経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第14巻 第1号（1970年7月）

≪特 別 講 演≫

# 信頼性資源の最適配分について†

阿 部 俊 一*

ただいまご紹介いただきました国鉄の阿部でございます．こういう高いところから，特別講演というような，たいへん晴れがましい役目をお引き受けする羽目になりましたことを非常に光栄に存じておりますが，反面，“穴があったら入りたい”ということばがございますようにほんとうにそういう感じを持っているわけでございます．おまえ，もっとしっかりやれ，という意味でこういうことになったのではないかと存じまして，ＯＲ学会並びに大西さんのお名前をけがすことのないように，今後最善を尽くしていきたいと考えております．

掲げました題は，“信頼性資源の最適配分について”ということでございますが，ここで“信頼性資源”というふうに申しましたのは，単に“資源の最適配分”と申しますと，ほとんどＯＲの全領域を含む大きな問題になってしまいますので，“信頼性”ということばをつけて，問題の範囲をかなり限定したつもりでございます．

しかしながら，よく考えてみますと，信頼性に関する資源の最適配分と申しましても，まだまだかなり問題は広うございます．たとえば，システムの設計に関する資源の最適配分，保全に関する資源の最適配分，システムの運用に関する資源の最適配分，それからまた，探索理論，さらには，制御理論，こういうものが何らかの意味において，信頼性資源の最適配分という問題の領域の中に入ってくると思います．

このすべての領域についてお話をするような力は私にございませんし，また，時間の制約もございますので，ここでは，まず“システムの設計ならびに保全に関する問題”につきましてお手元にお配りしました引用文献に従って，ごく概略のところをざっとご紹介申し上げて，そのあと，文献[16]，これはご紹介いただきましたように私自身のものでございますが，これのアウトラインをご紹介したい．なお，もし時間があれば，信頼性資源の最適配分の問題に関する理論を実際に応用していく上での“理論と実際との隔たり”という問題について，私自身が国鉄の中で実際問題の解決を志して研究しておりますので，その立場から若干お話をしてみたいと考えております．

それでは，システムの設計に関する問題に入っていきたいと思います．

---

† 1969年10月29日 秋季研究発表会における講演．

* 日本国有鉄道．



© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

## 1. システムの設計ならびに保全に関する問題

システムの設計あるいは構成に関する問題で特に信頼性の立場から見た理論としては，これはもうどなたもご存じの von Neumann のモデル [30]，それから，Moore & Shannon のモデル [28] がございます．これらはもうほとんど古典といってもいいかと思いますが，評価の確立した，りっぱな文献だと思います．

それから，その次に Bellman のモデル [1]，これも信頼性のほうでは非常に有名でして，いまさら私がここで解説するまでもないことですが，話の都合上述べておきます．図1のように，一般には，$n$ 個のステージからなるシステムがあって，各ステージの要素を並列に重複させるこ

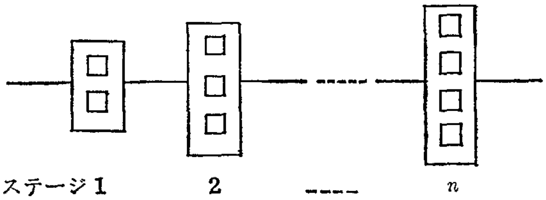


図 1　$n$ ステージ・システムの構成

とによって，つまり，リダンダンシーを持たせることによって，システム全体の信頼性を大きくしていきたい．その場合に，費用の条件とか，あるいは重さの条件とか，そのほかいろいろな条件がつくこともあります．そういう条件のもとで，システムの信頼度を最大にするような，各ステージにおける部品の重複数 $m_i(i=1,\cdots\cdots,n)$ を求めたいという問題で次のように数式化されます．ここに，$p_i$，$c_i$，$w_i$ はそれぞれステージ $i$ の部品の信頼度，費用，重量です．

$$\mathrm{Max}\prod_{i=1}^{n}\{1-(1-p_i)^{m_i}\}\quad（目的式）$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i c_i \leqslant c\ （費用の条件）, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i w_i \leqslant w\ （重さの条件）,\cdots\cdots.\end{cases}$$

これを Bellman が DP を使って解いたことは，いろいろなテキストなどにも紹介されているとおりです．

このモデルについてすぐに考えられることは，インテジャー・プログラミングを使って解くということですが，そういうことを試みております文献は，このリストで言いますと [9]，[10]，[14]，[15] です．これは当然考えられることで，別に目新しいことでもないでしょうが，インテジャー・プログラミングの解法がいろいろ研究されるにつれまして，将来はこういった方式も有効になるのではないかと思います．

次に，ドミネーティング・シークェンスを使う方法，これは文献の [8] と [11] ですが，要するに，各ステージごとにあらゆる組み合わせを最初考えるのですけれども，たくさんの資源を使いながら信頼度が上がらないものをどんどん系統的に落としていく．そういうふうにしてでき

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ましたシークェンスをアンドミネーテッド・シークェンスと定義しておりまして，そういうものを使って問題を解くという方法です．

次は防衛大学の佐々木先生のお考えになった方法です．これもいろいろな文献がありますが，一応ここでは［12］をあげておきます．文献［12］は通信学会の信頼性特集号になっておりまして，ほかにもいろいろな記事が載っておりますが，ここに代表的にあげさせていただきました．この方法は，重量とか，容積とか，コストとか，いろいろな条件が多い場合に非常に有効とされております．

その次に，文献［2］におきましては，一般化されたラグランジュ乗数を使う方法が提案されております．それから文献［4］におきましては，これは比較的新しいわけですが，ジオメトリック・プログラミングを使い，さらに文献［3］と［13］におきましては，離散型の最大原理を使って解くことも試みられております．

最後に文献［6］ですが，これは考え方が直観的で図式的ですけれども，要するに単位コストあたりのシステム信頼度の向上が著しいところから，順につぎつぎに資源を割り当てていくという方法です．

このように，いろいろな方法が考えられておりますが，後のほうの［2］，［6］，［4］，［3］，［13］などの手法は，これで常に最適解が求まるという保証はありませんで，多くの場合，かなりよい近似解が求まるという手法です．

信頼度の配分のモデルとして，はじめに述べた Bellman のモデルは，ほかの類似のモデルの1つのプロトタイプとなっておりますが，それは並列冗長と言われる方式です．ほかに，よく知られているものに待機冗長，つまり，使っているものがこわれるまで待機しておって，こわれた時点で切りかえて予備の部品を使っていくという方式があります．

さらにこういった問題を考える場合に，故障モードを考えに入れる必要があります．簡単に申しますと，たとえば，赤信号が出るべきときに青信号が出る．逆に，青信号が出るべきときに赤信号が出る．そういった故障では，ひとくちに故障といいましても内容の違いがありますし，また，徐々に摩耗していくような部品などですと，故障といってもいろいろな段階の故障があるわけですが，そういう故障の内容を分類して，故障モードの違いを数式化の中に織り込んでいくやり方が考えられます．そういうことで，さらにいろいろなモデルが考案されるわけです．

ベルマンのモデルにしても，広い意味では一種の回路網の問題ですけれども，もっと一般的に，信頼性の立場から見た回路網の最適設計が考えられておりまして，たとえば［20］～［29］のような文献があります．

いろいろありますが，一例として，Frank & Hakimi ［21］の考え方をごく簡単にご説明申し上げます．コミュニケーションのネットワークで，すでにある設計がなされており，現在は，あるブランチ $i$ に $c_{i0}$ というキャパシティが与えられている．そこでコミュニケーションが行なわれているわけですけれども，その量が時々刻々，確率的に変動する．いま，ある $i$ というステーションから $j$ というステーションへ，さらに $R$ という量の通話を送りたいというときに，そういうことが可能になる確率 $P(F_{ij}\geqslant R)$ をあらかじめ与えたある $p_0$ という値よりも大きくしたい．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

しかも，与えられた有限個の観測データをもとに有意水準 $\alpha$ で検定した場合，仮説：$P(F_{ij} \geqslant R_0) \geqslant p_0$ が受容されるようにしたい．そういう条件のもとで，現在のキャパシティ $c_{i0}$ をある $c_i$ に増加させ，全体の費用を最小にするようにネットワークを改善してやるという問題です．著者たちはこの問題は 0-1 変数 $\varDelta_i$ を含むインテジャー・プログラミングの問題：

$$\mathrm{Min}\ h\cdot\varDelta c$$

$$\begin{cases} B(c_0+\varDelta c) \geqslant R+\delta_i Bf_i \\ 0 \leqslant \delta_i \leqslant 1 \qquad (i=1,\cdots\cdots,N) \\ \sum_{i=1}^{N} \delta_i \geqslant k \end{cases}$$

として解けると申しております．ここに $h$ は単価を示すベクトル，$\varDelta c$ は $c_i-c_{i0}$ を要素とするベクトル，$f_i$ は各ブランチの時点 $t_i$ における流れの大きさを示すベクトル，また行列 $B$ の要素 $b_{ij}$ はブランチ $j$ がカット・セット $A_i$ に属していれば 1，そうでなければ 0 と定義され，$k$ は $p_0$ と $N$ から定まる整数です．このモデルは実用的には問題があるかと思いますが，考え方としては興味深い点を含んでいます．それは観測データをもとにして，そのバラツキを十分考慮に入れた上で，システムの最適な改良の方法を示そうとしている点です．

次に，構造物の最適設計に関する問題がございます．構造物といっても，主として航空機などでこういうことが試みられているようですけれども，そのほかに吊り橋などでも同じようなことが考えられると思います．ここでは文献［31］～［35］をあげておきます．

一例として Hilton & Feigen［31］のモデルをご紹介したいと思います．ある構造物のシステムが $r$ 個のサブシステムからなっている．そうして，各サブシステムの破壊は独立に発生し，どのサブシステムの破壊も直ちにシステム全体を駄目にすると考えますと，その確率 $P_s$ は，サブシステム $i$ の破壊確率 $P_i(A_i)$ を使って，

$$P_s = 1 - \prod_{i=1}^{r}(1-P_i(A_i))$$

となります．この破壊の確率は非常に小さく押さえますので，近似的に

$$P_s \fallingdotseq \sum_{i=1}^{r} P_i(A_i)$$

とかけます．ここで $A_i$ は部材 $i$ の断面積です．同様に密度を $\rho_i$，長さを $L_i$ としますと，この構造物の重量は

$$W = \sum_{i=1}^{r} \rho_i L_i A_i$$

です．

破壊の確率をある一定の限度に押さえ，破壊応力と実動応力の分布を，断面積 $A_i$ をパラメータとして含む正規分布と仮定しておりますが，そういう条件のもとで重さ $W$ を最小にするという問題：$\partial W/\partial A_i + \mu(\partial P_s/\partial A_i) = 0$ を考えております．

ほかの論文も少しずつ違ってはおりますが，基本になっている考え方は大体同じようなものです．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

そういうふうにいろいろなモデルがいろいろと研究されておりますが，大体，1964, 5年くらいまでに，おもな理論的な成果は出尽したような感じでして，その後も論文はいろいろ出ておりますし，いろいろ工夫はされているようですけれども，なかなか大きな飛躍をすることができない状態，いわば，高原状態に達してきた感じがいたします．1964, 5年までの文献はいくつかのテキストなどにも載っておりますし，先ほど引用した［12］のような解説もありますので，この文献のリストでは古いものはなるべく省いて新しいものを，もちろん，漏れているものもたくさんあると思いますが，一応気がついたものを収録しました．

次に，保全に関する問題に簡単に触れておきたいと思います．これは文献の［36］と［45］――［45］は雑誌 *Management Science* に載りましたサーベイですが，［36］のほうは Barlow, Proschan & Hunter の本の内容になっているわけですけれども，これらにやはり1965年くらいまでの成果は要領よくまとめられております．

ごく簡単に申しますと，大きく分けて，

（i） 取替えモデル

年令による取替え（有限または無限時間）

ブロック取替え

周期的取替え（最小限の修理：有，無）

$k$ 回目の故障での取替え［44］

逐次取替え

（ii） 検査モデル

故障発見までの期待コスト最小

故障発見直後の取替えを含む期待コスト最小

モニターによる機会取替え［49］

（iii） マルコフ型モデル

Howard のモデル

Derman のモデル［37］,［38］,［46］,［51］

Jewell のモデル［43］

Eckles のモデル［40］

が考えられます．こういう分け方については問題もありますが，それぞれの中でさらにまたいろいろなモデルが考えられております．

大体，（i）取替えモデルでは多くの場合寿命の分布関数がわかっており，システムが故障しているかどうかも常時わかっている場合，単位時間あたりの保全のコストを最小にする，あるいは信頼度を最大にするということを考えておりますが，分布関数に関する情報がほとんどなくて，寿命の期待値と分散だけしかわからない場合にも，ミニマックスの取替え方針が立てられることが示されております．

次の（ii）検査モデルは，検査をしないとシステムの状態が確認できない，検査をするまでは壊れていてもわからないという場合です．そこで，いつ検査を行なうか，いつ取替えを行なうかと

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

いうことが問題になってまいります．

検査モデルの中で，モニターによる機会取替えというのは，ある部品を，かりにそれが2個あるとして，別々に取り替えるよりも2個一緒に取り替えるほうがコストが安くなる，あるいは，取替えに要する時間が短くなる．そういう条件のもとで2つ同時に考えるモデルが，ごく簡単な場合ですけれども取り扱われております．

これらの保全に関するモデルの中で，理論的にみて一番すぐれているのは，3番目のマルコフ型のモデルだと思います．それは，上のほうのモデルが，ある意味で故障の情報をむだにしているのに対して，マルコフ型のモデルでは，得られた最新の情報をもとにして，次にどういう手を打つべきかを考えていくわけですから，情報を有効に使うという意味で，ほかのモデルに比べて理論的にはすぐれていると思われます．

その中では，たとえば Howard のモデル，これは非常に有名でして，文献にはあげませんでしたが，よくご承知のことと思います．それから Derman のモデル [37],[38] があります．そのほか Jewell のモデル [43]，これはマルコフ・リニューアル・プログラミングということになっております．最後に Eckles のモデル [42] ですが，検査をしても故障の情報が正確につかめないという場合が非常に一般的に扱われております．

ただ，こういうふうなモデルは，理論的には非常にすぐれていると思いますが，それを保全作業の実務に生かすという点においては，特にそこに仮定されているいろいろな定数や関数をどうやって推定するかが問題で，困難が大きいと思います．ですから，現場では，あまりうまくないということがわかっておりましても，一番最初に掲げました取替えモデル――年令による取替えとか，あるいはブロック取替えとか，そういう単純なものが実用になっている場合が多いと思います．時間の都合で大分省略させて頂きましたが，大体以上が参考文献についての概略の説明です．

## 2.　文献［16］の概要

次に文献［16］の内容と概要の説明に入ります　かなり長い題がついておりますが，まず$m\times n$の行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

が与えられているとします．そして，$m\geqslant 2$ と考えますが，特に $m\geqslant 3$ の場合には要素 $a_{ij}$ は全部$>0$と仮定しております．そして問題は，この各行の要素を同じ行の中で適当に入れかえてやりまして，新しい行列をつくりだしていく．そこで同じ列に並んでいる要素をずっと掛け合わせて足す，つまり，列要素の積の和：

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}a_{ij}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

を求めるのですが，この積和を最大あるいは最小にしたいという問題です．この問題を Multi-Stage Rearrangement Problen，そしてこの行の数 $m$ のことを簡単に次元と呼ぶことにいたします．

それで要素の最適な配列を求めたいわけですが，一応，最適な配列を

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \cdots & a_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^0 & a_{m2}^0 & \cdots & a_{mn}^0 \end{bmatrix}$$

とあらわし，特に第1行は一般性を失うことなく，常に大きさの順序に配列して

$$a_{11}^0 \leqslant a_{12}^0 \leqslant \cdots \leqslant a_{1n}^0$$

とおくことにいたします．そうしますと，2次元の問題，つまり行が2つだけの問題というのは非常に簡単に解くことができます．実はこれはすでに解けているわけでして，私，それに気づかずにやったのですが，すでに2次元の問題については，Hardy, Littlewood & Pólya の *Inequalities* という本に結果が出ております．それは非常に簡単な結果なのですが，要するに2次元の最大問題の場合には各行ごとに要素を大きさの順に並べて大きさの順位の等しいもの同士を掛け合わせればよい：

$$\begin{cases} a_{11}^0 \leqslant a_{12}^0 \leqslant \cdots \leqslant a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 \leqslant a_{22}^0 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n}^0 \end{cases}$$

ということです．同様に，2次元の最小問題では，大きさの順序を逆の順に並べまして，順位の等しいもの同士をかけ合わせていけばいい：

$$\begin{cases} a_{11}^0 \leqslant a_{12}^0 \leqslant \cdots \leqslant a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 \geqslant a_{22}^0 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n}^0 \end{cases}$$

しかも，2次元の場合にはこれらの結果は要素の正負には全然無関係です．

したがって，問題は3次元以上の場合になるわけですが，3次元以上の場合でも最大問題はさっきと全く同様でして，非常に簡単に解けます．すなわち，各行の要素を大きさの順にずっと配列してやって，大きさの順位の等しいもの同士を，つまり小さいものは小さいもの同士，大きいものは大きいもの同士で掛け合わせていけばいいということ：

$$a_{i1}^0 \leqslant a_{i2}^0 \leqslant \cdots \leqslant a_{in}^0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, m)$$

を簡単に証明することができます．これを分極化と呼んでおきます．小さいものは小さいもの同士，大きいものは大きいもの同士ということですのでこういう名前をつけておくことにいたします．

次に，$m$次元の最小問題ですが，これは最大問題のように簡単には解けないわけです．こまかい手順はここでは省略いたしますが，かりにこういう3次元の問題：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

があるとしますと，この第2行と第3行の要素を順に組み合わせて $b_{2j}=a_{2j}\cdot a_{3j}$ $(j=1, 2, \cdots\cdots,$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$n$）とおくことによって，3次元の問題を2次元の問題：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \end{bmatrix}$$

に直して目的式を小さくすることができます．これは第2行の要素と第3行の要素を組にした場合ですが，さらにこの組のつくり方を変えて同じ手法を繰り返していきます．

最初の出だしのときの目的式の値を $z^{(1)}$ としますと，この繰返し法を使っていくうちに，だんだんと目的式の値が小さくなって，ある有限回で，もう幾らこの繰返しをしても，目的式の値がそれ以上減らないというところが出てまいります．それを $z^{*}$ とかくことにしますと

$$z^{(1)} \geqq z^{(2)} \geqq \cdots \geqq z^{(K)} = \cdots = z^{*}$$

となります．この $z^{*}$ が目的式の最小値 $z^{0}$ にちょうど等しくなってくれればそれでめでたしめでたしというわけですが，実は必ずしもそういうぐあいに簡単にはまいりませんで，$z^{*}$ は $z^{0}$ の一つの上界であるということしかいえません．

次に，$z^{0}$ の下界を求めるために少し工夫をしておりますが，$n$ 個の変数の和：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

を制約条件：

$$0 \leqq \mu_i \leqq x_i \leqq \lambda_i \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \pi,\ \text{ただし，} \prod_{i=1}^{n} \mu_i < \pi < \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

のもとで最小にするという問題を先に考えます．この和は，さっき目的式が積和の形になっておりましたが，あの積の部分を $x_i$ とおいてしまったような形です．この問題を解いてみますと，算術平均と幾何平均の関係を示す有名な不等式がありますが，ちょうどあれを一般化した不等式ができてきます．それを使ってやりますと，先ほどの問題の $z^{0}$ の下界が求まります．その場合に，先ほどの $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値は許されている範囲内でできるだけ均等化してやるのがよい，ということがわかります．

そこで次にごく簡単な3次元の例題：

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

を解いてみます．まず，最大問題のほうは，各行の要素を大きさの順に配列していって，順位の等しいもの同士を掛けていくと求まるわけでして，この目的式の積和の値は，この場合 1439 になります．最小問題の場合は，前に述べた2次元に直す繰返し法を上の行列に3回適用しますと

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$$z^{*} = 70 + 225 + 240 + 245 + 240 = 1020$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となります．すなわち，目的式の最小値 $z^0$ は

$$z^0 \leqq z^* = 1020$$

をみたすことがわかります．

次に $z^0$ の下界を求める方法を使ってやってみますと，まず，積の大きさをできるだけ均等化すればよいと申しましたが，これを見ますと均等化されていない．特に $x_1$ の70というところが非常に小さいわけで，これがもう少し大きくなればよいだろうと思うのですけれども，この値は実はこれ以上大きくならない．つまり第1行に1という数字がありまして，これが第1行の最小の要素で，10と7が2行，3行の最大の要素ですから，1が入っている限りは，あとの組合せをどんなにかえても $x_1$ の値は70よりは大きくできない．そこで

$$0 \leqq x_1 \leqq 70 = \lambda_1, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_5 = \infty$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5 = 0$$

とおいて $z_0$ の下界 $z_*$ を計算しますと，

$$z_* = 70 + 4 \times (225 \times 240 \times 245 \times 240)^{1/4} \fallingdotseq 1019.6$$

となります．すなわち，$1019.6 \leqq z^0 \leqq 1020$ ということですが，当然，$z^0$ は整数でなければいけませんから，

$$z^0 = 1020 = z^*$$

で，さきに求めた $z^*$ がちょうど最適解になることが確認できたわけです．

こういうぐあいにうまくいく場合もあるし，あまりうまくいかない場合も中にはありますが，例えば，

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の場合，目的式の最小値は732と733の間にあるというところまでは突きとめることができる．そして目的式が733という組合せは，

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 7 & 14 & 8 \\ 6 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

で与えられます．

そういうことをいろいろ考えているわけですけれども，一体それが何の役に立つのかという問いが当然出てくると思います．それを次にお話したいのですが，たとえば鉄道の場合ですと，管理局の運転指令から現場の駅長にあててある指令が伝えられる．現場の駅長は係員に命令をくだす．係員はテコの扱いをしましてポイントの切りかえをやる．その命令系統を考えますと，これはちょうど直列のシステムにあたるわけでして，そのラインの上のどの1つでも正しい処置ができないでエラーを起こしますと，システムのエラーが起こってしまうというわけです．

一方，このごろ機関車乗務員の問題がいろいろ起こっておりますが，機関士と機関助士，それからさらにＡＴＳ（自動列車停止装置）のような装置が取りつけられている場合を考えますと，そのうちのどれか1つでも正常に働いてくれれば信号無視の事故は起こらないということでして，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

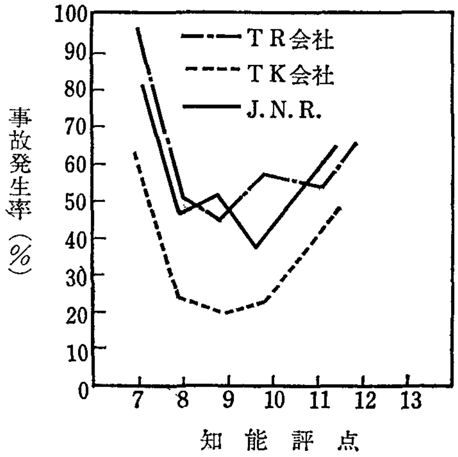


図2 自動車運転手の知能と事故との関係(鶴田正一:事故の心理 による)

これはちょうど並列になっているわけです.そういういろいろな場合があります.

もちろん,直列な部分と並列な部分との組合せからなるシステムもあります.

さて,図2をごらん下さい.これは鶴田正一さんの『事故の心理』(中公新書)という本から引用したものです.横軸には自動車の運転手の知能の評点,縦軸には事故の発生率をとってあります.これは非常に興味深い図だと思うのです.太い線でかいてありますのがJ.N.R.,つまり国鉄です.TK会社の線がちょっと下にきておりますが,ともかく全体として,なべ底型のカーブになっている.

この席にいらっしゃる方は知能の評点が右端の方だと思いますし,端の方はデータがないのではっきりわかりませんが,この傾向から察しますと,たぶん,知能の高い人のほうはずっとカーブが上に上がって,事故の発生率が高くなるのではないかと想像されます.運転される方はくれぐれもご用心を,ということになるわけです.ここで私が非常に興味深く思いますのは,知能の評点というような,測定可能な量を与えてやりますと,その人がどれぐらいの事故発生率を持っているかということが——これは平均的な値ですけれども——推定がつくということです.

こういった例は,国鉄の場合には,運転関係の職員を採用するときに,ある心理的な適性検査を行なっておりますがその適性検査の成績と,実際に現場で働いて事故を起こした実績を調べて比較しますと,やはりある種の関係があるということが,鉄道労働科学研究所で明らかにされております.

ですから,だんだん心理学的な計測の手段が進歩してまいりますと,信号の確認というような単純な作業におきまして人がエラーを起こす確率が人によって違うことが,かなり適確に定量的な目やすで示されるようになると考えられます.

次に,機械や器具の場合はどうかを考えてみます.この場合にはその機械の過去の使用時間,あるいは年令というようなものを横軸にとり,そして縦軸にはその機械の故障率をとります.そうすると,信頼性の本などによく書いてありますような図式的な説明ができるわけで,やはり多

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

くの場合にはなべ底型になるのではないか．初めのほうは初期故障があるがそのうちにだんだんと落ちついてきて，ある程度使用時間が増すと摩耗故障的な状況があらわれてくるというように説明されております．要するに，機械器具の場合でもその寿命の分布が指数分布になるとき以外は，過去の使用時間，つまり年令によって故障率が違うということです．

10年，20年と寿命が持つようなものを扱っているところ，しかも，1年に1回くらいは，少なくともかなり大がかりな検査や修繕をやるというところでは，過去の使用経歴によって，機械の故障の発生のしかたが違うという情報は，かなり重要な意味を持つものと考えるわけです．

東京とか大阪のような通勤区間で使っております電車を相当使いましたところでまだまだ使えるけれども，ある程度くたびれてきたときに今度は田舎のほうの閑散線区に送って，そこで使うということを実際やっているわけです．年令によって性能に違いがあることを，そういう形で業務の上に反映させていると思われます．

次に掲げます図3は，踏切事故の発生件数をあらわしたもので，香月輝久さんの鉄研報告第372号（1963年）から引用したものです．上の線が4種の踏切，つまり防護装置が何もついていない踏切．下のほうの線が3種の踏切，これはカンカンカンと鳴る警報機だけがついた踏切です．

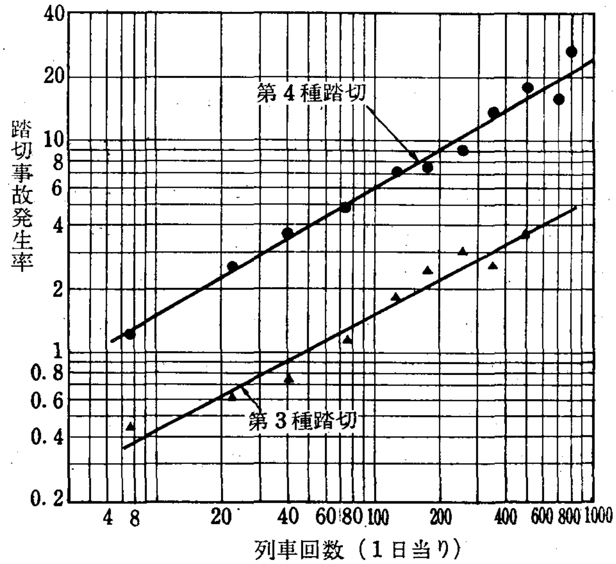


図3 踏切事故発生率（香川輝久：鉄研報告 No. 372 による）

横軸には列車回数をとってありますし，縦軸は換算交通量 $10^5$ あたりの年間の踏切の事故発生件数をとってあります．目盛りはいずれも対数目盛りです．2つの線がほぼ平行になっているのはおもしろいと思いますが，ここで申し上げたいことは，同じ踏切の防護装置をつけるにしても，どういうところにつけるかによって，全体として事故を押さえる効果が，当然のことながら，違うということです．

こういったいろいろなことから考えまして，人にしても車にしても，それをどういうふうに組み合わせて，どういう場所に持っていって使うかが問題になるはずだということです．

そうしますと，初めにこういう行列：

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を出したのですけれども，この要素の１つ１つがかりに各機械部品，あるいは，保安要員のきめられた動作を正しく遂行する確率だと考えます．しかも，第１行は機関士，第２行は機関助士，ほかのある行はＡＴＳのような保安装置，それらの信頼度であると考えます．そういうものが何個かずつあってそれらを組み合わせまして，全体として，$n$組の同じような機能を果たすシステムを組み上げまして，それをある場所に配置をするときに，そこに配置されたシステムが使われる頻度，あるいは故障が発生した場合の故障の重要さのウェートを考慮に入れまして，ある方法で組み合わせたものをなるべくうまいぐあいに配置する．ここでは仮に

獲物の出現率：$w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$

としてありますが，これは故障原因の発生率，あるいは故障が起こった場合の重要さの度合，もしくはそこに配置された機械の使用頻度をあらわすもので，そういうものがわかっているときに，なるべくうまく装置を組み合わせて，なるべくうまいところへそれを配置していったらいいだろうと考えるわけです．

直列系の場合にはこの信頼度 $a_{ij}(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ を掛け合わせていけばそのシステムの信頼度が出るし，並列系の場合には，各要素の故障確率 $\bar{a}_{ij}=1-a_{ij}\ (i=1,2,\cdots\cdots,m)$ を掛け合わせていきますとそのシステムの故障確率が出てまいります．いずれにしても$n$個のシステム（$j=1,2,\cdots\cdots,n$）を考えますと積和の形になるわけでして，$w_1w_2,\cdots\cdots,w_n$ を考慮しない場合

$$\begin{cases} \text{直列系}\cdots\cdots n-1 \text{ 台以上動作の確率最大} \Rightarrow m \text{次元最大問題} \\ \text{並列系}\cdots\cdots n-1 \text{ 台以下故障の確率最小} \Rightarrow m \text{次元最小問題} \end{cases}$$

となります．獲物の出現率 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$ を考慮に入れた場合は

$$\begin{cases} \text{直列系}\cdots\cdots\text{獲物を仕止める期待数最大} \Rightarrow (m+1)\text{次元最大問題} \\ \text{並列系}\cdots\cdots\text{獲物を取逃がす期待数最小} \Rightarrow (m+1)\text{次元最小問題} \end{cases}$$

となりますが，直列系で獲物を仕止める期待数というのは，頻度 $w_j$ で発生する事故原因を信頼度 $\prod_{i=1}^{m} a_{ij}$ をもつ直列型の保安装置で検知して，事故を未然に防ぐ件数の期待値と読みかえることもできまして，$j=1,2,\cdots\cdots,n$の全体としては

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m+1} a_{ij},\quad \text{ここに}\ a_{m+1,j}=w_j$$

を最大にすることが問題になります．これはとりも直さず$(m+1)$次元の最大問題です．並列系で獲物を取り逃がす期待数最小というのも全く同じように解釈できます．

とにかく，この場合に，直列系：最大問題，並列系：最小問題という対照がみられます．

それを解くときにまた対照性があらわれておりまして，最大問題は分極化の方針で解く．つまり，小さいものは小さいもの同士，大きいものは大きいもの同士で組み合わせるという方法をとる．これに対して最小問題は均等化の方針でなるべく積の値が均等化するようにとっていく，そういう方針でやればよいということが出てまいります．このように，モデルの直列と並列，目的

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

式の最大と最小，解法の分極化と均等化というふうに，非常にうまいぐあいにコントラストを示しているわけです．

直列系，あるいは並列系の問題ばかりではありませんで，もうちょっと初めの問題をモディファイしてやりますと，変形された形の最大問題，変形された形の最小問題というのを考えることができます．変形された最小問題のほうを簡単にご紹介しますと，まず，8人のハンターがいて，獲物を仕止める確率――腕前と呼んでおりますが，それが

$$U=[0.8,\ 0.6,\ 0.5.\ 0.4,\ 0.4,\ 0.3,\ 0.3,\ 0.2]$$

のように与えられている．また獲物が出現する場所が5カ所あって獲物の出現確率が

$$W=[0.4.\ 0.3,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1]$$

であることが知られている．結局，5つの場所に8人のハンターをたかだか2人ずつ配置したい．かりに1カ所に2人配置しますと，2人の放った弾が，どちらか一方でも獲物に命中すれば獲物は仕止められる．ということは2人のハンターは並列に結合されることになります．計算を簡単にするために獲物の出現確率を10倍して

$$10W=[4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1]$$

とおき，ハンターが獲物を取り逃がす確率を10倍して

$$10\overline{U}=[2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 10,\ 10]$$

とおきます．ただし，ここでは獲物を取り逃がす確率が1という仮想的なハンターを2人追加していますが，形式上そういうものをつけ加えて，人数をちょうど10人にしておきます．10人のハンターを5つの場所に2人ずつ配置する場合には，さっきの問題と違いまして――最初の問題ですと，同じ行の要素同士しか入れかえができなかったのです――今度の問題では，ハンター10人は，お互いにどう組み合わせてもよいわけですから，違う行の要素の間でも入れかえが可能になります．

初めの問題で考えましたような繰返しの手法を使って，違う行の間でも，ハンターについては入れかえができるということを考えに入れてやりますと，次のような組合せ：

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$z^*=80+84+80+72+70=386$$

が得られます．上の行列の第1行は場所，第2行と第3行はハンターをあらわしています．この場合に，積和 $z^*$ は出てきた獲物を取り逃がす期待数を示しております．それをなるべく小さくするようにもっていきたいというのが目標です．上の $z^*=386$ は目標値 $z^0$ の1つの上界ですから，$z^0$ の下界 $z_*$ を求めますとと

$$z_*=[80\cdot84\cdot80\cdot72\cdot70]^{1/5}\fallingdotseq385.08$$

となります．これと $z^*$ を比べて，$z^0$ が整数でなければならないことを考えますと，さっき求まっていたものがちょうど最適解で

$$z^0=z^*=386$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となることがわかります．数値をもとにもどして場所とハンターの最適な組合せを示すと次のようになります．

| 場　所 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|
| ハンター | 0.8 | 0.6<br>0.3 | 0.5<br>0.2 | 0.4<br>0.4 | 0.3 |

ここで注目したいことは「均等化の方針」がモディファイされた問題についてもそのまま使えるということです．

実は，モディファイした問題を使いますと，直列型の問題および並列型の問題のみならず，もうちょっと一般的な問題を解くことができるということをごくかいつまんでお話します．まず，あるタイプの信頼性資源が与えられているとします．その要素の数は $n$ より大きいとして，それを $n$ 個の部分集合に分けて

$$A_i=\{A_{i1},A_{i2},\cdots\cdots,A_{in}\}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

とし，どの部分集合 $A_{ij}$ も少なくとも1つの要素を含んでいるとします．あるものは2つ，あるものは3つ含んでいるかもしれません．1つの部分集合 $A_{ij}$ の中に2つ以上要素が入っている場合には，それを並列に結んでやります．そうすると，$A_{i1},A_{i2},\cdots\cdots,A_{in}$ は同じ機能を持つ部品の集まりですが，部品の種類は $m$ 種類（$i=1,2,\cdots\cdots,m$）ある．そして図4のように $A_{ij}$（$i=1,2,\cdots\cdots,m$）を直列に結合します．$A_{ij}$ 自身は要素の並列結合によってできたものですから，これらを直列に結合したものは直並列型のシステムともいえます．この図の $w_j$（$j=1,2,\cdots\cdots,n$）はこれらのシステムを配置すべき場所での使用頻度，あるいはそこでエラーが起こった場合の損害の大きさというようなものをあらわす量です．各 $A_{ij}$ をなるべくうまく組み合わせて，その組み合わせたものをできるだけ効果的な場所に配置してやるという考えです．

ここで

$$x_{ij}=\text{合成ユニット}\ A_{ij}\ \text{の誤動作の確率}$$

としますと，図4の $n$ 個のシステムのうち，誤動作をおこすシステムの期待数 $z$ は

$$z=\sum_{j=1}^{n}w_j\{1-\prod_{i=1}^{m}(1-x_{ij})\}$$

となります．ただし，

$$\prod_{j=1}^{n}x_{ij}=\pi_i(\text{定数})\quad(i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

という条件がつきます．この条件のもとで期待数 $z$ を最小にするというような問題が考えられますが，各合成ユニットの故障確率 $x_{ij}$ が非常に小さい場合には，近似的に

$$z\fallingdotseq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

となり，結局，モディファイされた最小問題に帰着できるわけです．このようにしてある条件のもとで

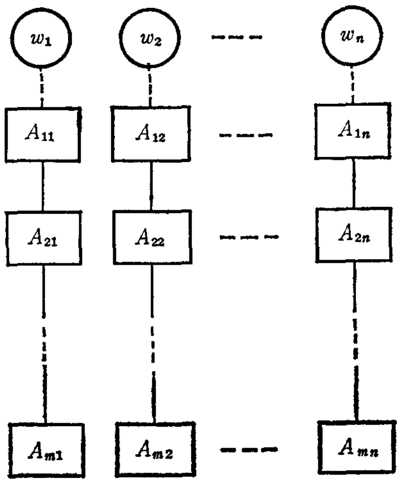


図4　$n$ 個の直並列型システムの配置

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

は直並列型の問題も扱うことができます.

以上が[16]のアウトラインですが,人であれ,物であれ,与えられたシステムの中で,それぞれ異なった信頼度を持ち,同じ機能を果たすのですが,それを配置すべき場所が,鉄道なら鉄道というシステムの中にたくさんある.それをどう組み合わせ,どこへ配置すればよいかというような問題を考えたわけです.

あと,実用上の問題——信頼性資源の最適配分に関する,いろいろなモデルや理論を実際に使っていく上での問題点についてお話するはずだったのですが,それにつきましては次回以降の研究発表会で研究としてご報告をさせていただきたいと考えております.御静聴を感謝いたします.

## 参考文献


**Bellman のモデルおよびそれと類似のモデル**

[1] Bellman, R., and S. Dreyfus, "Dynamic Programming and the Reliability of Multicomponent Devices," *JORSA*, 6, 2 (1958).

[2] Everrett, H., "Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problem of Optimum Allocation of Resources," *JORSA*, 11, 3 (1963).

[3] Fan, L. T., C. S. Wang, F. A. Tillman, and C. L. Hwang, "Optimization or System Reliability," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-16, 2 (1967).

[4] Federowicz, A. J., and M. Mazumdar, "Use of Geometric Programming to Maximize Reliability Achieved by Redundancy," *JORSA*, 16, 5 (1968).

[5] Fyffe, D. E., W. W. Hines, and N. K. Lee, "System Reliability Allocation and a Computational Algorithm," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-17, 2 (1968).

[6] Hees, Ir. R. N. v., "Optimal Reliability of Parallel Multicomponent Systems," *ORQ*, 12, 1 (1961).

[7] Jensen, P. A., "The Design of Multiple-Line Redundant Networks," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-18, 2 (1969).

[8] Kettelle, J. D., Jr., "Least-Cost Allocation of Reliability Investment," *JORSA*, 10, 2 (1962).

[9] Kolesar, P. J., "Linear Programming and the Reliability of Multicomponent Systems," *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, 3 (1967).

[10] Mizukami, K., "Optimum Redundancy for Maximum System Reliability by the Method of Convex and Integer Programming," *JORSA*, 16, 2 (1968).

[11] Proschan, F., and T. A. Bray; "Optimum Redundancy under Multiple Constraints," *JORSA*, 13, 5 (1965).

[12] 佐々木正文,"冗長性",電気通信学会雑誌,第47巻,第11号 (1964).

[13] Tillman, F. A., C. L. Hwang, L. T. Fan, and S. A. Balbale, "System Reliability Subject to Multiple Nonlinear Constraints," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-17, 3 (1968).

[14] Tillman, F. A., and J. M. Lüttschwager, "Integer Frogramming Pormulation of Constrained Reliability Problems," *Management Science*, 13, 11 (1967).

[15] Tillman, F. A., "Optimization by Integer Programming Formulation of Constrained Reliability Problems with Several Modes of Failure," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-18, 2 (1969).

**その他の信頼性資源配分モデル**

[16] Abe, S., "Multi-Stage Rearrangement Problem and Its Applications to Multiple-System Reliability," *JORSJ*, 11, 1 (1968).

[17] Bartholomew, C. S., "Some Economic Implications of Reliability, Maintainability and Safety in Transportation Systems," *Annals of Reliability and Maintainability*, 7 (1968).

[18] Hinely, J. P., Jr., and B. F. Shelley, "Reliability Optimization in the Conceptual Phase," *1967 Annual Symposium of Reliability*.

[19] Webster, L. R., "Optimum System Reliability and Cost Effectiveness," *1967 Annual Symposium on Reliability*.

**ネットワーク・モデル**

[20] Birnbaum, Z. W., J. D. Esary, and S. C. Saunders, "Multi-Component Systems and Structures and Their Reliability," *Technometrics*, 3, 1 (1961).

[21] Frank, H., and S. L. Hakimi, "On the Optimum Synthesis of Statistical Communication Nets,"


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

*J. Franklin Institute*, 284, 6 (1967).

[22] ——, "Parametric Analysis of Statistical Communication Nets," *Quart. Appl. Math.*, 26, 2 (1968).

[23] ——, "Parametric Synthesis of Statistical Communication Nets," *Quart. Appl. Math.*, 27, 1 (1969).

[24] Frank, H, "Optimum Locations on a Graph with Probabilistic Demands," *JORSA*, 14, (1966), 409-421.

[25] Fu, Y., and S. S. Yan, "A Note on the Reliability of Communication Networks," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 10, 3 (1962).

[26] Lee, C. Y., "Analysis of Switching Networks," *Bell System Tech. J.*, 34 (1955), 1287-1315.

[27] Lerda-Olberg, S., "Bibliography on Network-Based Project Planning and Control Techniques : 1962-1965," *JORSA*, 14 (1966), 925-931.

[28] Moore, E. F., and C. E. Shannon, "Reliable Circuits Using Less Reliable Relays, Part I and II," *J. Franklin Institute*, 262 (1956).

[29] 中村義作, "信頼性を考慮した流れ網の構成法," 経営科学, 第9巻, 第1号 (1965).

[30] Neumann, J. von, "Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organs from Unreliable Components," *Automata Studies*, Princeton U. P., 1956.

**構造物設計のモデル**

[31] Hilton, H. H., and M. Feigen, "Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability," *J. Aerospace Sciences*, 27, 9 (1960).

[32] Moses, F., and D. E. Kinser, "Optimum Structural Design with Failure Probability Constraints," *AIAA Journal*, 5, 6 (1967).

[33] Murthy, P. N., and C. Subramanian, "Minimum Weight Analysis based on Structural Reliability," *AIAA Journal*, 6, 10 (1968).

[34] Switzky, H., "Minimum Weight Design with Structural Reliability," *J. Aircraft*, 2, 3 (1965).

[35] Yao, J. T. P., and H. Y. Yeh, "Safety Analysis of Statically Indeterminate Trusses," *Annal of Reliability and Maintainability*, 1967.

**保 全 関 係**

[36] Barlow, R. E., F. Proschan, and L. C. Hunter, *Mathematical Theory of Reliability*, Chap. 4 (Optimum Maintenance Policies) and Chap., 5 (Stochastic Models for Complex Systems), Wiley, 1965.

[37] Derman, C., "Optimal Replacement and Maintenance under Markovian Deterioration with Probability Bounds on Failure," *Management Science*, 9, 3.

[38] ——,On Optimal Replacement Rules When Changes of State Are Markovian, Chap. 9, *Mathematical Optimization Techniques*, Edited by R. Bellman, U. Calif., 1963.

[39] Drinkwater, R. W., and N. A. J. Hastings, "An Economic Replacement Model," *ORQ*, 18, 2 (1967).

[40] Eckles, J. E., "Optimum Maintenance with Incomplete Information," *JORSA*, 16, 5 (1968).

[41] Freeman, R. J., D. C. Gogerty, G. W. Graves and R. B. S. Brooks, "A Mathematical Model of Supply Support for Space Operations," *JORSA*, 14, 1 (1966).

[42] Guthrie, D., Jr., and E. H. Means, "Relationships among Potentical Sorties, Ground Support, and Aircraft Reliability," *Navel Res. Log. Quart.*, 15, 4 (1968).

[43] Jewell, W. S., "Markov-Renewal Programming. I : Formulation, Finite Return Medels, II: Infinite Return Models, Example," *JORSA*, 11, 6 (1963).

[44] Makabe, H., and H. Morimura, "On Some Preventive Maintenance Policies," *JORSJ*, 6, 1 (1963).

[45] McCall, J. J., "Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment : A Survey," *Management Science*, 11, 5 (1965).

[46] Peter, K., "Minimum Cost Replacement under Markovian Deterioration," *Management Science*, 12, 9 (1966).

[47] Roll, Y., and P. Naor, "Preventive Maintenance of Equipment Subject to Continuous Deterioration and Stochastic Failure," *ORQ*, 19, 1 (1968).

[48] Schweitzer, P. J., "Initial Provisioning with Spare Deterioration," *JORSA*, 15, 3 (1967).

[49] Vergin, R. C., "Optimal Renewal Policies for Complex Systems," *Navel Res. Log. Quart.*, 15, 4 (1968).

[50] White, L. S., "The Analysis of a Simple Class of Multistage Inspection Plans," *Management Science*, 12, 9 (1966).

[51] White, L. S., "Shortest Route Models for the Allocation of Inspection Effort on Production Line," *Management Science*, 15, 5 (1969).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.