経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機会誌） 第14巻 第2号（1970年9月）

経営情報システム設計の所要時間算出の問題†

粟 野 敏 雄*

1. 緒 言

経営情報システム設計において，要素の決定ができ，その手順が定型化されれば，PERT ネットワークを作成して日程の短縮を理論的に導き出すことは容易である[1]．しかし，経営情報システム設計における日程算出の難しさは，問題のフィードバックにある．現実に情報システムを設計する場合，立案されたシステム設計書が一度でパスするということは，まず考えられない．たとえば，システム設計書作成の段階においてはもちろん，プログラムの検討をしたり，移行のためのファイル作成の手続をしたり，現場で試行する段階において，試行結果による措置をとったりするときなど常にフィードバックして修正するということが生ずる．特に最後の段階においては，新旧両システムが併行実施されているので費用もかかり，実際にはかなり長い期間を要している．

今回発表する内容は，この段階における所要時間算出について理論的な根拠を与えたものである．

2. フィードバックの場合の所要時間の算出

経営情報システムを設計する場合，打合せ，会議の数が非常に多いことは，それに関係した人々の等しく感ずるところである．そして，これがまたシステム設計を複雑にしているのであるが，システムが大きくなればなるほど，打合せ，会議の数も増え，会議を開催することにより，関係する多くの担当者が集合し，当然そのために浪費される時間も莫大なものとなる．会議の回数が多くなるとその費用も大となり，逆に会議の回数を少くすると，生起した修正個所のフィードバックに要する待ち時間が長くなる．これらの点を調整するために，フィードバックまでの所要時間の検討を行なった．

打合せ会議を開催する場合，大別して次の2方式，すなわち，修正個所の個数が一定数に到達した場合（r-固定方式）と，会議開催の間隔を一定にした場合（τ-固定方式）とになる．従って，

† 1969年12月10日受理．
* 日本電信電話公社．

これらの2方式について待合せの観点から所要時間の検討を試みた．

2・1 r-固定方式

修正個所がある数 r 個に達した時に，会議を開催するとか，一まとめに送付することがある場合である．

扱者数が1で，1到着ごとの到着呼数が一定値 r 個の集団到着の待ち行列系は，到着間隔が任意分布，サービス時間が指数分布の場合を F. G. Foster［2］が扱っており，到着する先頭の呼の待ち時間のラプラス・スチェルチェス変換を $\Omega_1(s)$ とすると，

(1) $$\Omega_1(s)=\prod_{j=1}^{r}\frac{\Pi\, 1-\gamma_j}{1-\dfrac{\gamma_j\mu}{\mu+s}}\qquad (R(s)>0)$$

到着する全体の呼についての待ち時間分布のラプラス・スチェルチェス変換を $\Omega_2(s)$ とすれば，

(2) $$\Omega_2(s)=\prod_{j=1}^{r}\frac{\Pi\, 1-\gamma_j}{1-\dfrac{\gamma_j\mu}{\mu+s}}\cdot\frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^j\qquad (R(s)>0)$$

で与えられる．

ただし，$1/\mu$ は平均サービス時間で，$\gamma_j\,(j=1,2,\cdots\cdots,r)$ は，呼が十分存在するときに，到着間隔の間に処理が完了する呼数の確率母関数を $K(z)$ としたとき，z に関する方程式

(3) $$z^r=K(z)$$

の単位円内（$|z|<1$）の r 個の根である．

現在の r-固定方式において，修正個所の発生間隔およびサービス時間が指数分布に従い，平均発生間隔を $1/\lambda'$，平均サービス時間を $1/\mu$ とすれば，修正の受付間隔は r のアーラン分布となり，受付1回ごとの修正個所件数が r 個で，上記のモデルに該当する．

一般に，到着間隔が位相 k のアーラン分布に従うとき，平均到着間隔を $1/\lambda$ とし，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ とする．到着間隔の分布函数を $F(x)$ とすると，

(4) $$F(x)=1-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda kx)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda kx}\qquad (x\geq 0)$$

$F(x)$ のラプラス・スチェルチェス変換を $\varphi(s)$，すなわち，

(5) $$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)\qquad (R(s)>0)$$

とすれば，

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\left\{1-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda kx)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda kx}\right\}$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}\left\{1-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda kx)^{j-1}}{(j-1)!}\lambda ke^{-\lambda kx}-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda kj)^j}{j!}(-\lambda k)\cdot e^{-\lambda kx}\right\}\cdot dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot\lambda k\cdot\frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda kx}\cdot dx$$

(6) $$=\left\{\frac{\lambda k}{\lambda k+s}\right\}^k$$

また，修正個所が十分あったとき，到着間隔の間に j 個の修正がなされる確率を k_j とすれば，

$$k_j=\int_0^\infty e^{-\mu x}\cdot\frac{(\mu x)^j}{j!}\,dF(x)$$

この母函数が $K(z)$ である．従って，

$$K(z)=\sum_{j=0}^{\infty}k_jz^j \tag{7}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^j}{j!}\cdot z^j dF(x)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\mu x}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu xz)^j}{j!}\right\}dF(x)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\mu(1-z)x}\cdot dF(x)$$

式(5)と式(7)とを比較すると，$K(z)$ は

$$s=\mu(1-z)$$

とした場合の $F(x)$ のラプラス・スチェルチェス変換になっている．従って

$$K(z)=\varphi\{\mu(1-z)\}$$

式(6)を代入して

$$K(z)=\left\{\frac{\lambda k}{\lambda k+\mu(1-z)}\right\}^k \tag{8}$$

関数方程式(3)は $\lambda/\mu=\rho$ を用いて，

$$z^r=\left\{\frac{k\rho}{k\rho+(1-z)}\right\}^k$$

あるいは，

$$\{k\rho+(1-z)\}^k z^r=(k\rho)^k \tag{9}$$

と表わしうる．

着目している r-固定方式では，$k=r$ であるから，式(9)は

$$\{r\rho+(1-z)\}^r z^r=(r\rho)^r \tag{10}$$

となり，容易に解きうる形となる．平衡条件は $r\rho<1$ であり，簡単のため $r\rho=a$ と表わせば，方程式(10)の根は，

$$\{a+(1-z)\}z=a\left\{\cos\frac{2\pi n}{r}+i\sin\frac{2\pi n}{r}\right\} \tag{11}$$

$$n=0,1,2,\cdots\cdots,r-1 \qquad i=\sqrt{-1}$$

より求めうる．

単位円内（$|z|<1$）の根は r 個あり，それが $\gamma_1,\ \gamma_2,\cdots\cdots,\ \gamma_r$ である．受け付けられてからの全体の修正個数の待ち時間は，式(2)より

$$\Omega_2{}'(s)=\sum_{l=1}^{r}\frac{1-\gamma_j}{\left\{1-\dfrac{\gamma_j\mu}{\mu+s}\right\}^2}\cdot\frac{-\gamma_j\mu}{(\mu+s)^2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{r}\frac{1-\gamma_j}{1-\dfrac{\gamma_j\mu}{\mu+s}}\cdot\frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^j$$

$$+\prod_{j=1}^{r}\frac{1-\gamma_j}{1-\dfrac{\gamma_j\mu}{\mu+s}}\cdot\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{-j\mu^j}{(\mu+s)^{j+1}}$$

従って受け付けられてからの平均待ち時間は，

(12) $$-\Omega_2'(0)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j}{1-\gamma_j}\cdot\frac{1}{\mu}+\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{j}{\mu}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j}{1-\gamma_j}+\frac{r-1}{2}\right\}$$

着目しているモデルは真の集団到着ではなく，個々の修正個所の発生はランダムである．修正個所の発生から受け付けられるまでの平均時間は

(13) $$\frac{r-1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda'}$$

であるから，修正個所が発生してからの平均待時間 W は，式(12)に式(13)を加え，

(14) $$W=\frac{1}{\mu}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j}{1-\gamma_j}\right\}+\frac{r-1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda'}\right)$$

となる．

2・2 τ-固定方式

試行やテストを行なった場合，会議または打合せを一定の間隔を定めて開催するとか，修正個所を送付してくる場合である．

扱者数が1で，1到着ごとの到着する呼数が n $(n=1,2,\cdots\cdots,r)$ である確率が C_n で与えられる集団到着の待ち行列について，到着間隔が任意分布，サービス時間が指数分布の場合を鈴木[3]が扱っており，到着数全体の呼についての待ち時間分布のラプラス・スチェルチェス変換を $\Omega(s)$ とすれば，それは次式で与えられる．

(15) $$\Omega(s)=\prod_{j=1}^{r}\frac{1-\gamma_j}{1-\dfrac{\mu\gamma_j}{\mu+s}}\cdot\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{i-1}\frac{C_n}{n}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n$$

ただし，$1/\mu$ は平均サービス時間で，$\gamma_j(j=1,2,\cdots\cdots,r)$ は，

(16) $$K(z)\{c_1z^{r-1}+c_2z^{r-2}+\cdots\cdots+c_{r-1}z+c_r\}=z^r$$

の単位円内（$|z|<1$）の r 個の根である．$K(z)$ は前項と同じである．

到着間隔が一定値 τ である場合には，分布函数 $F(x)$ は，

$$F(x)=\begin{cases}0 & \tau>x\geq 0\\ 1 & x\geq\tau\end{cases}$$

となり，そのラプラス・スチェルチェス変換 $\varphi(s)$ は，

$$\varphi(s)=e^{-s\tau}$$

また，修正個数が十分あったとき，到着間隔の間に修正を終了する修正個数の確率母函数 $K(z)$ は，

$$K(z)=\varphi\{\mu(1-z)\}$$
$$=e^{-\mu\tau(1-z)}$$

$\mu\tau=\dfrac{1}{\rho}$ とおけば，式(16)は

(16)′ $$e^{-(1/\rho)(1-z)}\{c_1z^{r-1}+c_2z^{r-2}+\cdots\cdots+c_{r-1}z+c_r\}=z^r$$

z は複素数であるから，$i=\sqrt{-1}$ として，

$$z=\eta e^{i\theta}=q\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

とおいて，式(16)′を実部と虚部に分けると

$$(17)\qquad \sum_{j=1}^{r} c_j\eta^{r-j}\cos\{(r-j)\theta\}=\eta^r e^{(1/\rho)(1-\eta\cos\theta)}\cos\left\{r\theta-\frac{\eta}{\rho}\sin\theta\right\}$$

$$(18)\qquad \sum_{j=1}^{r} c_j\eta^{r-j}\sin\{(r-j)\theta\}=\eta^r e^{(1/\rho)(1-\eta\cos\theta)}\sin\left\{r\theta-\frac{\eta}{\rho}\sin\theta\right\}$$

を得る.

従って，式(17)，式(18)を満足させる η, θ を求めることによって，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$ を求めうる.

修正個所の発生間隔を平均値 $1/\lambda'$ の指数分布に従うとしている現在の場合には，受付間隔 τ の内に n 個の修正個所が発生する確率は，ポアッソン分布

$$P_n=\frac{(\lambda'\tau)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda'\tau}$$

で与えられるが，P_0 の値が小さい場合には，適当な大きさの真数値 r に対して，近似的に

$$C_n=\frac{(\lambda'\tau)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda'\tau}$$

$$(n=1, 2, \cdots\cdots, r)$$

とおいてさしつかえないと考えられる．一方，λ' の値が小さい場合には当然 τ を大きくとるものと考えられるから，上記の仮定は妥当である.

従って，最初の修正個所が発生してからの平均待合せ時間 W は，次式で与えられる.

$$(19)\qquad W=\frac{1}{\mu}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j}{1-\gamma_j}\right\}+\frac{R-1}{2}\cdot\frac{1}{\mu}+\frac{\tau}{2}$$

ここに，R は τ 時間内に発生する平均修正個所数で，$R=\lambda'\tau$ である.

図1は r-固定方式，τ-固定方式の待合せ時間の傾向曲線を示したものである．特に r-固定方式では ρ' が小さいとき r を大にすると，r 個集まるまでの待ち時間が長くなる．なお，式(1)は $E_r/E_k/1$ のモデルの待ち時間のラプラス・スチェルチェス変換になっている．$k=r$ の場合の平均待ち時間の曲線を示すと図2のようになる.

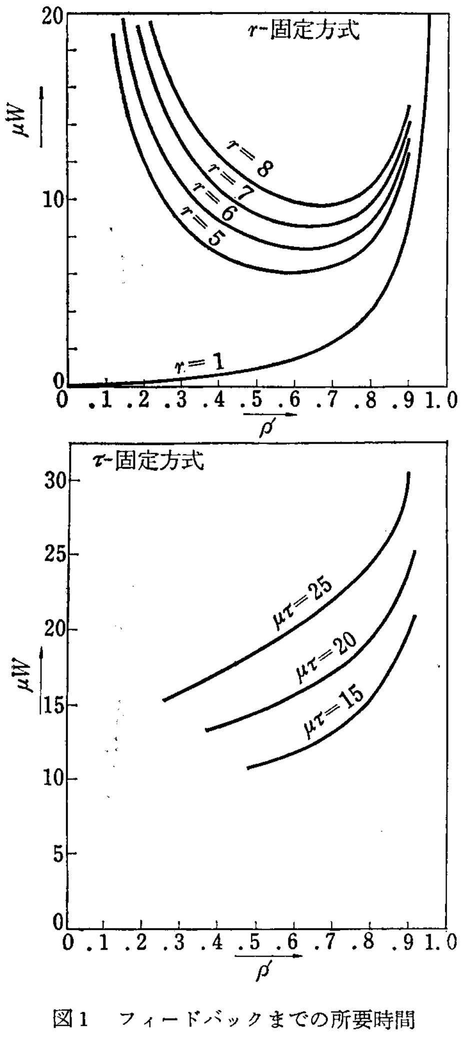

図1 フィードバックまでの所要時間

3. 実施例

会計決算のシステム設計を行なった場合，あるサブシステムについて，そのシステム設計が一応

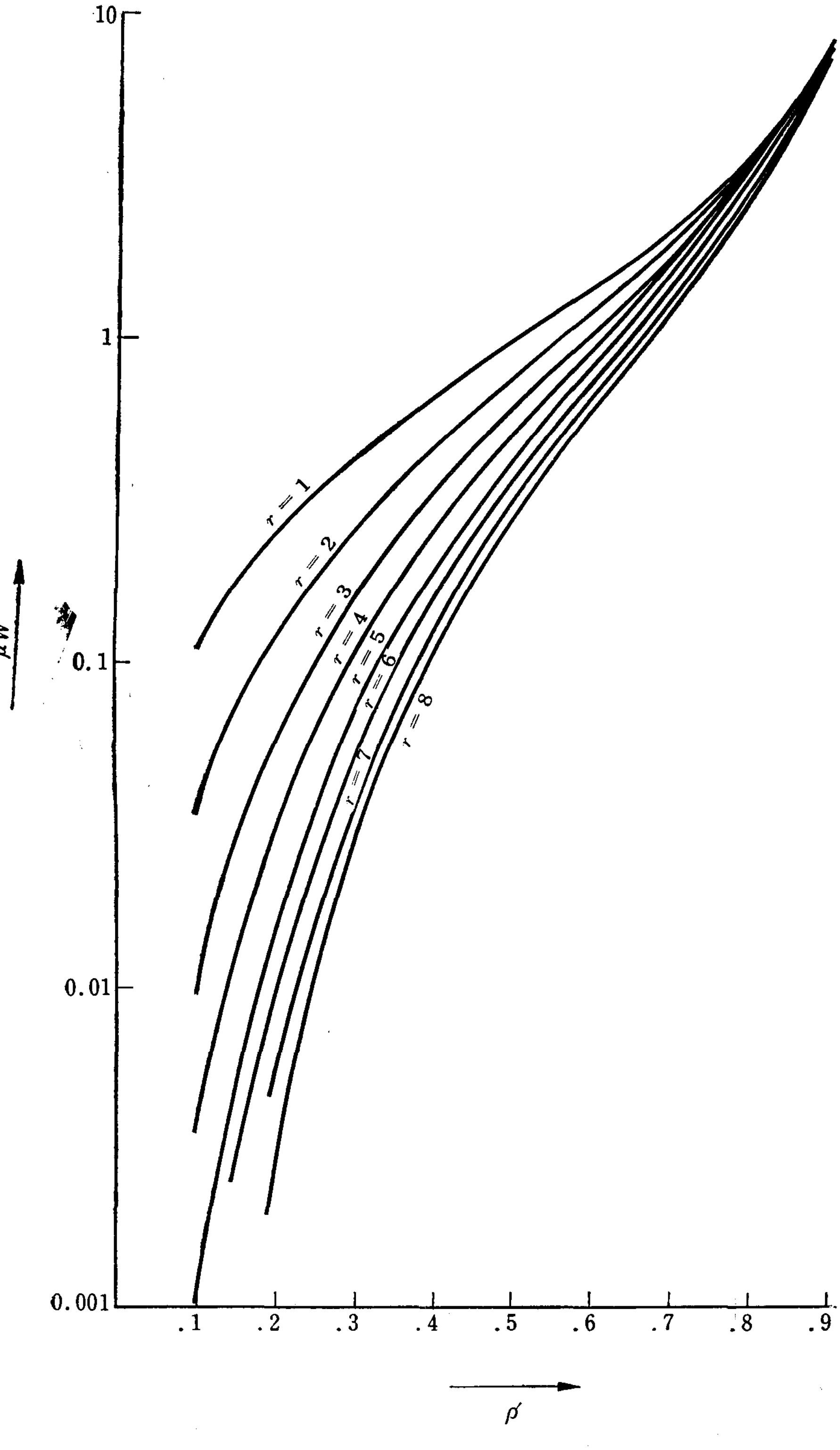

図2　到着した先頭の修正個所の平均待ち時間 ($E_r/E_r/1$)

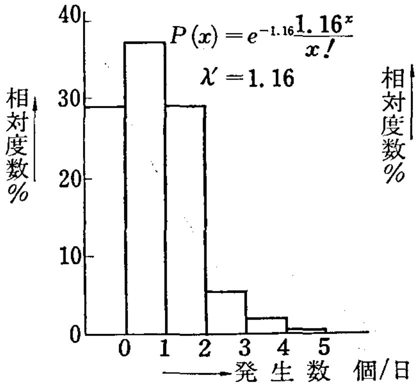

図3　λ' の分布

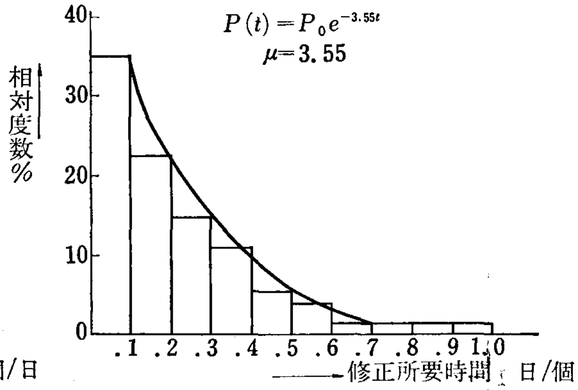

図4　μ の分布

作成され，試行を行なった場合に測定した修正個所の発生は54件で，その発生状況をヒストグラムに表わすと図３のようになる．図より，その分布は $\lambda'=1.16$ のポアッソン分布に近似していることが分る．従って，分布函数は

$$P(x)=e^{-1.16}\frac{1.16^x}{x!}$$

次に，１件あたりの修正所要時間のデータをとり，その分布をヒストグラムに表わすと，図４のようになる．また，セミログペーパーにて表わすと直線となり（図５），修正時間の分布は指数分布をもってきわめて良く近似できることが推定される．

計算により $\mu=3.55$個/日を得るから，分布函数は，

$$P(t)=P_0e^{-3.55t}$$

となる．

従って，利用率を ρ' とすると

$$\rho'=\frac{\lambda'}{\mu}=0.33$$

となる．

この数値により平均待ち時間を求めると，次の通りである．

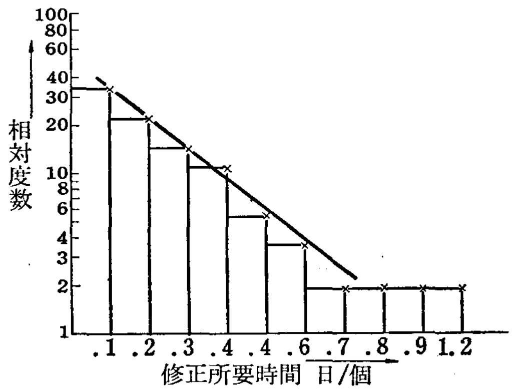

図５　相対度数と修正所要時間のセミ・ログカーブ

r-固定方式の場合 $r=8$ とすると

$$\mu W=14.14$$

τ-固定方式の場合 $\tau=7$ とすると

$$\mu W=15.99$$

を得る．

4. 結　　　言

経営情報システムの複雑性は，非常に多くの要素が漠然と積み重なり組み合わされているところにある．それは，その発生的，発展的過程から考

えてみれば当然なことである．しかし，今後の問題として，その数量化を考える必要がある．ここに，その一部であるフィードバックの問題の定量的な解析を試みた．

フィードバックまでの所要時間の考察は，広く一般の場合にも適用される．たとえば，管理者がある施策事項などの提案についての一連の打合せ，または，会議を開催するときの目安を与える算出根拠ともなると考えられる．

なお，方程式(17)，(18)の解法は，電々公社中央統計所 IBM 7044 電子計算機により実行された．プログラムは 996 iK 7 (S. 44.9.10) として登録されている．

最後に，本論文作成にあたり，種々御助言いただいた電々公社電気通信研究所第7研究室長雁部頴一氏に厚く感謝する．

参考文献

［1］ 粟野敏雄，“直線型経営情報システム設計法の実際とその利点，” 経営科学，第13巻第2号．
［2］ Foster, F. G., “Queues with Batch Arrivals I,” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 12, 1-10 (1961).
［3］ Suzuki, T., “Batch-arrival Queing Problem,” *JORSJ*, Oct. 1963.