

## Batch Size が待ち呼数に応じて確率的に 変化する Bulk Service Queue の解析†

村 尾 洋\*

### 1. ま え が き

最近いちじるしい発展をとげている電子的情報処理系では、技術の進歩にともない種々の新しい処理方式が採用されている。このため、系で呼の処理される様相は、従来のもとかなり異なり、待ち行列問題に対しても各種の新しいモデルを提起している。この報告で解析するモデルもその1つで、現在、実用化段階にある電子交換機の制御系に関するトラヒック問題から生じたものである。

一般に、この種の制御系では系にクロックが内蔵され、処理が一定時間おきになされる(周期処理)。すなわち、系が空のときに呼が到着しても、その処理が直ちに開始されず、通常の待ち行列モデルとは若干異なってくる。

また、制御系では複数の制御装置が複数の呼を共通に処理するため、複数扱者の待ち行列モデルと見ることができる。しかし、複数の装置は前述のクロックにしたがって、一斉に処理を開始し、また終了する。このため、1つの処理装置が同時にいくつかの呼をまとめて処理する方式ともみなされ、待ち行列理論でいう集団処理(Bulk Service)モデルに相当する。しかし、制御系では種類の異なった呼を扱い、しかも装置の構造上、同一種類の呼を同時に処理することは許されない[8][9]。このため、1周期内に処理される呼数は、待ち呼の内容に応じて変動する。しかし、この変動の様相を正しく把握しようとする、待ち呼の内容を詳細に調べなければならない。そこで、1つの近似として、待ち呼の内容までは立ち入らず、処理呼数が待ち呼数だけに關係して確率的に変化するものとする。これは、“バッチサイズが待ち呼数に応じて確率的に変化する集団処理”の待ち行列モデルとなり、バッチサイズが固定された通常の集団処理モデルとは異なってくる。

集団処理モデルについては、今までにも若干研究がなされている。この報告に關連してそれらを概観すると、以下の通りである。

まず、最も基本的な集団処理モデルは、バッチサイズ  $S$  を固定したもので、N. Bailey によっ

† 1969年7月17日受理。

\* 日本電信電話公社 電気通信研究所。

て研究されている [1] [3]. このモデルでは, 処理開始時点の待ち呼数が  $S$  以上であれば, 待ち呼をことごとく処理する. これは, 船やバスなどに例がみられ, 集団処理待ち行列の 1 つの基本的タイプ<sup>1)</sup> である. しかし, バッチサイズが固定という条件は次第にゆるめられ, 以下の拡張モデルが考えられている. 1 つは, バッチサイズを確率変数とする方向で, 他は系の状態に依存する関数とする方向である. 前者では, バッチサイズが系の状態とは無関係に, ある特定の確率分布にしたがうとする [5] [14]. この例はバスの途中駅やエレベータの途中階における乗車の状態に見られる. また, 後者では, バッチサイズが待ち呼数など, 系の状態に依存するとするが, その変動は確率的でない. この例は, 処理側が系の輻輳状態に応じて処理能力を制御する場合に見られる. 後者は, 次の考え方に立つ. 一般に, 処理を受ける側はなるべく待ち時間を少なく, 処理を与える側はできるだけ手空き時間を少なくすることが望ましい. しかし, 両者は互いに相反するので, この折衷として, 処理能力を待ち呼数に応じて変えるのである. 処理能力を変えるには, 各回のサービス時間を変えるか, 1 回の処理呼数を変えるかが考えられる. しかし, いずれの場合も “処理が系の状態に依存して変わる” (State dependent) モデルとなり, 解析はかなり困難となる. 事実, この方面の研究は比較的少ないが, 集団処理モデルに関しては, 処理時間が待ち呼数によって変化する場合 [15], バッチサイズが待ち呼数により 1 単位増加する場合 [14], 階段関数的に  $S$  個まで変化する場合 [12] などが報告されている.

この報告では, 周期ごとにバッチサイズが待ち呼数に関係して確率的に変化する場合の集団処理待ち行列モデルを解析 [10] する.

2. では待ち行列の観点からモデルの設定をおこない, 3. では待ち呼数の解析を, 4. では待ち周期数<sup>2)</sup> の導出をおこなう. また, 5. では簡単な例題について数値計算の結果を与える. なお, 付録ではこの解析の特殊な場合として, 従来の解析結果が導かれることを示す. また, 母関数の分母の零点に関する考察, 平均系内呼数の計算過程など, 本文中の記述に対する補足をおこなう.

## 2. 待ち行列モデル

ここでは, 問題を待ち行列モデルとして具体的に規定し, 3. 以下の解析に備える.

時間軸上に一定間隔でタイム・マークをつけ, この間隔を周期と呼んで時間の単位にとる. また, タイム・マークを周期時点と呼ぶ.

呼の到着は, パラメータ  $\lambda$  のポアソン過程とし, 1 周期内に  $n$  個到着する確率  $p_n$  を,

$$(2.1) \quad p_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$$

とする. 待ち行列は到着順に作られ, 処理は先頭からバッチでなされる. このモデルを, ランダム到着・順番処理と呼ぶ. これに対し, 周期時点直前に集団到着し, 集団内ではランダムに, 集団間では到着順に順序のつけられたモデルを, 集団到着・ランダム順処理と名づける. すると,

---

1) 他のタイプは, 各回つねに  $S$  個処理するとし, 待ち呼数が  $S$  個以下のときは,  $S$  個になるまで処理を延期するタイプである [4]. 工場における集中処理作業などにその例がみられる.

2) 待ち周期数については 4. に説明される.

周期時点の待ち呼数分布、および待ち周期数分布は、いずれのモデルでも同じである。よって、以下の解析は集団到着・ランダム順処理にも適用される。

処理は周期時点から始められ、どの呼も1周期で終了する。1回に処理される呼数は、その時のバッチサイズにより異なる。周期時点直前の待ち呼数を確率変数 $Q$ 、その実現値が $q$ のときのバッチサイズを $S(q)$ と表わす。ただし、 $S(q)$ は一般に確率変数で、 $S(q)=i$  ( $i=0,1,\dots,S$ )となる確率は $b_i(q)$ で与えられるものとする。 $b_i(q)$ は $q$ によって定まる任意の確率でよいが、固定の $N$ に対して $b_i(q)=b_i(N)$ 、 $q \geq N$ が成立すると仮定する。これは、待ち呼数 $Q$ が $N$ より大きくなると、バッチサイズが一定の確率法則で定められることを意味する。 $N$ は任意にとることができる(ただし、 $S$ に対しては、 $N > S$ とするのが自然であろう)から、この仮定はモデルの一般性を失わせるものではない。また、バッチサイズを待ち呼数より大きくするのは無意味であるから、 $Q < S$ のときは、0から $Q$ までの間で変わるものとする。これらを式で表示すれば、

$$(2.2.1) \quad \text{Prob. } \{S(q)=i\} = \begin{cases} b_0(0)=1, & i=0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \quad q=0$$

$$(2.2.2) \quad \text{Prob. } \{S(q)=i\} = \begin{cases} b_i(q), & 0 \leq i \leq q, \\ 0, & q < i, \end{cases} \quad 1 \leq q \leq S$$

$$(2.2.3) \quad \text{Prob. } \{S(q)=i\} = \begin{cases} b_i(q), & 0 \leq i \leq S, \\ 0, & S < i, \end{cases} \quad S \leq q \leq N$$

$$(2.2.4) \quad \text{Prob. } \{S(q)=i\} = \begin{cases} b_i(q)=b_i(N), & 0 \leq i \leq S \\ 0, & S < i \end{cases} \quad N \leq q$$

となる。ただし、確率分布 $b_i(q)$ には2次までのモーメントが存在するものとする。

### 3. 待ち呼数の解析

系に統計的平衡状態があると仮定して、周期時点における待ち呼数分布を求める。記号をつぎのように定義する。

$\pi_q$ : 周期時点直前に $q$ 呼待っている確率

$\Pi(z)$ :  $\pi_q$ の母関数で

$$(3.1) \quad \Pi(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \pi_q z^q$$

$p_n$ : 1周期内に $n$ 呼到着する確率で、式(2.1)で与えられる。

$K(z)$ :  $p_n$ の母関数で

$$(3.2) \quad K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = e^{-\lambda(1-K)}$$

$b_i(q)$ :  $q$ 呼待っているとき、バッチサイズが $i$ となる確率で、式(2.2.1)~(2.2.4)の条件をみたす。

相続く2つの周期時点直前における待ち呼数の推移を考察すると、

$$\Pi(z) = \left[ \sum_{q=0}^S \pi_q \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{q-i} \right] K(z) + \left\{ \sum_{q=S+1}^N \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(q) z^{q-i} \right\} K(z)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{q=N+1}^{\infty} \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{q-i} \right] K(z) \\
= & K(z) \left[ \sum_{q=0}^S \pi_q \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{q-i} + \sum_{q=S+1}^N \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(q) z^{q-i} \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{-i} \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} \pi_q z^q - \sum_{q=0}^N \pi_q z^q \right\} \right] \\
= & K(z) \left[ z^{-S} \left\{ \sum_{q=0}^S \pi_q \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{S+q-i} - \sum_{q=0}^S \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S+q-i} \right\} \right. \\
& + z^{-S} \left\{ \sum_{q=S+1}^N \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(q) z^{S+q-i} - \sum_{q=S+1}^N \pi_q \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S+q-1} \right\} \\
& \left. + z^{-S} \left\{ \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S-i} \Pi(z) \right\} \right]
\end{aligned}$$

が導かれる。両辺に  $z^S/K(z)$  をかけて整理すると

$$(3.3) \quad \Pi(z) = \frac{\sum_{q=0}^S \pi_q \left\{ \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{S+q-i} - \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S+q-i} \right\} + \sum_{q=S+1}^N \pi_q \sum_{i=0}^S \{b_i(q) - b_i(N)\} z^{S+q-i}}{z^S/K(z) - \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S-i}}$$

が得られる。ここで、

$$(3.4) \quad B(k, q; z) = \sum_{i=0}^k b_i(q) z^{S-i}$$

とすれば、式 (3.3) は

$$(3.5) \quad \Pi(z) = \frac{\sum_{q=0}^{N-1} \pi_q z^q [B(q, q; z) - B(S, N; z)]}{z^S/K(z) - B(S, N; z)}$$

とかかれ、待ち呼数に対する母関数が未知確率  $\pi_q (q=0, 1, \dots, N-1)$  を含んで求められた。

なお、このモデルは N. Bailey のモデル、N. Jaiswal のモデル、およびさきに筆者らによって解析されたモデル（待ち呼数によりバッチサイズが階段関数的に変化する）などを含む極めて一般的なモデルに対する母関数である。

事実、各モデルにしたがって、バッチサイズの確率  $b_i(q)$  に条件を加えると、それぞれに対応する母関数が導かれ、既出の結果と一致する（付録 1 参照）。

式 (3.3) 中には  $N$  個の未知確率  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$  が含まれているから、これを求める。まず、式 (3.3) の分母にルージュの定理を適用すると、 $z$  の単位円内に  $(S-1)$  個の零点を持つ。<sup>3)</sup> これを  $z_1, z_2, \dots, z_{S-1}$  と表わす。一方、分子は  $z$  の  $(N-1)$  次式であるから、 $(N-1)$  個の零点を持つが、その中の  $(S-1)$  個は同じ単位円内で分母と零点と一致しなければならない。したがって、

$$(3.6) \quad \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q z^q \left[ \sum_{i=0}^q b_i(q) z_j^{S-i} - \sum_{i=0}^S b_i(N) z_j^{S-i} \right] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, S-1)$$

が成立する。また、母関数の性質から

3) 付録 2 参照。  $b_i(N) \neq 0$  ならば  $(S-1)$  個の零点は重ならない。

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Pi(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sum_{q=0}^{N-1} \pi_q z^q \left[ \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{S-i} - \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S-i} \right]}{z^S / K(z) - \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S-i}} \\ &= \frac{\sum_{q=0}^{N-1} \pi_q [\bar{b}(N) - \bar{b}(q)]}{\bar{b}(N) - \lambda} = 1 \end{aligned}$$

となる。ただし、待ち呼数  $n$  のときの平均バッチサイズを  $\bar{b}(n)$  と表わし、

$$(3.8) \quad \bar{b}(m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m i b_i(m), & 0 \leq m < N \\ \sum_{i=0}^S i b_i(N), & m \geq N \end{cases}$$

なることを用いた ( $i > S$  に対して,  $b_i(n) = 0$  であり,  $n \geq N$  ならば,  $n > S$  である). 式 (3.7) はさらに、

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \lambda &= \bar{b}(N) - \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q \bar{b}(N) + \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q \bar{b}(q) \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q \bar{b}(q) + \bar{b}(N) \sum_{q=N}^{\infty} \pi_q \end{aligned}$$

と書きなおされる。これは 1 周期の処理呼数が平均到着呼数に等しいことを意味し、統計的平衡状態のもとでは当然である。式 (3.6) と (3.9) で与えられる  $S$  個の 1 次式は互いに独立であるが、一般に

$$N > S$$

であるから、未知確率を求めるには不十分である。

いま、 $\pi_q$  に対し  $q=0$  から  $q=N-S-1$  までの  $(N-S)$  個の方程式を作ると、

$$(3.10) \quad \pi_q = \sum_{q'=0}^q \sum_{i=0}^{q'} \pi_{q'} b_i(q') p_{q-(q'-i)} + \sum_{q'=q+1}^{q+S} \sum_{i=q'-q}^{q'} \pi_{q'} b_i(q') p_{q-(q'-i)} \quad q=0, 1, \dots, N-S-1$$

となり、 $N$  個の未知確率  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$  が含まれる。式 (3.10) は式 (3.6) および式 (3.9) と 1 次独立であるから、これら  $N$  個の方程式から Cramer の方法で  $N$  個の未知確率が決定される。よって、解を式 (3.3) に代入すれば、母関数  $\Pi(z)$  は完全に決定される。

母関数  $\Pi(z)$  が得られると、それから以下の諸量が計算される。まず、周期時点直前における平均待ち呼数  $m_1$  は

$$(3.11) \quad \begin{aligned} m_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d\Pi(z)}{dz} \\ &= \frac{1}{2\{\bar{b}(N) - \lambda\}^2} \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q [\{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} \{2q\bar{b}(N) - \lambda(2q-1) - \lambda^2 + b^{(2)}(N)\} \\ &\quad - \{\bar{b}(N) - \lambda\} \{b^{(2)}(N) - b^{(2)}(q)\}] \end{aligned}$$

である。ただし、 $\bar{b}(n)$  は待ち呼数  $n$  のときのバッチサイズの平均値 (式 (3.8)) で、 $b^{(2)}(n)$  はつぎの 2 次モーメント

$$(3.12) \quad b^{(2)}(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n i^2 b_i(n), & 0 \leq n \leq N \\ \sum_{i=0}^S i^2 b_i(N), & n > N \end{cases}$$

を表わしている（計算過程は付録3参照）。

つぎに、周期時点直後の待ち呼数が  $n$  である確率を  $\varphi_n$  とすれば、母関数および平均値はそれぞれ

$$(3.13) \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n = \Pi(z)/K(z)$$

$$(3.14) \quad l_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d\Phi(z)}{dz} = m_1 - \lambda$$

で求められる。また、平均待ち周期数を  $w^{(1)}$  とすれば、 $l_1$  を用いて

$$(3.15) \quad w^{(1)} = l_1 / \lambda$$

と与えられる [6] [7]。これは統計的平衡状態のもとでは、総待ち周期数（系内の呼に対する待ち周期数の総和）の1周期内における総減少量の平均は、この間に到着した呼の総待ち周期数の平均に等しいことから得られる。

#### 4. 待ち周期数の解析

待ち周期数とは、呼が到着してから処理を受けるまでに何周期処理を待つかという待ち回数を意味する。

待ち周期数は、呼の到着時における状態と、その後の処理状況によって定まる。前者は周期時点における待ち呼数分布から容易に導かれるので、まず後者について考察する。

##### 4.1 到着時点における系の状態

1つの呼の到着に着目し、同じ周期内の到着呼数を考える。着目した呼より前に到着した呼数を  $m$ 、後に到着した呼数を  $n$ （着目した呼を含む）として、その確率を  $\alpha(m, n)$  で表わす。呼はパラメータ  $\lambda$  のポアソン過程で到着するから、 $\alpha(m, n)$  は

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \alpha(m, n) &= \int_0^1 \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m \{\lambda(1-t)\}^n}{m! n!} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{m+n}}{m! n!} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{m+n}}{(m+n+1)!} = \frac{1}{\lambda} p_{n+m+1} \end{aligned}$$

と計算される。 $\alpha(m, n)$  は、特殊なランダム順周期処理モデルにおいて、任意の呼が同時に到着した他の呼に対し、前に  $m$  呼、後に（その呼も含めて） $n$  呼の割で順序づけられる確率と一致する。<sup>4)</sup>

つぎに、任意の呼の到着直後の周期時点直前に、前に  $m_0$  呼（前周期からの待ち呼数および同周期にその呼より前に到着した呼を合せて）、後に  $n_0$  呼（その呼も含めて）並んでいる確率を  $\theta_0(m_0, n_0)$  とすれば、 $\theta_0(m_0, n_0)$  は

$$(4.3) \quad \theta_0(m_0, n_0) = \sum_{i=0}^{m_0} \varphi_{m_0-i} \cdot \alpha(i, n_0) = \sum_{i=n_0}^{n_0+m_0} \varphi_{m_0+n_0-i} \cdot p_{i+1} / \lambda$$

4) 2.の説明参照。

$$= \left[ \pi_{m_0+n_0+1} - \sum_{i=0}^{n_0} \varphi_{m_0+n_0+1-i} p_i \right] / \lambda$$

と与えられる。ただし、 $\{\pi_n\}, \{\varphi_n\}$  は周期時点直前、直後における待ち呼数の分布で、すでに3. で得られている。

いま、任意の呼が  $k$  周期待って、 $(k+1)$  周期目に処理される確率を  $w_k$  とする。到着直後の周期を第1番目とし、その後、第  $(r+1)$  番目 ( $r=0, 1, \dots, k$ ) の周期開始直前に、着目している呼の前後に並んでいる呼数をそれぞれ、 $m_r, n_r$  とする。また、 $r$  周期待つという条件のもとで、 $(r+1)$  周期時点の直前に着目している呼の前後に  $m_r, n_r$  呼が並んでいる確率を  $\theta_r((m_r, n_r))$  とする。任意の呼が到着直後の周期に処理されるのは、

- (i)  $m_0$  が  $0, 1, \dots, S-1$  のいずれかで、
- (ii) 第1周期目のバッチサイズが  $m_0+1, m_0+2, \dots, S$

の場合に限られる。よって、 $w_0$  は

$$(4.4) \quad w_0 = \sum_{n_0=1}^{\infty} \sum_{m_0=0}^{S-1} \sum_{j=m_0+1}^S \theta_0(m_0, n_0) b_j(m_0+n_0)$$

と表示される。同様にして、第2周期目に処理されるのは、

- (i)  $m_1$  が  $0, 1, \dots, S-1$  のいずれかで、 $m_0$  がその  $m_1$  に対し、 $m_1, m_1+1, \dots, m_1+S$  となっており、
- (ii) 2周期目のバッチサイズが  $m_1+1, m_1+2, \dots, S$  で、かつ1周期目のバッチサイズが  $m_0-m_1$

の場合に限られる。したがって

$$(4.5) \quad \theta_1(m_1, n_1) = \sum_{n_0=1}^{n_1} \sum_{m_0=m_1}^{m_1+S} \theta_0(m_0, n_0) b_{m_0-m_1}(m_0+n_0) p_{n_1-n_0}$$

となり、 $w_1$  は

$$(4.6) \quad w_1 = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{S-1} \sum_{j=m_1+1}^S \theta_1(m_1, n_1) b_j(m_1, n_1)$$

と導かれる。一般に、 $\theta_k(m_k, n_k)$  は漸化式の形で、

$$(4.7) \quad \theta_k(m_k, n_k) = \sum_{n_{k-1}=1}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{m_k+S} \theta_{k-1}(m_{k-1}, n_{k-1}) b_{m_{k-1}-m_k}(m_{k-1}+n_{k-1}) p_{n_k-n_{k-1}}$$

とかかれるから、

$$(4.8) \quad \theta_k(m_k, n_k) = \sum_{n_{k-i}, m_{k-i}} \{ \theta_0(m_0, n_0) \prod_{j=1}^k b_{m_{j-1}-m_j}(m_{j-1}+n_{j-1}) p_{n_j-n_{j-1}} \} \quad k \geq 1$$

となる。ただし、

$$(4.9) \quad \sum_{n_{k-1}=1}^{n_k} \sum_{m_{k-2}=1}^{n_{k-1}} \dots \sum_{n_0=1}^{n_1} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{m_k+S} \sum_{m_{k-2}=m_{k-1}}^{m_{k-1}+S} \dots \sum_{m_0=m_1}^{m_1+S} = \sum_{n_{k-i}, m_{k-i}}$$

と略記した。よって、 $w_k$  は  $\theta_k(m_k, n_k)$  を用いて

$$(4.10) \quad w_k = \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{m_k=0}^{S-1} \sum_{j=m_k+1}^S \theta_k(m_k, n_k) b_j(m_k+n_k) \quad k \geq 1$$

と求められる。かくして、 $k$  を与えれば式 (4.3), (4.8) から  $\theta_k(m_k, n_k)$  が計算され、 $w_k$  も求

められる。ただし、 $S$  および  $k$  が大きくなると、具体的に計算するにはかなり煩雑になるので、電子計算機の援けが必要となろう。

待ち周期数分布を評価するには、上下限で範囲を押えることが考えられる。このため、確率分布の大小関係を次のように定義する。

いま、2つの離散的確率の系列：

$$(4.11) \quad \{p_1\} = \{p_{11}, p_{12}, \dots\}, \quad \text{ただし} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{1i} = 1$$

$$(4.12) \quad \{p_2\} = \{p_{21}, p_{22}, \dots\}, \quad \text{ただし} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{2i} = 1$$

があるとし、これを

$$(4.13) \quad \{q_1\} = \{q_{11}, q_{12}, \dots\}, \quad \text{ただし} \quad q_{1i} = \sum_{j=i+1}^{\infty} p_{1j}$$

$$(4.14) \quad \{q_2\} = \{q_{21}, q_{22}, \dots\}, \quad \text{ただし} \quad q_{2i} = \sum_{j=i+1}^{\infty} p_{2j}$$

に変換する。このとき、すべての  $i$  に対して

$$(4.15) \quad q_{1i} \leq q_{2i}$$

が成立すれば、系列  $\{p_1\}$  は系列  $\{p_2\}$  より小さいと呼び、

$$(4.16) \quad \{p_1\} \leq \{p_2\}$$

と表わす [2]。これは、2つの系列  $\{q_1\}$ ,  $\{q_2\}$  が図 4.1 の関係にあることを指し、いかなる  $i$  に対しても  $i$  以上の出現確率が同一の大小関係になる。そして、この大小関係が成立するとき、これらの確率母関数、 $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  に対しても同じ大小関係を定義し、

$$(4.17) \quad P_1(z) \leq P_2(z)$$

と表示する。よって、他にもう1つの系列  $\{p_0\} = \{p_{01}, p_{02}, \dots\}$  があって、

$$(4.18) \quad P_1(z) \leq P_0(z) \leq P_2(z)$$

の関係が導かれれば、系列  $\{p_0\} = \{p_{01}, p_{02}, \dots\}$  は、うえに定義した大小関係の意味で、系列  $\{p_1\}$ ,  $\{p_2\}$  の間におさめられる。<sup>5)</sup>

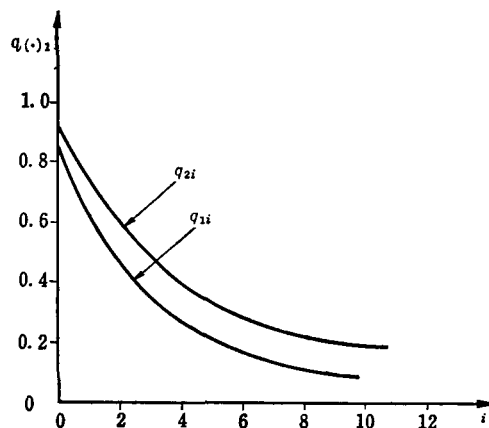


図 4.1 系列  $\{q_1\}$ ,  $\{q_2\}$  の比較

5) 当然のことではあるが、個々の確率  $p_{0i}$  に対しては何の大小関係も保証されない。



以上の準備にもとづいて、待ち周期数の確率分布  $\{w_k\}$  を適当な範囲におさめることを考える。いま、1つの周期内に到着した呼同士を比較すると、最初に到着した呼は他の呼よりも早い周期内で、最後に到着した呼は遅い周期内で処理されるチャンスを持つ。よって到着時点を含む周期が待ち周期数に含まれないことに注意すれば、任意の呼の待ち周期数は、同周期内に到着した最初の呼と最後の呼の待ち周期数の間に入る。

まず、周期の最初に到着した呼に着目し、同周期に到着した他の呼より最も早く処理される場合を考えると、それは着目している呼が処理されるバッチの中で最も遅く到着した呼となっている場合である。このときの待ち周期数分布を  $\{u_k\}$ 、母関数を  $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$  とすれば、 $u(z)$  は所要の母関数  $w(z)$  に対し、式 (4.18) の不等式の意味で

$$u(z) \leq w(z)$$

となる。 $u(z)$  は以下のように求められる。いま、着目している呼の処理開始直後の待ち呼を見ると、それは、その呼より後に到着したすべての呼に一致する。よって、着目した呼の待ち周期数が  $k$  であれば、待ち呼数は  $(k+1)$  周期内に到着した呼数から1を減じたものでなければならない。周期時点直後の待ち呼数の母関数は  $\Phi(x)$  (式 (3.13) および式 (3.3) 参照) であるから、その周期に何個かの (0 でない) 呼が処理されているという条件のもとでの待ち呼数の母関数は

$$(4.19) \quad \frac{\Phi(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i) x^i}{1 - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i)}$$

である。よって、 $(k+1)$  周期内の到着呼数に対する母関数は

$$(4.20) \quad x \frac{\Phi(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i) x^i}{1 - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i)}$$

となる。一方、 $i$  周期内に到着する呼数の母関数は  $K(x) = e^{-\lambda(1-x)}$  (式 (3.2) 参照) であるから、 $n$  呼の到着に要する周期数の母関数は  $\{K^{-1}(z)\}^n$ 、すなわち、

$$(4.21) \quad \{1 + (1/\lambda) \log z\}^n$$

である。よって、到着呼数の母関数が式 (4.20) で与えられるとき、それらの呼の到着に要する周期数の母関数  $u(z)$  は

$$(4.22) \quad u(z) = \{1 - (1/\lambda) \log z\} [\Phi(1 + (1/\lambda) \log z) - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i) (1 + (1/\lambda) \log z)^i] / (1 - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i b_0(i))$$

となる。

つぎに、周期の最後に到着した呼に着目し、同周期に到着した他の呼より最も遅く処理される場合を考えると、それは、その呼が処理されるバッチ中で最も早く到着した呼となっている場合である。このときの待ち周期数分布を  $\{v_k\}$ 、母関数を  $v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$  とすれば、式 (4.18) の不等式の意味で、

$$w(z) \leq v(z)$$

となる。  $v(z)$  はつぎのように評価される。着目している呼は、それが処理されるバッチの中で最も早い到着呼であるから、待ち呼の先頭になっている状態が必ず存在する。ただし、バッチサイズは 0 のこともあるから、先頭になっているからといって、次の周期に必ず処理されるとは限らない。そこで、処理開始直前時点の中で、着目している呼が先頭になっている最も古い時点を考え、そこでの待ち呼数が  $j$  であったとする。もし、その時点のバッチサイズが正であれば、着目している呼の待ち周期数に対する母関数は、  $u(z)$  の解析と同様にして

$$(4.23) \quad \{1 + (1/\lambda) \log z\}^{-1} \pi_j \{1 + (1/\lambda) \log z\}^j / (1 - \pi_0)$$

である。さて、バッチサイズが正の確率は  $(1 - b_0(j))$  である。よって、ある周期のバッチサイズが 0 で、次の周期のバッチサイズが正とすれば、待ち周期数は 1 周期のび、その確率は

$$(4.24) \quad b_0(j) \sum_{r_1=0}^{\infty} p_{r_1} (1 - b^0(j + r_1))$$

となる。ただし、  $r_1$  は延びた 1 周期内に到着した呼数とした。同様にして 2 周期、3 周期と 0 のバッチサイズがつづくことを考えれば、待ち周期数の母関数は式 (4.14) に

$$(4.25) \quad (1 - b_0(j)) + b_0(j) z \sum_{r_1=0}^{\infty} p_{r_1} (1 - b_0(j + r_1)) \\ + b_0(j) z^2 \sum_{r_1=0}^{\infty} p_{r_1} b_0(j + r_1) \sum_{r_2=0}^{\infty} p_{r_2} \{1 - b_0(j + r_1 + r_2)\} + \dots$$

をかけたものとなる。

いま、式 (2.2.1) ~ (2.2.4) で定義された  $b_i(j)$ 、  $i=0, 1, \dots, S$ 、  $j=0, 1, \dots$ 、において、

$$(4.26) \quad 1 = b_0(0) \geq b_0(1) \geq b_0(2) \geq \dots \geq b_0(N) = b_0(N+i) \quad i=1, 2, \dots$$

が満足されるものとすれば（待ち呼数が多くなるにつれて、バッチサイズ 0 の確率が小さくなるのは自然である）、

$$(4.27) \quad (1 - b_0(j)) + b_0(j) z \sum_{r_1=0}^{\infty} p_{r_1} (1 - b_0(j + r_1)) \\ + b_0(j) z^2 \sum_{r_1=0}^{\infty} p_{r_1} b_0(j + r_1) \sum_{r_2=0}^{\infty} p_{r_2} \{1 - b_0(j + r_1 + r_2)\} + \dots \\ \geq (1 - b_0(j)) + b_0(N) z \{1 - b_0(j)\} + b_0(N)^2 z^2 \{1 - b_0(j)\} + \dots \\ = (1 - b_0(j)) / (1 - b_0(N) z)$$

となり、式 (4.23) と組合せて

$$(4.28) \quad v(z) \leq \{1 + (1/\lambda) \log z\}^{-1} (1 - \pi_0)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \{1 + (1/\lambda) \log z\}^j \frac{1 - b_0(j)}{1 - b_0(N) z} \\ = \{1 + (1/\lambda) \log z\}^{-1} (1 - \pi_0)^{-1} (1 + b_0(N) z)^{-1} \times [\Pi(1 + (1/\lambda) \log^2 z) \\ - \pi_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \{1 + (1/\lambda) \log z\}^j b_0(j)]$$

をうる。ただし、  $\Pi(x)$  は周期時点直前の待ち呼数の母関数である。

待ち周期数  $w_k$  の確率母関数  $w(z)$  は、2 つの母関数  $u(z)$ 、  $v(z)$  に対し、式 (4.18) の不等式の意味で

$$(4.29) \quad u(z) \leq w(z) \leq v(z)$$

を満足するから、式 (4.22)、(4.28) を用いれば、  $w(z)$  はこれらの範囲内におさまられた。

## 5. 計 算 例

簡単な例題について実際の計算をおこない、バッチサイズが待ち呼数によって確率的に変動する場合、系がどのような様相を呈するかを示す。

対象とするモデルを具体的に規定するため、3., 4. で定義した記号に特定の数値、および関数型をつぎのように与える。

(i) バッチサイズの最大値  $S$  は、

$$(5.1) \quad S=2$$

とする。すなわち、すべての  $q$  に対し、

$$(5.2) \quad b_i(q)=0, \quad i \geq 3$$

(ii) 確率  $b_i(q)$  は、 $q=0$  に対し

$$(5.3) \quad b_0(0)=1, \quad b_i(0)=0, \quad i=1, 2, \dots$$

$q=1, 2, \dots, 5$  に対し、

$$(5.4) \quad b_0(q)=0, \quad b_1(q)=1 - \frac{(q-1)(1-\alpha)}{4}, \quad b_2(q)=1 - b_1(q),$$

$q \geq 6$  に対し、

$$(5.5) \quad b_0(q)=0, \quad b_1(q)=b_1(5)=\alpha, \quad b_2(q)=1 - b_1(q)=1 - \alpha$$

とする (図 5.1 参照)。ただし  $\alpha$  は、待ち呼数が 5 以上のとき、バッチサイズが 1 となる確率で、 $q$  に無関係な定数である。

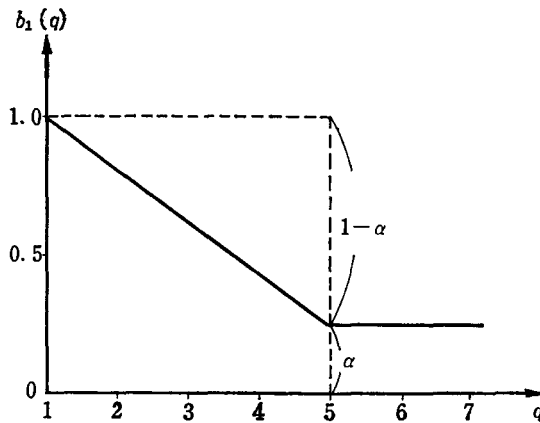


図 5.1 バッチサイズが待ち呼数に応じて変わる確率の例

かくして、このモデルではバッチサイズがつねに 1 か 2 のいずれかで、その確率は処理開始時の待ち呼数により式 (5.3)~(5.5) のように変化する。

よって、定数  $\alpha$  と呼の到着パラメータ  $\lambda$  に種々の値を与えれば、それぞれの場合の平均系内呼数、および平均待ち周期数が

$$(5.6) \quad m_1 = \frac{1}{2\{\bar{b}(5) - \lambda\}} \sum_{q=0}^4 \pi_q [\{\bar{b}(5) - \bar{b}(q)\} \{2q\bar{b}(5) - \lambda(2q-1) - \lambda^2 + b^{(2)}(5)\}]$$

$$- \{ \bar{b}(5) - \lambda \} \{ b^{(2)}(5) - b^{(2)}(q) \}$$

$$(5.7) \quad w^{(1)} = \frac{m_1 - \lambda}{\lambda}$$

から求められる。ただし、 $\bar{b}(q)$ ,  $b^{(2)}(q)$  は

$$(5.8) \quad \bar{b}(q) = \sum_{i=1}^2 i b_i(q) = b_1(q) + 2\{1 - b_1(q)\} = 2 - b_1(q),$$

$$(5.9) \quad b^{(2)}(q) = \sum_{i=1}^2 i^2 b_i(q) = b_1(q) + 4\{1 - b_1(q)\} = 4 - 3b_1(q), \quad q=0, 1, 2, \dots, 5$$

で、式 (5.3)~(5.5) を代入して計算される。また、確率  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_4$  は連立方程式

$$(5.10) \quad \sum_{q=0}^4 \pi_q z_1^q \left[ \sum_{i=0}^q b_i(q) z_1^{2-i} - \sum_{i=0}^2 b_i(5) z_1^{2-i} \right] = 0$$

$$(5.11) \quad \sum_{q=0}^4 \pi_q [\bar{b}(q) - \bar{b}(5)] = \lambda - \bar{b}(5)$$

$$(5.12) \quad \pi_q = \sum_{q'=0}^q \sum_{i=0}^{q'} \pi_{q'} b_i(q') p_{q-(q'-i)} + \sum_{q'=q+1}^{q+2} \sum_{i=q'-q}^{q'} \pi_{q'} b_i(q') p_{q-(q'-i)}$$

の解として得られる。ただし、 $z_1$  は系内呼数の母関数の分母 (式 (3.3) 参照)

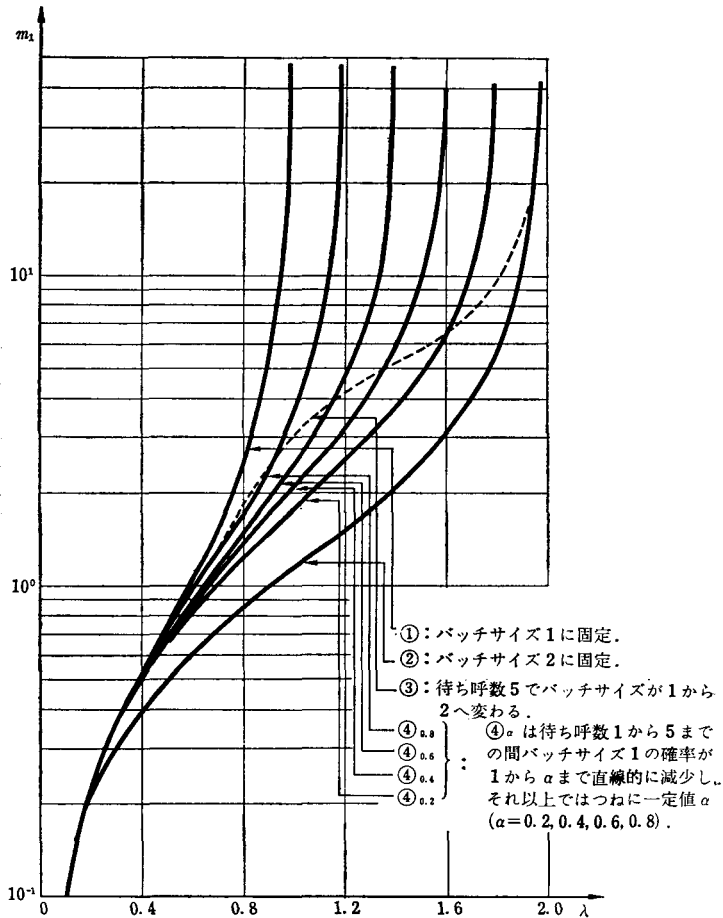


図 5.2 平均待ち呼数の比較

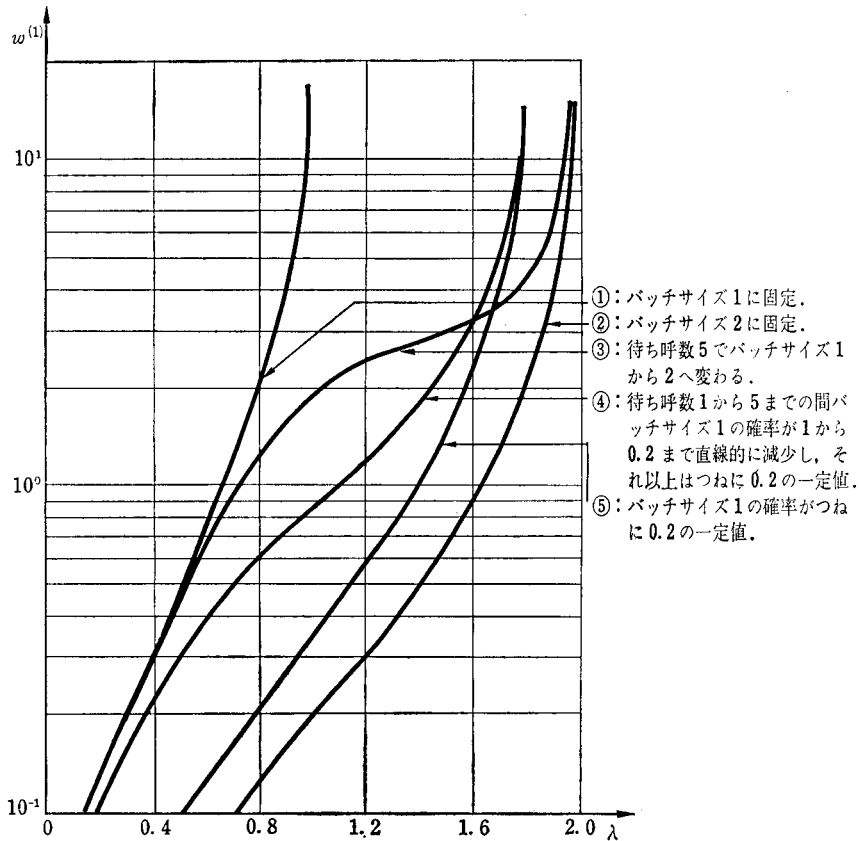


図 5.3 平均待ち周期数の比較

$$(5.13) \quad z^2 e^{z(1-z)} - \{b_1(5)z + b_2(5)\}$$

の単位円内における零点を表わす。また  $p_n$  は式 (2.1) で与えた通り

$$p_n = \begin{cases} e^{-\lambda} \lambda^n / n! & n=0, 1, 2, \dots \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

である。計算結果は、それぞれ図 5.2, 図 5.3 のように示される。

図 5.2 では、バッチサイズが待ち呼数に応じて変化する場合の平均待ち呼数が、 $\alpha$  をパラメータとして表わされている (曲線 ④<sub>0.2</sub> ~ ④<sub>0.8</sub>)。バッチサイズが  $S=1$ , または  $S=2$  と固定された通常モデル (曲線 ① および ②) と対比して、その違いが数値的にみられよう。また、同条件でバッチサイズの変化が確率的でなく、待ち呼数に応じて段階的に増加する場合の平均待ち呼数 (曲線 ③) も示されており、両モデルの相違の様相がみられる。図 5.3 では、 $\alpha=0.2$  の場合の平均待ち周期数 (曲線 ④) が示されている。比較としてバッチサイズがそれぞれ  $S=1, S=2$  と固定された場合 (曲線 ①, ②), バッチサイズが段階的な場合 (曲線 ③), およびバッチサイズが待ち呼数とは無関係に確率的に変動する場合 (曲線 ⑤, ここでは待ち呼数に無関係に  $\alpha=b_1(5)=0.2$  の確率で  $S=1$ ) も示されている。各モデルの特徴が容易にみられるので、モデルの適用に対して手がかりが得られよう。

## 6. あとがき

集団処理待ち行列モデルにおいて、バッチサイズが待ち呼数に関連して確率的に変化する場合を解析し、系内呼数の母関数、待ち周期数分布の漸化式およびそれぞれの平均値を求めた。また、待ち周期数分布に関しては、この漸化式による計算が煩雑なため、上下限を求める方法も示した。この結果、既に解析されている集団処理モデルは、バッチサイズの条件にかんしてより一般化されたと思われる。

このモデルは、電子交換機制御系トラヒック問題から提起されたもので、今回の解析により、共通制御系のトラヒック設計に若干の寄与をすることができた。しかし、クロック内蔵の電子的情報処理系には各種のトラヒック問題が内在するため、今後のより一層の研究が望まれる。

最後に、この研究に対し種々御指導頂いた電気通信研究所旧第7研究室雁部室長、中村調査役、および数値計算に御協力頂いた同研究室の諸氏に対し深く感謝の意を表します。

### 付録 1 式 (3.5) の母関数 $\Pi(z)$ から既知モデルの母関数を導出するための計算

(i) N. Jaiswal モデルの母関数

N. Jaiswal のモデルでは、バッチサイズは待ち呼数とは無関係に一定の確率分布にしたがって変動する。よって  $b_i(q)$  は  $i$  だけの関数、 $b_i$  となる。待ち呼数  $q$  がバッチサイズの最大値  $S$  よりも大きい場合と小さい場合に分けて考えると、

$$(A-1-1) \quad B(q, q; z) - B(S, N; z) = \sum_{i=0}^S b_i z^{S-i} - \sum_{i=0}^S b_i z^{S-i} = 0, \quad q > S \text{ のとき}$$

$$B(q, q; z) - B(S, N; z) = \sum_{i=0}^{q-1} b_i z^{S-i} + \sum_{i=q}^S b_i z^{S-q} - \sum_{i=0}^S b_i z^{S-i}, \quad q < S \text{ のとき}$$

とかかれる。よって、式 (3.5) の分子は

$$(A-1-2) \quad \sum_{q=0}^N \pi_q z^q [B(q, q; z) - B(S, N; z)] \\ = \sum_{q=0}^{S-1} \pi_q z^q \left[ \sum_{i=0}^{q-1} b_i z^{S-i} + \sum_{i=q}^S b_i z^{S-q} - \sum_{i=0}^S b_i z^{S-i} \right] \\ = \sum_{q=0}^{S-1} \pi_q \left[ z^S \sum_{i=0}^{S-q} b_{S-i} - z^q \sum_{i=0}^{S-q} b_{S-i} z^i \right] \\ = \sum_{q=0}^{S-1} \pi_q [z^S \Phi_{S-q}(1) - z^q \Phi_{S-q}(z)]$$

と計算される。ただし、

$$(A-1-3) \quad \Phi_i(z) = \sum_{j=0}^i b_{S-j} z^j$$

と表示されている。また、分母は

$$(A-1-4) \quad z^S / K(z) - B(S, N; z) = z^S / K(z) - \Phi_S(z)$$

とかかれる。よって、式 (3.5) は

$$(A-1-5) \quad \Pi(z) = \frac{\sum_{q=0}^{s-1} \pi_q [z^s \Phi_{s-q}(1) - z^q \Phi_{s-q}(z)]}{z^s/K(z) - \Phi_s(z)}$$

となり, Jaiswal [5] によって導かれた母関数と一致する.

(ii) バッチサイズが待ち呼数の関数であるモデルの母関数

さきに筆者らによって報告されたモデル [4] では, バッチサイズが待ち呼数に応じて階段関数的に変化し (確率的でない),  $b_i(q)$  は

$$(A-1-6) \quad b_i(q) = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \quad q=0$$

$$b_i(q) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad N(j-1) < q \leq N(j), \quad j=1, \dots, S-1$$

$$b_i(q) = \begin{cases} 1, & i=S, \\ 0, & i \neq S, \end{cases} \quad N(S-1) < q$$

と与えられている. ただし,  $N(j)$  は  $S$  個の整数で

$$0 = N(0) \leq N(1) \leq N(2) \leq \dots \leq N(S-1) \leq N(S-1) + 1 = N$$

となるように選ばれている. よって

$$(A-1-7) \quad B(S, N; z) = \sum_{i=0}^S b_i(N) z^{S-i} = 1$$

となり, 式 (3.5) の分母は

$$(A-1-8) \quad z^s/K(z) - B(S, N; z) = z^s/K(z) - 1$$

とかかれる. また, 分子は  $B(0, 0; z)$  が

$$B(0, 0; z) = \sum_{i=0}^S b_i(0) z^{S-i} = z^S$$

となることに注意すれば

$$(A-1-9) \quad \sum_{q=0}^N \pi_q z^q [B(q, q; z) - B(S, N; z)]$$

$$= \sum_{i=1}^{S-1} \sum_{j=N(i-1)+1}^{N(i)} \pi_j z^j [B(j, j; z) - 1] + \pi_0 (z^S - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{S-1} \sum_{j=N(i-1)+1}^{N(i)} \pi_j z^{j-i} [z^S - z^i] + \pi_0 (z^S - 1)$$

と計算される. ここで,  $i=n, j=q$  とかきかえれば, 式 (A-1-8), (A-1-9) から母関数は

$$(A-1-10) \quad \Pi(z) = \frac{\sum_{n=1}^{S-1} \sum_{q=N(n-1)+1}^{N(n)} \pi_q z^{q-n} [z^S - z^n] + \pi_0 (z^S - 1)}{z^s/K(z) - 1}$$

とかかれる. これは, さきに筆者らによって求められた結果と一致する.

なお, バッチサイズがつねに一定値  $S$  である Bailey のモデルも, このモデルの特殊な場合に該当し, 系内呼数の母関数は式 (3.3) から導かれる. しかし, すでに上述の 2 つのモデルの特殊な場合として, 例えば式 (A-1-10) から誘導されている [13] ので, ここでは繰り返さない.

## 付録 2 式 (3.3) の分母の零点にかんする考察

(i) 零点が  $z$  の単位円上および円内に  $S$  個存在することの証明

関数  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  を

$$(A-2-1) \quad f_1(z) = \sum_{i=0}^S b_i(z) z^{S-i}$$

$$(A-2-2) \quad f_2(z) = z^S e^{\lambda(1-z)}$$

で定義すると, 式 (3.3) の分母は

$$(A-2-3) \quad F(z) = f_2(z) - f_1(z)$$

とかけられる. ここで,

$$(A-2-4) \quad z = x + iy = r e^{i\theta}$$

とすれば,

$$(A-2-5) \quad |f_1(z)| \leq \sum_{i=0}^S b_i(N) |z^{S-i}| = \sum_{i=0}^S b_i(N) r^{S-i} = f_4(r)$$

$$(A-2-6) \quad |f_2(z)| \leq |r^S e^{S i \theta} e^{\lambda(1-z)} e^{-i i y}| = r^S e^{\lambda(1-x)} \geq r^S e^{\lambda(1-r)} = f_2(r)$$

をうる. よって,  $\delta > 0$  を十分小さい値にとり,  $r = 1 + \delta$  とすると

$$(A-2-7) \quad f_1(1+\delta) = 1 + S\delta - \delta \bar{b}(N) + o(\delta)$$

$$(A-2-8) \quad f_2(1+\delta) = 1 + S\delta - \lambda\delta - o(\delta)$$

となる. したがって

$$(A-2-9) \quad \sum_{i=0}^S i b_i(N) = \bar{b}(N) > \lambda$$

ならば,

$$(A-2-10) \quad f_1(1+\delta) < f_2(1+\delta)$$

となる. よって, 式 (A-2-5), (A-2-6), (A-2-7), (A-2-8) から,

$$(A-2-11) \quad |f_1(z)| \leq f_1(1+\delta) < f_2(1+\delta) \leq |f_2(z)|$$

の関係が成立する.  $\delta$  は十分小さい正数であるから, ルーシェの定理を適用すれば,  $F(z)$  は単位円上および円内に  $f_2(z)$  と同じ個数の零点を持たなければならない.

(ii) 零点が多重である場合の考察

(i) の考察は,  $b_S(N) > 0$  のときに成立する. しかし,  $b_S(N) = 0$  のときは多少様相が異ってくる. 以下にこれを考察する.

$\sum_{i=0}^S b_i(N) = 1$  であるから, 適当な正整数  $k$  をとると,  $b_k(N) > 0$ ,  $b_{k+i}(N) = 0$ ,  $i > 0$  となしうる. この場合, 式 (3.3) の分母, 分子を変型すると,

$$(A-2-12) \quad \text{分母} = z^{S-k} [z^k / K(z) - \sum_{i=0}^k b_i(N) z^{k-i}]$$

$$(A-2-13) \quad \text{分子} = z^{S-k} \left[ \sum_{q=0}^{N-1} z^k \pi_q \left\{ \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{q-i} \right\} - \sum_{q=0}^{N-1} z^q \pi_q \left\{ \sum_{i=0}^k z^{k-i} \right\} \right]$$

となるから, 系内呼数の母関数は

$$(A-2-14) \quad \Pi(z) = \frac{\sum_{q=0}^{N-1} z^k \pi_q \sum_{i=0}^q b_i(q) z^{q-i} \sum_{q=0}^{N-1} z^q \pi_q \sum_{i=0}^k z^{k-i} b_i(N)}{z^k / K(z) - \sum_{i=0}^k b_i(N) z^{k-i}}$$

となる.



さて、(i) の考察によれば、この式の分母には  $z$  の単位円内に  $(k-1)$  個の零点が存在する (残りの 1 個は  $z=1$  である)。一方、分子には  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$  の  $N$  個の未知確率が含まれている。平衡条件の式 (3.7) を含めると、 $\pi_i$  に関する  $k$  個の方程式ができるから、あと  $N-k$  個の関係式が必要である。しかるに、式 (3.10) と同様に平衡状態における  $\pi_q$  の状態方程式を  $q=0$  から  $q=N-k-1$  まで考えると、それらに含まれる未知確率は  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}$  である。よって、この  $N-k$  個の状態方程式を加えると、丁度未知確率をとくに十分な数となる。

### 付録 3 周期直前時点の平均系内呼数の計算 (式 (3.11) の導出)

式 (3.3) より  $\Pi(z)$  を

$$(A-3-1) \quad \Pi(z) = A(z)/B(z)$$

$$(A-3-2) \quad A(z) = z^S/K(z) - \sum_{i=0}^S b_i(N)z^{S-i}$$

$$(A-3-3) \quad B(z) = \sum_{q=0}^N \pi_q z^q \left[ \sum_{i=0}^q b_i(q)z^{S-i} - \sum_{i=0}^S b_i(N)z^{S-i} \right]$$

とすると、

$$(A-3-4) \quad \Pi'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{B''(z)A'(z) - A''(z)B'(z)}{2[A'(z)]^2}$$

$$A'(z) = \frac{S z^{S-1}}{K(z)} - \frac{z^S K'(z)}{K^2(z)} - \sum_{i=0}^S (S-i) b_i(N) z^{S-i-1}$$

$$A''(z) = \frac{S(S-1)z^{S-2}}{K(z)} - 2 \frac{S z^{S-1} K'(z)}{K^2(z)} - \frac{z^S K''(z)}{K^2(z)} + 2 \frac{z^S [K'(z)]^2}{K^3(z)} - \sum_{i=0}^S (S-i)(S-i-1) b_i(N) z^{S-i-2}$$

であるから、

$$(A-3-5) \quad A'(1) = \bar{b}(\lambda) - \lambda$$

$$(A-3-6) \quad A''(1) = \lambda(\lambda - 2S) + \bar{b}(N)(2S-1) - b^{(2)}(N)$$

と計算される。一方、式 (A-3-3) より同様の計算をおこなえば、

$$(A-3-7) \quad B'(1) = \sum_{q=0}^N \pi_q [\bar{b}(N) - \bar{b}(q)]$$

$$(A-3-8) \quad B''(1) = \sum_{q=0}^N \pi_q [(2S+2q-1) \{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} - \{b^{(2)}(N) - b^{(2)}(q)\}]$$

が得られる ( $\bar{b}(\cdot)$ ,  $b^{(2)}(\cdot)$  は本文中に定義されているように、バッチサイズの 1 次および 2 次のモーメントである)。

式 (A-3-5)~(A-3-8) を用いれば、式 (A-3-4) の分子は

$$B''(1)A'(1) - B'(1)A''(1) = \sum_{q=0}^N \pi_q [X+Y]$$

$$(A-3-9) \quad X = \{\bar{b}(N) - \lambda\} (2S+2q-1) \{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} - \{\bar{b} - \lambda\} \{b^{(2)}(N) - b^{(2)}(q)\}$$

$$(A-3-10) \quad Y = \{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} \{\lambda(\lambda - 2S) + \bar{b}(N)(2S-1) - b^{(2)}(N)\}$$

とかかれ、さらに

$$(A-3-11) \quad X-Y = \{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} \{2q\bar{b}(N) - \lambda(2q-1) - \lambda^2 + b^{(2)}(N)\} \\ - \{\bar{b}(N) - \lambda\} \{b^{(2)}(\lambda) - b^{(2)}(q)\}$$

と計算される。よって

$$(A-3-12) \quad \Pi(1) = \frac{1}{2\{\bar{b}(N) - \lambda\}^2} \sum_{q=0}^{N-1} \pi_q [\{\bar{b}(N) - \bar{b}(q)\} \{2q\bar{b}(N) - \lambda(2q-1) \\ - \lambda^2 + b^{(2)}(N)\} - \{b(N) - \lambda\} \{b^{(2)}(N) - b^{(2)}(q)\}]$$

が導かれる。

### 参 考 文 献

- [1] Bailey, N. T. J., "On Queueing Processes with Bulk Service," *J. Roy. Statist. Soc. Ser.*, B 16 (1954), 80-87.
- [2] Daley, D. J., P. A. P. Moran, "Two-Sided Inequalities for Waiting Time and Queue Size Distributions in GI/G/1," *Theory of Prob. and its Appl.*, 8 (1968) 2, 356-359.
- [3] Downton, F., "Waiting Times in Bulk Service Queues," *J. Roy. Statist. Soc. Ser.*, B 17 (1955), 256-261.
- [4] Fabens, A. F., "The Solution of Queueing and Inventory Models by Semi-Markov Processes," *J. Roy. Statist. Soc. Ser.*, B 23 (1961), 113-127.
- [5] Jaiswal, N. K., "A Bulk-Service Queueing Problem with Variable Capacity," *J. Roy. Statist. Soc. Ser.*, B 23 (1961), 143-148.
- [6] Jewell, W. S., "A Simple Proof of  $L = \lambda W$ ," *J. Oper. Res. Soc. Ame.*, 15 (1967) 6, 1109-1116.
- [7] Little, J. D. C., "A Proof for the Queueing Formula  $L = \lambda W$ ," *J. Oper. Res. Soc. Ame.*, 9 (1961), 3, 383-387.
- [8] 村尾 洋, "通話路駆動系における待ち合せの検討," 通研, 経過資料2393号, 1967.
- [9] 村尾 洋, "バッチサイズが待ち呼数に応じし確率的に変化する場合の集団処理待ち行列," 通研, 成果報告4184号, 1968.
- [10] 村尾 洋, "Batch Size が待ち呼数に応じて確率的に変化する Bulk Service Queue の解析," OR 秋季研究発表会アブストラクト集 (1968年11月), 3-4.
- [11] Murari, K., "An Additional Special Channel, Limited Space Queueing Problem with Service in Batches of Variable Size," *J. Oper. Res. Soc. Ame.*, 16 (1968), 1, 83-90.
- [12] 中村義作, 村尾 洋, "ある Bulk Service Queue の待ち分布にたいする記号的解析," 通研, 成果報告3344号, 1967.
- [13] 中村義作, 村尾 洋, "batch size が待ち人数に応じて変化する場合の bulk service queue の解析," 通研, 経過資料2513号, 1967.
- [14] 中村義作, 村尾 洋, "集団処理待ち行列の一解法," 通研, 研究実用化報告 17(1968), 8, 1599-1618.
- [15] Suzuki, T., "A Queueing System with Service Depending on Queue-Length," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 4 (1962) 4, 147-169.