

文 献 抄 録

Giffler, B., "Scheduling Algebra: A Progress Report," *Naval Research Logistics Quarterly*, 15, 2 (1968), 255-280.

[スケジューリング/グラフ理論/理論的]

スケジューリング代数は、ネットワーク問題を定式化し解く目的で、著者ギフラーによって開発された。

本論文は先に発表された「インダストリアル・スケジューリング」(ミューズ, トンプソン編, 関根智明訳, 竹内書店, 1966)中の著者の論文の拡張になっている。

スケジューリング代数は、ある体の上の行列の環であり、普通の行列代数と同じ公準にしたがう。

行列の各要素集合の和 \oplus は

- (1) 各集合の要素をまとめ
- (2) 異符号で互いに大きさの等しい対を除くことによって得られる。

また、各要素の積 \otimes は

$$\begin{aligned} a \otimes b &= 0 & (a \vee b = 0) \\ &= |a| + |b| = c & (a \wedge b \neq 0 \text{ で互いに同符号}) \\ &= -c & (a \wedge b \neq 0 \text{ で互いに異符号}) \\ &= \pm b & (a = \pm c \text{ で } b \neq 0) \end{aligned}$$

の規則にしたがう。ここに ϵ は大きさ0の意である。

スケジューリング問題における順序関係は順序関係行列 S によって定量化される。

$$\begin{aligned} (s_{ij}) &= (0) & (\text{アクティビティ } i \text{ と } j \text{ が直前関係にない}) \\ &= (t_1, t_2, \dots) & (\text{アクティビティ } i \text{ と } j \text{ が直前関係にある}) \end{aligned}$$

S^* を計算することによって水準 k の順序関係が求められる。 t は i から j へ行く時間。

また、すべての水準の集合の行列 θ は

$$\theta = (I \ominus S)^{-1}$$

によって計算される。

次報では、このスケジューリング代数の応用例が述べられる予定である。(近辻喜一)

Hayes, R. H., "Statistical Estimation Problems in Inventory Control," *Management Science*, 15, 11 (1969), 686-701.

[在庫/統計/理論的]

在庫問題で、需要分布の型はわかっているがパラメータは未知の場合について、ごく単純な在庫モデルに対して ETOC (期待総費用 (1 期間の)) を測度として、それを最小にするような最適在庫水準の推定について述べている。

在庫モデルとして、各期の初期在庫量は常に0になるように処置されていると仮定する。

需要の確率密度関数を $\varphi(\xi) = \varphi(\xi|\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ は未知 (定常) なパラメータとする。

θ が確定している時の最適在庫水準を y^* とすると、費用関数 $l(y, \xi)$ が部分的線型ならば、

$$y^* = \Phi^{-1}(\gamma|\theta) \quad (\gamma = C_s/C_s + C_x, C_s: \text{品切れ費用 (単価)}, C_x: \text{在庫費用 (単価)})$$

となる。 θ が未知の時に、 θ の最尤推定値 (MLE) $\hat{\theta}$ をとり、 y^* の推定値 (\hat{y}) としたとき \hat{y} を最尤政策 (MLP) とよぶ、 \hat{y} は y^* の MLE となっている。有限な n に対して、この MLP よりよい (ETOC がより小さいこと) 最適在庫水準の推定値が存在することを例で示している。

たとえば、 $\varphi(\xi|\mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\xi/\mu}$ のとき、費用関数は、

$$\begin{aligned} C_x = 1, C_s = \lambda \text{ とおくと,} \\ \bar{l}(y, \mu) &= \mu(1+\lambda)e^{-y/\mu} + (y-\mu) \text{ となり,} \\ y^* &= \mu \ln(1+\lambda) \end{aligned}$$

$$\bar{l}(y^*, \mu) = \mu \ln(1+\lambda) = y^*$$

となる。一方 μ の MLE は標本平均 \bar{x} だから、 $\hat{y} = \bar{x} \ln(1+\lambda)$

これに対する ETOC は、

$$\begin{aligned} \text{ETOC}(\hat{y}, \mu, n) &= \mu \ln(1+\lambda) \\ &\quad + \mu[(1+\lambda)(1+[1/\omega\mu])^{-n} - 1] \end{aligned}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\bar{l}(y^*, \mu)$ に近づく。

一方、 $\hat{y}_\beta = \beta \cdot \bar{x}$ なる推定を考え、その ETOC を最小にする β の値を求めると、

$$\beta^* = n[(1+\lambda)^{1/n+1} - 1]$$

となり上の MLP よりもよい推定政策を得る。

そのほか、 $\varphi(\xi|\theta)$ が分散既知で平均値が未知の正規分布の場合、分散、平均値ともに未知の正規分布の場合等について、MLP より ETOC が小さくな

るような政策が存在することを例示している。

さらに、バイズの観点から、この3つの例について、パラメタ θ の重みづけ関数(事前確率)が、どのような関数であるとき、そこで考えたMLPよりよい最適在庫水準、たとえば例1では $\hat{y}_\theta = \beta^* \cdot \bar{x}$ が得られるかを議論している。(反町迪子)

Sergent, R. G., and H. E. Bradley, "A 'variable S' Inventory Model," *Management Science*, 15, 11 (1969), 716-727.

[在庫/自動制御/応用]

1. はじめに

本論文は、線型定期発注モデルの特性解析を行なっている。著者は、このモデルを“variable S”在庫モデルとよび、基本的な発注ルールは(S, T)政策であり、この政策においてSを変数とするモデルであると述べている。

本論文においては、この“variable S”モデルの構成ならびに安定条件・過渡状態の応答、定常状態の応答に関してZ変換を導入して解析している。また、現実の定期発注システムにおける非線型性への考慮に関しても論及している。

2. 仮定およびモデル構成

著者は、モデル構成にあたって次の仮定をおいている。

- (1) 対象品目; 1品目, (2) 対象倉庫; 単一,
(3) 発注時点; 期末, 納入時点; $\tau(1, 2, \dots)$ 期後の期首, (4) バックログを許す。

この仮定のもとに、一般モデルは次の4種の方程式で示される。ただし、方程式で用いられる記号は次の通りである。

A_n ; n 期末における発注へのフィードバック量

a_n ; ランダム変数 (Box-Jenkins モデル参照)

I_n ; n 期末の正味在庫量 (手持量)

I^* ; 望ましい期末在庫量 (安全在庫)

k_j ; フィードバック量 A_n の荷重変数

R_n ; n 期における発注済量

S^j ; 第 j 番目の演算子

$F_{n,\tau}$; n 期末での将来 τ 期間の総需要予測量

$Q_{n+\tau}$; $(n+\tau)$ 期用として n 期末に発注される数量

Y_n ; n 期における実績需要量

$\hat{Y}_{n+i,i}$; n 期末に予測する $n+i$ 期の需要予測量

γ_j ; Box-Jenkins モデルにおける第 j 番目の媒介変数

$\hat{\gamma}_{i,j}$; i 期前における予測式の γ_j の見積値

τ ; 発注と納入との間の遅れ期間

a) 構造方程式

$$I_n = Q_n + I_{n-1} - Y_n \quad (1)$$

b) 需要系列 (Box-Jenkins モデル)

$$Y_{n+1} = M + \sum_{j=-m}^p \gamma_j S^j a_n + a_{n+1} \quad (2)$$

c) 需要予測式

$$F_{n,\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} Y_{n+i,i} = \sum_{i=1}^{\tau} (\hat{M} + \sum_{j=-m}^p \hat{\gamma}_{i,j} S^j a_{n,i}) \quad (3)$$

ただし、 $\hat{M}, \hat{\gamma}_{i,j}$; 最小二乗法を用いて推定する。

$$\hat{a}_{n,i} = Y_n - Y_{n,i} \quad (4)$$

d) 発注ルール

$$Q_{n+\tau} = F_{n,\tau} + A_n - R_n \quad (5)$$

ただし、 $R_n = R_{n-1} + Q_{n+\tau-1} - Q_n$

$$A_n = \sum_{j=-r}^s K_j S^j (I^* - I_n) \quad (6)$$

3. 解析方法

上述のモデルにおける $Q_{n+\tau}$ および I_n の特性を調べるために著者は上述の式についてZ変換し、次式を導いている。

$$\begin{aligned} Z^\tau Q(Z) &= Z^\tau [Z^\tau - 1 + \sum_{j=-r}^s k_j (1-Z^{-j})^{-1}] \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^{\tau} \left[\left[\hat{M} + Y(Z) \sum_{j=-m}^p \hat{\gamma}_{i,j} (1-Z^{-j})^{-j+1} \right] \right. \right. \\ &\times \left. \left[1 + Z^{-i} \sum_{j=-m}^p \hat{\gamma}_{i,j} (1-Z^{-j})^{-j} \right]^{-1} \right\} \\ &+ \left[I^* + Y(Z) \right] \sum_{j=-r}^s K_j (1-Z^{-j})^{-j} \end{aligned} \quad (7)$$

$$I(Z) = (1-Z^{-1}) [Q(Z) - Y(Z)] \quad (\text{ただし } |Z| \geq 1) \quad (8)$$

4. 結果

安定条件を求めるために(7)式における分母がすべて0になる場合をとりあげ、これを次式のごとく展開している。

$$Z^i + \sum_{j=-u}^v C_j (1-Z^{-j})^{-j} = 0 \quad (9)$$

ただし $C_0 = K_0 - 1, C_j = K_j (j \neq 0)$

上式において、E. I. Jury の結果をもちいて

$$i + u + v \geq 5 \quad (10)$$

になる。 i, u, v の組合せのときモデルは安定すると

いう結論を出している。

この他、特性解析結果として過渡状態、定常状態のおのおのにおける Q_{n+}, I_n の応答結果および、若干、モデルを拡張した場合の結果を提出している。

5. 結論

著者は、現実の定期発注システムにおける非線型性（発注量は非負であり整数値をとる）について論及している。本モデルを使用した結果、 $Q < 0$ になる確率が小さければ、現実に適用しても問題はないし、 $Q < 0$ になる確率が大きいときは、Booton らによる“equivalent gain”を用いればよいとしている。また、整数値に対しては、“quantizer”の概念を導入すれば良いと述べている。（田部 勉）

Zacks, S., “Bayes Sequential Design of Stock Levels,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 16, 2 (1969), 143-155.

[在庫/統計/理論的]

在庫問題で、需要分布が未知の場合、特に分布の型が分っているパラメタのみが未知の場合の最適在庫水準のベイズ的逐次決定については Scarf, Iglehart が需要分布が指数族、範囲分布の族に属し、 θ の事前確率は一般の場合に、各期の最適政策の型(1つの特性値で定まる単純な型になる)やその $n \rightarrow \infty$ の時の状態について研究しているが、この論文では、需要分布がパラメタ θ のポワソン分布で、 θ の事前確率が $\Gamma\left(\frac{1}{\tau}, \nu\right)$ なる特別の場合に最適在庫水準を実際に求める方法を考えている。ただ、モデルを非常に単純化して、品切れ、在庫過剰は各期のはじめに処理されてしまい手持ち在庫量に前期の効果が残らないことを仮定している。

費用はすべて線型と考えるので、第 n 期の最適(ベイズ的)在庫水準 $k_n^0(\phi_n, \nu_n)$ は

$$k_n^0(\phi_n, \nu_n) = G_{P_1 C + P}(\phi_n, \nu_n)$$

ここで、 $G_r(\phi, \nu)$ はパラメタ ϕ, ν をもつ負二項分布のはじめて r に達する点をあらわす。

$$\phi_n = \tau / (1 + n\tau), \quad \nu_n = S_{n-1} + \nu, \quad S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

(x_i は需要), C : 在庫費用 (単価), p : 品切れ費用 (単価)

これは、不完全ベータ関数表や、また ν が整数の時には二項分布を使って、実さいに計算できる。

また、事前パラメタ ϕ, ν が未知の場合には、

$$\hat{\phi} = \left(1 - \frac{\bar{x}_n}{\hat{\sigma}_n^2}\right)^+, \quad \hat{\nu} = \bar{x}_n(1 - \hat{\phi}) / \hat{\phi} \quad (\hat{\phi} > 0 \text{ の時})$$

$$\text{ただし } \bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

と置いてやれば、 $n \rightarrow \infty$ の時、近似的に

$$k_n^0(\hat{\phi}_n, \hat{\nu}_n) \approx k_n^0(\phi_n, \nu_n) \quad a. s.$$

となるが、 $k_n^0(\phi_n, \nu_n)$ の値は ν_n の変化に対して非常に敏感で、 ν_n の大きな値に対しては ϕ_n の変化に対して敏感なので、 ν_n, ϕ_n のよい近似が得られないならばこのベイズの決定は意味がなくなる。

(反町迪子)

Plackett, R. L., “Stochastic Models of Capital Investment,” *Journal of Royal Statistical Society (B)*, 31, 1 (1969), 1-28.

[投資/確率過程/応用的]

資本を投資すると、あるランダムな時点 t_1, t_2, \dots, t_n で、あるランダムな大きさの利得が生じる場合を考え、それに対して、

- (1) 利得の発生時点は、パラメタ $\alpha(t)$ のポワソン過程をなす。
- (2) その時点での利得の大きさは確率変数 X とし、すべて同じ分布を持つ。

という仮定をおいて、つぎの問題を考えている。

I (0, τ) 時間区間中に得られる総利得 Y の分布とその近似

X が離散的分布を持つ時は、 $P(X=j) = f_j$ とおき、 $\{f_j\}$ の母関数を $\phi(s)$ とおくと、総利得 Y は複合ポワソン分布を持ち、その確率分布を $\{P_j\}$ 、母関数を $\pi(s)$ とおくと、

$$\pi(s) = \exp[\lambda\{\phi(s) - 1\}]$$

これより、 $\pi'(s) = \lambda \cdot \phi'(s) \cdot \pi(s)$ となり

$$P_{j+1} = \frac{\lambda(f_1 \cdot P_j + 2f_2 \cdot P_{j-1} + 3f_3 \cdot P_{j-2} + \dots)}{j+1}$$

なる再帰式を得る。

X が連続値をとり、確率密度関数 $f(x)$ を持つ時はそのラプラス変換を $m(w)$ とすると、(0, τ) 間の総利得 Y の確率密度関数 $h(y)$ のラプラス変換は、

$$b(w) = \exp[\lambda\{m(w) - 1\}]$$

となり、 $b'(w) = \lambda \cdot m'(w) \cdot b(w)$ であることより

$$y \cdot h(y) = \lambda \left\{ P_0 y \cdot f(y) + \int_0^y x \cdot f(x) h(y-x) dx \right\}$$

なる積分方程式を得る。

$\alpha(t), m(w)$ が固定された時には、複合ポワソン分布は $\tau \rightarrow \infty$ のとき、正規分布に近づく。しかし、実際上、これらの条件が適当でない場合がある。それ

で、たとえば、 X の分布に次のような仮定、

(i) $m(w) = (1 - \delta w)^{-\eta}$ δ : 固定, $\eta \rightarrow 0$

(ii) $(0, \tau)$ 間の利得の期待値は大きい. $\alpha(t)$ または τ が大きい. $\lambda \rightarrow \infty$

(iii) (i) (ii) の極限は $\lambda \cdot \eta \rightarrow \mu > 0$ のようにとる. をおくと, $b(w) = (1 - \delta w)^{-\mu}$ となり, ガンマ分布に近づくことが分る. ただし, これはあとの議論でも述べられているように, X の分布としてガンマ分布を仮定したら Y の分布もガンマ分布に近づいたのであって, X の広い分布に対していえるのではなく, X の分布の型に応じて, いろいろの極限分布が対応するであろう.

II 将来の利得を現時点の価値に直して評価する場合

τ 時間内に n 個の利得が発生した時, その発生時点 T_1, T_2, \dots, T_n は, 独立で, 確率密度 $\phi(x) = \alpha(x)/\lambda$ ($0 < x < \tau$) を持つ. 一方, r を割引き率とすると, 時刻 T での利得 X は現時点では $V = Xe^{-rT}$ の価値を持つと考える.

$n(w)$ を U の分布のラプラス変換とおけば, $(0, \tau)$ 間に得る総割引き利得 $V(r)$ は,

$$c(w) = \exp[\lambda\{n(w) - 1\}]$$

なるラプラス変換をもつ複合ポワソン分布である. U の確率密度は X, T のそれから求められる.

K を初期投資資本, $S(r)$ を τ 時点における (割引き) 残存価値とすると, $(0, \tau)$ 間の割引き純益,

$$N(r) = V(r) + S(r) - K$$

であり, $N(r)$ の分布は $V(r)$ の分布で決まる.

利得の internal rate R の分布は

$$P(R \geq r) = P(N(r) > 0)$$

で求められる.

III すべての利得を再投資する場合

初期投資資本を k とし, 利得が生じたらそれをまた再投資する時, 時点 t の資本を N_t とする.

$N_0 = k$ のとき, N_t の確率母関数を $G_k(s, t)$ とすると,

$$G_k(s, t) = [1 + (s^{-1} - 1) \exp\{\alpha t \eta(s)\}]^{-k}$$

なる近似式を得ている.

同様な確率モデルの取替問題への応用にもふれている.

最後に, 以上の結果を Premium Savings Bonds に応用して, 実際の数値を計算している. c = 金額 \times 年数をいろいろかえて, 利得 (またはその c に対するパーセント) の確率分布や, 割引き率 6%/年のときの利得率の分布や, また割引き率をいろいろかえて, 純利益が正となる確率等を計算している.

(反町迪子)