，問題により，商品，販売地域，広告媒体などに対応し，また，捜索理論では p_i は捜索対象が i 番目の地域にある確率，$1-e^{-k_ix_i}$ は捜索対象が i 番目の地域にあるという条件のもとで x_i の努力を支出したとき捜索対象が発見される確率と考えられる．

制約条件

$$\sum_{i=1}^{i=N} x_i\leqq X,\ \ x_i\geqq 0\quad (i=1,2,\cdots\cdots,N)$$

のもとで，$\sum_{i=1}^{i=N} r_i$ を最大にする x_i をみつけだすために，

$$f_n(z)=\max_{0\leqq x_n\leqq z}\ [p_n(1-e^{-k_ix_i})+f_{n-1}(z=x_n)] \tag{2}$$

という動的計画法の定式を使って，

1°．(1)のパラメーター p_i と k_i の積 k_ip_i の大きさの順に活動に番号をつけ，

$$k_1p_1\geqq k_2p_2\geqq\cdots\cdots\geqq k_Np_N \tag{3}$$

とすると，最適解では，$x_n>0$ のときには，$x_i>0$ （$i=1,2,\cdots\cdots,n$）となり，$x_n=0$ のときには，$x_i=0$ （$i=n,\ n+1,\cdots\cdots,N$）となる．

2°．
$$u_n=1/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}=1/\left(\frac{1}{u_{n-1}}+\frac{1}{k_n}\right) \tag{4}$$

$$u_nv_n=\prod_{i=1}^{n}(k_ip_i)^{u_n/k_i}=(k_np_n)^{u_n/k_n}(u_{n-1}v_{n-1})^{u_n/u_{n-1}} \tag{5}$$

とすると，1°のように活動に番号をつけると，$e^{u_{n-1}z}\leqq u_{n-1}v_{n-1}/(k_np_n)$ ならば，$x_n=0$ のとき(2)の右辺のかっこの中が最大となり，そうでないときは，

$$x_n=\frac{1}{k_n}\left[u_nz-\log_e\left(\frac{u_nv_n}{k_np_n}\right)\right] \tag{6}$$

のとき，(2)の右辺のかっこの中が最大となる．

3°．1°のように活動に番号をつけると，最適解で $x_n > 0$ であれば，

$$f_n(z)=\sum_{i=1}^{i=N} p_i - e^{-u_n z} v_n \tag{7}$$

となり，そのとき，

$$x_i=\frac{1}{k_i}\left[u_n z-\log_e \frac{u_n v_n}{k_i p_i}\right] \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{8}$$

となる．

上の結果を使って，最適解を求めるための次のような algorithm が得られる．

(1)　N 種の活動を次のように順序づける．

$$k_1p_1 \geqq k_2p_2 \geqq \cdots\cdots \geqq k_Np_N$$

(2)　$n=1,\ 2, \cdots\cdots$ について，(4)，(5)式によって u_n，v_n を計算し，e^{u_nX} と $u_nv_n/(k_{n+1}p_{n+1})$ を比較して，$e^{u_{l-1}X} > u_{l-1}v_{l-1}/(k_lp_l)$ でかつ，$e^{u_lX} \leqq u_lv_l/(k_{l+1}p_{l+1})$ となる l をさがす．

(3)　i 番目の活動に

$$x_i=\frac{1}{k_i}\left[u_lX-\log_e \frac{u_lv_l}{k_ip_i}\right] \qquad i \leqq l$$

$$x_i=0 \qquad i > l$$

の資源（努力）を割り当てる．

数値例． 4種の活動の k と p の値が次のようであるとき，100万ドルを各活動に配分することを考えてみる．

活　動	A	B	C	D
p	4×10^6	3×10^6	2×10^6	10^6
k	2×10^{-6}	3×10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

pk は，Aが8，Bが9，Cが2，Dが1であるから，B，A，C，Dの順に番号をつける．

$u_1=k_1=3\times10^{-6}$，$u_1v_1=k_1p_1=9$

$e^{u_1X}=e^3 > u_1v_1/(k_2p_2)=9/8$

$$u_2=1\Big/\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{k_2}\right)=10^{-6}\Big/\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5}\times10^{-6}$$

$u_2v_2=(k_2p_2)^{u_2/k_2}(u_1v_1)^{u_2/u_1}=8^{3/5}9^{2/5}$，$e^{u_2X}=e^{6/5}$

$u_2v_2/(k_3p_3)=(8^3\cdot9^2/2^5)^{1/5}=(16\times81)^{1/5}$

$e^6 < 16\times81$ であるから，$e^{u_2X} < u_2v_2/(k_3p_3)$

したがって，最適解は，$x_3=0$，$x_4=0$

$$x_1=\frac{1}{k_1}\left[u_2X-\log_e\left(\frac{u_2v_2}{k_1p_1}\right)\right]=2\times10^5\left[2-\log_e\left(\frac{8}{9}\right)\right]$$

$$x_2=\frac{1}{k_2}\left[u_2X-\log_e\left(\frac{u_2v_2}{k_2p_2}\right)\right]=2\times10^5\left[2-\log_e\left(\frac{9}{8}\right)\right]$$

となる．　（飯原慶雄）

〔9―2〕 **Colley, John L. Jr.**, "A Daily System for Balancing and Sequencing a Mixed-Model Assembly Line."

〔スケジューリング／割当／応用的〕

この論文は運輸業の発注によるそれぞれ型の異なったトラック・トレーラーを，相当大規模に生産できるアセンブリー・ラインで，いかにバランスのとれた生産を行ない，ラインを連続的に動かすかというシステムについて書かれている．

顧客は個々のトレーラーの性能についていろいろの注文をしてくる．時に50台とか100台という様なまとまった発注もたまにはあるが，多くの注文はほとんど1台か2台である．

アセンブリー・ラインは，1シフトの運転で1週間に70台（1日14台）のトレーラーを生産でき，ライン・システムをバランスさせ連続化するのに，16Kバイトのコンピューターで制御している．コンピューターには磁気コア・メモリーと2台の磁気テープ装置がついている．

これまでは，アセンブリー・ラインをバランスさせるために，単一の製品への集中化と組立ラインの延長化に関心が集中してきた．また工程のバランスを考えて作業を割り当てるように，図式や，経験的手法が提案されてきた．連続化させる方法としては以前に混合型組立法が示唆された．この混合型組立法では，同一の基本的な本体からいくつかの標準型の製品が交互に共通のアセンブリー・ラインで組み立てられねばならない．

このレポートで述べるシステムが，これまで考えられていたシステムと違うのは，トレーラー産業が注文に応じて生産する産業であるという点である．従って，組み立てられるトレーラーをどの注文品にするかという最終的決定は週ごとに行なわれる．

このシステムでは毎日の生産が異なることから，割当モデルをくり返し計算する必要があり，最も要求されることは計算の速度である．

このシステムはあらかじめ決められた週または日に組み立てなければならないトレーラーを優先的に割り当て，次に労働時間が10日間にわたって，毎日バランスするように，受注品の中から適当なトレーラーを選んでくる．最後に，遊休時間と集中・閑散のギャップを最小にする方法で，毎日14台のトレーラーを完成する様にシステムの連続性を決定する．

システムは1968年の秋に完成した．　（新野　央）

〔9―4〕 **Ishikawa, Akira**, "The Place of

Management Information Systems (MIS) in Developing the PPBS (Planning, Programming and Budgeting System).''
〔PPBS／MIS／理論的〕

この論文は，MIS と PPBS との望ましい関係を明らかにしようとするものである．はじめに MIS を定義し，次に情報システムの立場から PPBS をながめ，それから両システム間の望ましい関係を見いだし，最後に PPBS に対する MIS の重要な役割を要約している．

MIS の定義には，実務的なものや理論的なものなどいろいろあるが，著者は，“経営問題を発見し解決することのできる概念・手続き・応用を有するシステム''と考えている．

情報システムの観点からみた場合，PPBS は一種の MIS とみなすこともできる．このことを著者は，PPBS における意思決定と統制機能を強調しながら図示している．また，PPBS と経営サイクル (Plan-Do-See) との対応関係も図示されている．

MIS と PPBS とを比較した場合，MIS も PPBS も本質的にはマネジメントを援助するためのシステムであるから，その主要目的は同じといえる．しかし, MIS が生産・販売・財務・人事など多くのサブシステムの統合システムであるのに対して，PPBS は計画-財務を中心とした資源管理システムである．

それゆえ，MIS の開発とその高度化は，同時に PPBS の開発と高度化に役立つであろう．特に MIS は，PPBS の地位を明らかにし，他のサブシステムとの望ましい関係を考察し，PPBS に利用できる新技術を奨励することにおいて貢献するであろう．

そのためには，次のような問題を考慮していくことが重要である．

① 経営者の責任と権限の委譲は適切か．
② 情報のチャンネル・量・質および情報の処理・検索・表示は適切か．
③ トップマネジメントのための問題解決に当り，要件に応じてすべての手法が組織化されているか．

①については，防衛目的の考察と分析およびその達成手段の発見と検討が必要である．

MIS の最も重要な役割は，②の問題を通して果たされる．MIS は単に必要情報を処理し表示するだけでなく，情報を管理するシステムである．それゆえ，MIS はトップマネジメントのためになるよう設計されるべきである．そのためには，彼の決定メカニズムを明らかにすることが必要である．それに応じて MIS の仕様も決められるのである．

③については，新技術の発見だけでなく，既存の技術を組織化することにも注目すべきである．

以上のごとく著者は，PPBS における MIS の役割を，①責任と権限の委譲，②情報のチャンネルおよびフローの確立，③MIS 技術の応用，という3つの側面に分けて論じている． (諸星拓二)

〔9―5〕 **Hemsley, J. R., M. I. Klingels and E. Trodd**, “Some Analytic Considerations in Systems Design.''
〔システム／最適化／応用的〕

ある目的を達成する電子計算機を含むシステムを設計することは，システム工学の代表的なプロジェクトの1つである．とくに MIS や PPBS のような高等な情報システムの設計にあたっては，

システムの要求項目，評価判定

の双方を考慮しなければならない．

まず要求項目としては，データ作成，収集検査，データ通信，データ処理，意思決定のためのデータ結集，意思決定がある．実際は管理者からデータ作成までにさかのぼって要求のできるフィード・バック・システムも考えておかなくてはならない．このときには生データの形成は管理者の要求に従って作成されるものであって，設計者が前もって作っておくわけにはゆかない．またデータ処理の内容は，入力データと要求される出力データによって決められるべきものである．

データ収集の過程では，適当な方法で検査が行なわれる．データ通信は押しボタン，カード，テープ，磁気テープの運搬によって行なわれる．データ処理とは分類・集計・計算・論理計算，他のデータとの照合，製表等を意味する．

最終結果から適切な意思決定すなわち最適化を行なうのがこのシステムの目的である．このことは途中のデータ処理の過程に注目するあまり，忘れられがちである．

評価判定は数量的よりは質的であり，「望ましい」とか「役に立つ情報を提供することができる」というようなあいまいな表現が使われることが多い．正確な判定をするためには

処理時間，プロセス時間，システム費用

の3項目が用いられる．処理時間とは，一定の作業――例えば給与計算とか長期計画とかを行なうに必要な時間，プロセス時間とは，例えば新規に加わった1人の給与を計算するために必要な時間とかパラ

メタが変わったために長期計画の計算を再びやり直すに必要な時間である.

システム設計は情報の流れる経路を計画することに帰する. すなわち情報の形式, 加工の方法, 時期, およびその性質を決定することである. システム設計者はまずシステムの各部分に相互に影響する部分に注意し, その制約の下での出力の形式, ファイルの形式, 加工算式などを決める. このようにすると, 細部の計画はシステム工学の方式によって間違いなく確実に進行してゆくのである.

この論文は, 電子計算機を含むシステムの設計にシステム工学の手法を応用することを強調したものである.　(近藤次郎)

〔12—2〕 **Karasyk, L., R. C. Reinitz,** "A Stochastic Model for Planning Mainitenance of Multi-Part Systems."
〔保全／マルコフ過程／理論的〕

M個の部分を直列に結合した複合システムにおいて, 各要素は摩耗型の故障をおこし, その寿命の確率密度 $f_j(x)$ ($j=1, 2, \cdots\cdots, M$) が知られており, そして各要素の故障の発生は独立と仮定している. いま, 時刻 $x=0$ における要素 j の年令を T_j($j=1, 2, \cdots\cdots, n$) とすると, このシステムが要素 j の故障によって故障をおこすまでの時間 X の確率密度 $\hat{f}_j(x)$, その確率分布 $P_j(x)$, 従って $L=\mathrm{Min}\{X, T_0\}$ の期待値 $E(L)$ (T_0 は正の定数) などを容易に計算することができる.

いま, システムのシャット・ダウンは要素の故障か, 計画的な予防保全によっておこるものとし, あるシャット・ダウンとその次のシャット・ダウンの時隔をサイクルと定義すると, 事象 b にもとづくシャット・ダウンに対してプラン k の保全をおこなったとき, 材料と人工のコストを $M_{k,b}$, ペナルティを含むダウンタイム・コストを $G_{k,b}$, システムの老化に伴う期待コストを $E(TA_{k,b}(T_{0b}))$, その後の n 個のサイクルの間の全期待コストの最小値を $EC_{b,n}(T_{0b})$ とすると, DPの関係式:

$$(1)\quad EC_{b,n}(T_{0b})=\underset{k,T_{0b}}{\mathrm{Min}}\,[M_{k,b}+G_{k,b}+F_n\{E(TA_{k,b}(T_{0b}))+\sum_{j=0}^{m}P_{j,k}(T_{0b})EC_{j,n-1}(T_{0j})\}] \quad (*)$$

が成立する. ただし, ここに $j=0$ および $j\geqq 1$ は, それぞれ, 計画保全および要素 $j\geqq 1$ の故障によるシャット・ダウンをあらわし, F_n は n 番目のサイクルに対する割引をあらわす定数である. $P_{j,k}(T_{0b})$ は定義されていないが, 上記の初期条件をもつシステムで計画保全が予定されている時刻 T_{0b} 以前に要素 j の故障によるシャット・ダウンがおこる条件つき確率を示すものであろう. このように数式化しても, 上のDPを解いて最適な保全計画を求めることは, 現実問題としては次元数の関係で実用的でなく, その上このモデルの前提になっているいろいろなコストは経済条件の変化につれて時とともに変わるものであると著者は述べている. そこで, 当面のシャット・ダウンに対してプラン k の保全をおこなったときの全期待コストを

$$(2)\quad ETC_k=M_k+G_{k,c}+E(A_k)+E(G_{k,N})$$

とおき, 最適保全計画への近似的なアプローチとして, 単位時間当りの平均コスト:

ETC_k/[そのサイクルの長さの期待値]

を計算し, これによってプラン k の順位づけをおこない, その時点で一番よいプランを採用することを提案している. ただし, 上の(2)式の右辺の最初の3項は(1)式の右辺の[…]のなかの最初の3項と同様に定義される量であり, $E(G_{k,N})$ はプラン k を施行した場合, 次のダウンタイムの期待コストである.

定義されているいくつかのコストが各サイクルを通じて一定とすれば, この論文のモデルはHowardのマルコフ決定過程の特殊な一例に過ぎないし, またほとんど自明と思われる2つの関係式を付録で長々と証明したりしているが, この論文の特徴は, 著者らがエレガントな既成の理論と実際問題とのギャップを実際家の立場から指摘している点にあるといえよう.　(阿部俊一)

〔12—3〕 **Losch, E. G.,** "Long-Ranze Planning of the Distribution System of a Brewery."
〔物的流通／線型計画／応用的〕

1工場, 20数個のデポ (多くのばあいここでビン詰めされている), 数百のマーケット, 数千もの小売店から成るビール会社の流通システムである. このシステムでは, 次のことが問題となっている.

1. ビン詰めの場所を工場, ビン詰めセンター, デポのいずれにしたらよいか.
2. 鉄道, 道路輸送のいずれにしたらよいか.
3. 新設するばあいのビン詰めセンターの立地.
4. 現有デポの適正立地・規模.
5. 各デポから配送されるマーケットの範囲.
6. 新設デポの立地, 規模.
7. ビン詰めセンターの総合計画.

これらを, 工場立地は現状のまま, マーケットへ

は政策上，必ずデポを通じて製品を供給するという条件の下で，最も効率的，経済的に解決するよう迫られている．

このシステムの総配送費用は，次のモデルで表わすことができる．

$$F(X_{ijk})=S_{ijk}(e_i+c_{ij}+d_{jk})X_{ijk}+S_ih_i(S_{jk}X_{ijk})^{n'}+S_jb_j(S_{ik}X_{ijk})^n+S_ig_ir(S_{jk}X_{ijk})+S_ja_jr(S_{ik}X_{ijk})$$

X_{ijk}；ビン詰めセンター i からデポ j を経由し k マーケットに至る年間配送量．

S_{ijk}；当該のデポ，センターなどが利用されるときは1，利用されないときは0．

e_i；工場からビン詰めセンターへの輸送単価．

c_{ij}；ビン詰めセンターからデポへの輸送単価．

d_{jk}；デポからマーケットへの輸送単価．

h_i；ビン詰めセンターにおける費用回帰曲線の変動費群に関する定数．

n'；ビン詰めセンターにおける費用回帰曲線の変動費群に関する配送量の指数．

b_j；ビン詰めを行なわないデポにおける費用回帰曲線の変動費群に関する定数．

n；ビン詰めを行なわないデポにおける費用回帰曲線の変動費群に関する配送量の指数．

g_i；ビン詰めセンターにおける費用回帰曲線の固定費群．

a_i；ビン詰めを行なわないデポにおける費用回帰曲線の固定費群．

ここで，Q を年間の総生産量，P_k を k マーケットでの年間消費量とすると，

$S_{ijk}X_{ijk}=Q$，$S_{ij}X_{ijk}=P_k$．ただし，$X_{ijk}\geq 0$．

これらの制約の下に，あらかじめ仮設した立地・規模をもつ i ビン詰めセンターそれぞれについて，総費用が最小となる $S_{jk}X_{ijk}^{(0)}$ を計算する．

問題1から5までの検討は次のように進める．ビン詰め機能の集中程度（3水準），鉄道か道路輸送か，随時処理か計画化（例，定期出荷）を進めるかの12通りの組合せを考え，このうち効果的な6つの組合せを選ぶ．それぞれの総費用，デポに対するマーケットの適切な配分，ビン詰めセンターに対するデポの適切な配分，およびこれらの適正規模が先述のモデルを使って計算される．

この結果，工場近くに唯一のビン詰めセンターを設定すべきこと，このセンターとデポとの間は鉄道輸送からローリー車輸送に切換えるべきこと，できるだけ計画化を進めるべきことがわかった．

新デポの立地，規模については，現有デポの立地を変えたばあい，数個のデポを集中したばあいなどを考え，検討を加えた．

ビン詰めセンターについては，3水準の需要（楽観，悲観，中間）を考え，月間，日々変動による保管規模をシミュレートした．これら諸案の検討には，決定の樹形図を活用し，異なった代替案相互の関連を，長，中，短期にわたって表わしたり，予測値などの確率的要素の影響程度を示したり，案のクリチカルな局面を評価したりした．ビン詰めセンターは費用の面からは新設し，財務面からは現有施設の拡張が好ましいと結論された．　(忍田和良)

〔12—5〕 **Beckmann M., R. Sato**, "On a Class of Producton Factions Defined by Log-Linear Relations."

〔経済／生産関数／理論的〕

次のような諸変数間に，対数線型関係が存在すると仮定された場合に，生産関数はいかなるタイプになり，それによる技術進歩がいかなるタイプになるであろうか．この諸変数は，

x	労働-資本比
y	産出-資本比
y/x	産出-労働比
y'	賃金率
$y-xy'$	利子率
$(y-xy')/y'$	限界代替率
xy'/y	労働に対する分配

である．前述した仮定のもとでの一般の形は，係数を適当に定めると，

$$(y-xy')^a(y')^by^cx^g=k \tag{1}$$

と表現される．なお，これらの変数の変わりうる範囲が，経済学的な意味から，ある制限をうけることはいうまでもない．

筆者は，(1)式に対して，特に $a=1$ の場合を中心に分析を進める．

いま，

$$y=e^{v(u)}\qquad u=\log x$$

という変換によって，変数 u，v を導入すれば，(1)式は，

$$(1-v')(v')^b=ke^{-(1+b+c)v+(b-g)u} \tag{2}$$

と表現される．(2)式に関して，筆者は，次のいくつかの場合にわけて分析を進める．

Case 1

$1+b+c=0$，$b-g=0$ の場合．

生産関数は，

$$y=Ax^r$$

の形になり，$b<0$ または $b^b/(1+b)^{1+b}>k$ がいえるならば，$0<r<1$ がいえて，Cobb-Douglas 型の生産関数が得られる．いいかえると，技術進歩は，Hicks, Harrod, Solow の意味で，中立である．

Case 2

$1+b+c=0$, $b-g\fallingdotseq 0$ を仮定する．

この場合，(2)式より生産関数が

$$y=\varphi(x^r)^{\frac{1}{r}} \qquad \because \quad r=b-g$$

の形になることが示される．これは，CES 関数を一般化した形になっているが，φ がいかなる形になるかが吟味の的になろう．

Case 2.1

Case 2 の仮定に，$a=-b=1$ を加える：

この場合，φ は1次関数になって，生産関数はCES関数そのものになる．

Case 2.2

Case 2 の仮定に，$a=b=1$ を加える．

φ は，$A(t)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4kx}\right)e^{(1\pm\sqrt{1-4kx})}$ になる．

Case 2.3

Case 2 の仮定に，$b=0$ を加える．

φ は $\hat{A}xe^{-kx}$ の形になる．

なお，Case 2 の場合では，Hicks の意味で中立な技術進歩を吟味することになることも示される．

Case 3

$1+b+c\fallingdotseq 0$ を仮定する．

$$\lambda=(b-g)/(1+b+c)$$

$$\hat{k}=k^{1/(1+\lambda+c)}$$

$$r=-(1+b+c)$$

とおけば，(2)より

$$y=\hat{k}x^{\lambda}\varphi(x^r)^{\frac{1}{r}}$$

という形の CES 関数を一般化した形の生産関数が得られる．

以上の理論を吟味した上で，筆者はアメリカ，日本，ドイツに関して，(2)式を定義する係数 a，b，c g，k が，実際にはどのような数値になるか実証研究を簡単に行なっている．（松山敬左）

〔12—12〕 **Ricci, F.**, "Efficiency of Linear Programming Algorithms in Solving Real Integer Linear Programming Problems."

〔整数線型計画／整数型解法を用いない実験／応用的〕

trim problem や cutting stock problem を定式化して得る整数ＬＰ問題を，普通のシンプレックス法を用いた上で四捨五入などした場合と，Balas の整数ＬＰアルゴリズムを若干修正して用いた場合と比較している．サイズは小さいが，かなりの数の問題を解いた結果では，この種の問題には整数ＬＰの解法を用いずに，普通のＬＰのシンプレックス法を用いて解を修正して用いた方が有利であるとの結論をえている．

実験した問題は次の通り：

目的関数：

$$z=c_1\sum_{j\in N}(l_2-\sum_{i\in M}v_ix_{ij})+c_2\sum_{i\in M}v_i(f_i-\sum x_{ij})\longrightarrow \text{最小}$$

制約条件：
$$\begin{cases} s_i \leqq \sum_{j\in N} x_{ij} \leqq f_i & (i\in M) \\ l_1 \leqq \sum_{j\in M} v_i x_{ij} \leqq l_2 & (j\in N) \\ n \leqq n_1 \end{cases}$$

n, x_{ij}：変数（整数）

m, l_2, v_i, $f_i(i\in M)$：定数（正整数）

n_1, c_1, c_2, $l_1\leqq l_2$, $s_i\leqq f_i(i\in M)$：定数（非負整数）

$M=\{1,2,\cdots\cdots,m\}$, $N=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$, $v_i\leqq l_2$

問題をサイズによって次の3種に分ける：

A：$m\leqq 6$, $v_i\leqq l_2/4$, $\sum_{i\in M}f_i\geqq 30$

B：$6<m\leqq 10$, $v_i\geqq l_2/4$, $20\leqq\sum_{i\in M}f_i\leqq 50$

C：$m>10$, $\sum_{i\in M}f_i>50$.

Aの問題200ケースについては，シンプレックス法が Balas 法の約30%の時間で，目的関数が整数ＬＰを用いた値の0.5%増し程度の結果を得ている．

Bの，約100ケースについては，許容解がふえて複雑になり，Balas 法ではあまり有利でない．Cの問題に至っては，整数ＬＰ解法を用いると，ますます許容解がふえるので，そのうちの目的関数値が有利なわずかなものだけから考慮しても，計算時間はふえるだけで実験した300変数ぐらいのところまでは，有利さは全くないことがわかった．

ここでは，Balas 法および著者による修正をした Balas 法のみについてしか実験してない．

（真鍋龍太郎）

〔12—13〕 **Massotto, C., P. Oberto,** "The Quality of Telephone Service in a Problem of Planning the Expansion of Facilities."

〔通信／最適化／応用的〕

電話局の局内設備は，電話需要の発生に備えて，1年に1回ぐらいの間隔で逐次増設されてゆく，この場合，1回の増設量が多すぎると設備が遊休し，少なすぎると需要に応じきれなくなる．このため，適量の増設量を決定する必要があるが，大きく分けて2つの因子が作用する．第1は需要に関する因子，第2は設備の費用に関する因子である．需要には，加入区域内に発生する新規需要と，他局との転入転出による変動分がある．設備の費用には，利子をも考慮した増設費と，設備不足で需要に応じきれないときの罰金費がある．後者は，需要に応じたとき得るべき利益と，需要者がこうむる迷惑よりなる．

さて，局内設備の増設に伴う費用を在庫費用，需要に応じられないときの罰金費を品切損失と解釈すれば，設備増設の問題は一種の在庫問題に帰着される．ここでは，電話需要の発生を既知とみなしうる場合と，ある確率分布としてしか把握しえない場合について，問題をそれぞれダイナミック・プログラミングによって定式化する．例として，後者の場合を述べる．増設量zに対する増設費を$c(z)$，設備量xに対する罰金費を$L(x)$，利率をα，電話需要ξに対する確率分布を$\varphi(\xi)$とする．最適政策を用いたときの費用をfとすれば，平衡状態のもとで

$$f(x)=\min_{z\geqq 0}\{c(z)+L(x)+\alpha\int f(x+z-\xi)\varphi(\xi)d\xi\}$$

が成立する．ここに，罰金費は架設までの待ち日数の関数と考えられる．例えば，若干の仮定を設ければ，

$$L(x)=\sum_{n=x+1}^{\infty} np\alpha\int_0^1(1-t)\varphi_\Gamma(n,t)dt$$

とかかれる．ここに，$\varphi_\Gamma(n,t)$ はn番目の需要が時刻tに到着する確率である．うえの関数方程式はInglehart の定理と Veinott-Wagner の定理を用いて解かれるが，実際にはかなり煩雑である．

以上の考察では，罰金費を待ち日数の関数と考えたが，この待ち日数をうえの解析とは独立に考察する．独立としたのは，両者を同時に考えると，問題が複雑になりすぎて解けなくなるからである．加入区域内に発生する新規需要は直線的で，ポアソン過程に従うものとする．他局との転入転出に対しては，その傾向が時間とともに変わる場合と，変わらない場合の2つを考える．すると，両者に対して別々の出生死滅過程が作られ，待ち行列理論を用いて平均待ち日数が導かれる．ただし，ここの解析では，時刻tの需要数がjとなる確率を$P(j,t)$と抽象的に与えている．例えば，時刻tに待っている平均需要数は

$$E_W(t)=\sum_{j=R+1}^{\infty}(j-R)P(j,t)$$

というようにである．ここに，Rは増設量とした．

（中村義作）

〔12—14〕 **Gianessi, F.,** "On the Minimization of a Linear Function with Linear Constraints."

〔線型計画／逐次的制約式付加による解法／応用的〕

線型計画問題

$$P:\begin{cases}\min z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,m)\\ x_j\geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)\end{cases}$$

の解を，

$$P_r:\begin{cases}\min z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,r)\\ x_j\geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)\end{cases}$$

なる問題を逐次解く（$r=1,2,\cdots\cdots,m$）ことによって求める方法が提示されている．したがってこれはちょうどPrの最適解がわかったとき，その解からP_{r+1}の最適解を求める方法に同じである．提示されている方法は，本質的には，シンプレックス法で制約式を追加した場合の処置と同一であろう．

まず，次のような仮定をおく．

(1) $b_i^2 \neq 0,\ b_1>0$

(2) 問題P_1は常に解をもつ（この仮定は，いわゆる Beale の方法，すなわちb_0を大きい任意の正数とするとき，$\sum_{j=1}^{n}x_j=b_0$なる制約式を第1の制約式として付け加えることによっていつでもみたすようにすることは可能である）．

いまP_rの最適な基底解，$x_i=b_i'(i=1,\cdots\cdots,r)$，$x_j=0(j=r+1,\cdots\cdots,n)$ がわかっているとする．このとき

$$P_{r+1}(\xi):\begin{cases}\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\ x_i+\sum_{j=r+1}^{n}a_{i,j}'x_j=b_i' \quad (i=1,\cdots,r)\\ \sum_{j=r+1}^{n}a_{r+1,j}'x_j=\xi\\ x_j\geqq 0 \quad (j=1,\cdots\cdots,n)\end{cases}$$

なる問題を考える．ここでξは$0\leqq\xi\leqq b_{r+1}'$なるパラメータであり，また$P_{r+1}(b_{r+1}')\equiv P_{r+1}$となる．$\xi=0$から最適性を保ちながら$\xi$を増大して行き（基底変換を行ないながら），$\xi$の範囲が$b_{r+1}'$に達したとき，$P_{r+1}$の最適解が得られたことになる．なおシンプレックス法の60～70%の計算時間ですむ場合もあったが，一般にはシンプレックス法よりあまり効率的でないと述べられている．また角状系や階段状の特殊構造もったＬＰ，製品混合のＬＰ問題等にも適用できることについてもふれている．

（青沼龍雄）

〔12—15〕 **Aparo, E. L.**, "Spectral Decomposition of Matrices and z-transformations."
〔線型計算／行列のべき乗計算／応用的〕

Aを$n\times n$の正方行列，$Y_0'=(y_1^0,\ y_2^0,\cdots\cdots,y_n^0)$とするとき，任意の正の整数$k$に対してベクトル$Y_0'A^k$の成分を$k$の関数として求める方法が提示されている．このような問題の具体的な例としては，論文の著者も述べているように，行列Aのz-変換におけるz^kの係数A^k (Howard) やマルコフ連鎖におけるkステップ後の状態確率を算出する場合が挙げられる．これらの計算は，普通$(I-zA)^{-1}$から求められるが（Howard ほか），ここでは，行列のスペクトル分解に関する定理：

Aの固有値をλ_i $(i=1,2,\cdots\cdots,r)$，その重複度$\mu_i(\sum_{i=1}^{r}\mu_i=n)$，$f(\lambda)$を任意の多項式とするとき，

$$f(A)=\sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{M_k}f^{(k-1)}(\lambda_k)H_{hk}$$

をみたし，$f(\lambda)$に無関係なn個の行列$\{H_{ik}\}$が存在する，

を適用し（$f(\lambda)=\lambda^k$とすれば，$f(A)=A^k$），A^kを求めることは行列Aの固有値とH_{ik}を求めることに帰着する．さらにH_{ik}が$f(\lambda)$の選び方に無関係なことから，適当な選び方をすれば（具体的な$f(\lambda)$が論文で述べられている），係数行列が３角行列となる変数H_{ik}の連立方程式が得られる．したがってH_{ik}を求める計算も簡略化される．（青沼龍雄）