

2 ユニット冗長システムの信頼度解析†

尾 崎 俊 治*

1. 序 論

2ユニットよりなる冗長システムは信頼度解析において基本的であり、また重要でもある。現実にも多くの分野で用いられている。この論文では、つぎの3つの冗長システムについて解析する。すなわち、

- (i) 2ユニット並列冗長システム
- (ii) 2ユニット待機冗長システム
- (iii) 優先権のある2ユニット待機冗長システム

とくに、モデル (i) に対しては、Gaver [3] がもっとも一般的な解を与えている。また、モデル (ii) に対しては、Srinivasan [8] がもっとも一般的な解を与えている。しかし、モデル (iii) に対しては何ら解析がなされていない。この論文では、上の3つのモデルに共通の再生理論の概念 [1] を用いて、初めてシステム・ダウンになるまでの時間分布の Laplace-Stieltjes (L-S) 変換を与える。ここで用いる方法は直観的であり、また計算も大変簡単である。

上に述べた3つのモデルに共通して、一般につぎのシステムを考える。2ユニットを適当に番号付けして、ユニット1およびユニット2としよう。ユニット1の故障時間は分布 $F_1(t) (t \geq 0)$ にしたがうが、故障したならば直ちに修理を施し、修理時間は分布 $G_1(t) (t \geq 0)$ にしたがうとする。ここで、修理によってユニットの機能は完全に回復するとし、修理の完了したユニットは直ちに稼動できるとする。同様に、ユニット2も故障時間分布 $F_2(t) (t \geq 0)$ を持ち、また修理時間分布 $G_2(t) (t \geq 0)$ を持つとする。さらに、ユニット2もユニット1と同じ機能を有するとする。システム・ダウンとなるのは、2ユニットが同時に故障の状態にあるときであるとする。われわれの関心は、 $t=0$ で2ユニットが稼動の状態にあるとき、初めてシステム・ダウンになるまでの時間である。以下では、各節ごとに各モデルに必要な仮定を付け加える。

2. 2ユニット並列冗長システム

このモデルは2つのユニットを同時に稼動させ、故障したユニットは修理に回し、修理が終了次第直ちに稼動させる。以下同様にして、初めて2つのユニットが故障の状態になるまでの時間分布について研究する。このモデルにおいては、稼動しているユニットの年齢が問題になるので、解析解を得るためには、故障時間分布に対して memoryless の性質を仮定しなければならない。すなわち、

† 1969年3月14日受理。

* 京都大学工学部。現在広島大学工学部。

$$(1) \quad F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}, \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t} \quad (t \geq 0)$$

と仮定する。修理時間分布は任意でよい。時刻 0 より出発して、時刻 t_1 で 1 つのユニットが故障する。そのとき、故障したユニットの修理が完了するまでに、つぎの 2 つの場合が考えられる。1 つは、修理が完了しないうちに、残りのユニットが故障する場合である。このときはシステム・ダウンとなる。いま、ユニット i ($i=1, 2$) が故障したときシステム・ダウンとなる時間分布は上述の議論から、

$$(2) \quad H_1^i(t) = \int_0^t \lambda_j e^{-\lambda_j t} G_i^i(t) dt \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

となる。ここで、 $G_i^i(t) = 1 - G_i(t)$ ($i=1, 2$) を表わす。したがって、その L-S 変換は、

$$(3) \quad h_1^i(t) = \frac{\lambda_j}{s + \lambda_j} [1 - g_i(s + \lambda_j)] \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

となる。ここで、 $g_i(s)$ は $G_i(t)$ の L-S 変換である。一方、もう 1 つは、残りのユニットが故障しないうちに、修理が完了する場合である。いま、ユニット i ($i=1, 2$) が故障したとき、再び 2 ユニットが稼働の状態になるまでの時間分布は、

$$(4) \quad H_2^i(t) = \int_0^t e^{-\lambda_j t} dG_i(t) \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

となり、その L-S 変換は、

$$(5) \quad h_2^i(t) = g_i(s + \lambda_j) \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

となる。後者の場合には、再び 2 ユニットが稼働の状態になり、しかも故障時間分布は memoryless であるから $t=0$ のときと同じ状態になる。これらの挙動を示したのが図 1 である。また、2 ユニットのうちどちらかが故障する時間分布は $F(t) = 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]$ にしたがって、とくにそのユニットが i ($i=1, 2$) である確率は $\lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2)$ (memoryless に注意) である。したがって、初めてシステム・ダウンになるまでの時間分布を $\Phi(t)$ ($t \geq 0$) とすれば、 $\Phi(t)$ はつぎの再生形積分方程式を満たす。すなわち、

$$(6) \quad \Phi(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} F(t) * H_1^i(t) + \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} F(t) * H_2^i(t) * \Phi(t)$$

となる。ここで、 $*$ は分布関数のたたみこみを表わす。 $\Phi(t)$ の L-S 変換を $\varphi(s)$ として、式 (6) を L-S 変換して、 $\varphi(s)$ について解く。さらに、式 (3) および (5) を用いれば、

$$(7) \quad \varphi(s) = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i \lambda_j}{s + \lambda_j} [1 - g_i(s + \lambda_j)]}{s + \lambda_1 + \lambda_2 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i(s + \lambda_j)} \quad (j \neq i)$$

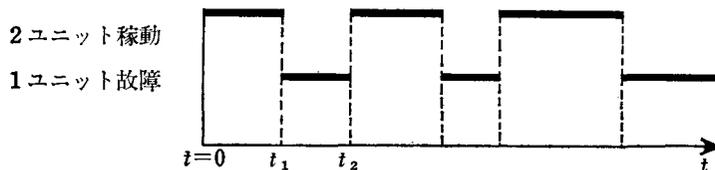


図 1 2 ユニット並列冗長システムの挙動

を得る。式 (7) の $\varphi(s)$ が初めてシステム・ダウンとなるまでの時間分布の L-S 変換である。初めてシステム・ダウンとなるまでの平均時間 \hat{T} は、

$$(8) \quad \hat{T} = - \left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1 + \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\lambda_j} [1 - g_i(\lambda_j)]}{\sum_{i=1}^2 \lambda_i [1 - g_i(\lambda_j)]} \quad (j \neq i)$$

となる。これらの結果 (7) および (8) は既に Gaver [3] によって与えられているが、ここで用いた方法は大変簡単であり、直観的でもある。

Gaver [3] はさらに、このモデルに過負荷という概念を導入した。すなわち、ユニット i ($i=1, 2$) が故障したとき、残りのユニット j ($j \neq i$) に負担が多くなり故障しやすくなる。この場合、過負荷の間、時間に関係なく生ずる稼働中のユニットの過負荷により故障する確率を α_j とし、時刻 t までに過負荷により故障する確率を $S_j(t)$ とすれば、そのとき式 (3) および (5) は

$$(9) \quad h_1^i(s) = \alpha_j + (1 - \alpha_j) \int_0^{\infty} e^{-st} \lambda_j e^{-\lambda_j t} G_i^f(t) S_j^f(t) dt \\ + (1 - \alpha_j) \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda_j t} G_i^f(t) dS_j(t) \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

および、

$$(10) \quad h_2^i(s) = (1 - \alpha_j) \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda_j t} S_j^f(t) dG_i(t) \quad (i=1, 2; j \neq i)$$

となる。ここで、 $S_j^f(t) = 1 - S_j(t)$ である。したがって、このモデルに対しても直ちに式 (7) および (8) より $\varphi(s)$ および \hat{T} を得ることができるが、結果は省略する。

3. 2 ユニット待機冗長システム

このモデルは最初ユニット 1 を稼働させ、ユニット 1 が故障したら、直ちにユニット 2 を稼働させ、同時にユニット 1 の修理を始める。ユニット 1 の修理が終って、それからユニット 2 が故障したら、直ちにユニット 1 に切り換えて、ユニット 1 を稼働させる。以下、ユニット 1 およびユニット 2 を交互に稼働させるとする。システム・ダウンとなるのは、2 ユニットが同時に故障の状態にあるときであるから、修理が完了しないうちに、稼働中のユニットが故障するときである。このモデルにおいては、memoryless の仮定を必要としないので、もっとも一般的な仮定、すなわち各ユニットの故障および修理が任意の分布の場合について解析できる。

さて、 $t=0$ で出発してユニット 1 が初めて故障するまでの時間は分布 $F_1(t)$ にしたがうから、初めてシステム・ダウンとなるまでの時間分布 $\Phi(t)$ は、

$$(11) \quad \Phi(t) = F_1(t) * \Phi_1(t)$$

となる。ここで、 $\Phi_1(t)$ はユニット 1 が故障した時点（すなわち、ユニット 1 が修理を始めた時点）より出発して、初めてシステム・ダウンとなるまでの時間分布である。 $\Phi_1(t)$ については、モデル (i) と同じ考え方でそのままシステム・ダウンとなるか、ユニット 1 の修理が完了して、そののちにユニット 2 が故障して、ユニット 1 が稼働を始めるかである。そのままシステム・ダ

ウンとなるのは、ユニット1の修理が完了しないうちに、ユニット2が故障する場合であるから、その時間分布は、

$$(12) \quad H_1(t) = \int_0^t G_1^c(t) dF_2(t)$$

となり、その L-S 変換は、

$$(13) \quad h_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_1^c(t) dF_2(t)$$

となる。一方、ユニット1の修理が完了して、そののちにユニット2が故障する時間分布は、

$$(14) \quad H_2(t) = \int_0^t G_1(t) dF_2(t)$$

となり、その L-S 変換は、

$$(15) \quad h_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_1(t) dF_2(t)$$

となる。さらに、後者の場合にもユニット1とユニット2が入れ替るだけで同様なことが起こる。すなわち、第1の場合はユニット2の修理が完了しないうちに、ユニット1の故障が起こる場合であるから、その時間分布は、

$$(16) \quad H_3(t) = \int_0^t G_2^c(t) dF_1(t)$$

となり、その L-S 変換は、

$$(17) \quad h_3(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_2^c(t) dF_1(t)$$

となる。第2の場合はユニット2の修理が完了して、そののちにユニット1が故障する時間分布は、

$$(18) \quad H_4(t) = \int_0^t G_2(t) dF_1(t)$$

となり、その L-S 変換は、

$$(19) \quad h_4(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_2(t) dF_1(t)$$

となる。一方、後者の場合が起こった場合には再び分布 $\Phi_1(t)$ にしたがう。すなわち、この $\Phi_1(t)$ は図2のような挙動をとる。あるいは、樹形図状に書けば、図3のようになる。よって、 $\Phi_1(t)$ に関する再生形積分方程式を得る。すなわち、

$$(20) \quad \Phi_1(t) = H_1(t) + H_2(t) * H_3(t) + H_2(t) * H_4(t) * \Phi_1(t)$$

となる。 $\Phi(t)$ および $\Phi_1(t)$ の L-S 変換をそれぞれ $\varphi(s)$ および $\varphi_1(s)$ とすれば、式(11)および(20)から、

$$(21) \quad \varphi(s) = f_1(s)\varphi_1(s)$$

$$(22) \quad \varphi_1(s) = \frac{h_1(s) + h_2(s)h_3(s)}{1 - h_2(s)h_4(s)}$$

を得る。したがって、

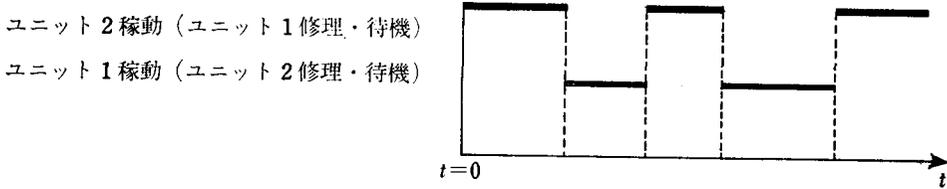


図 2 2 ユニット待機冗長システムの $\Phi_1(t)$ の挙動

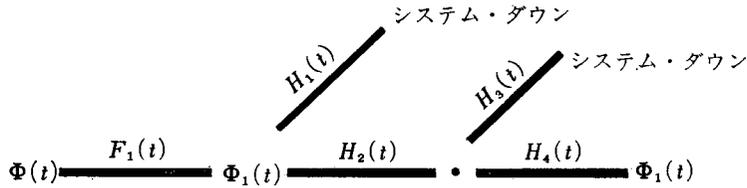


図 3 2 ユニット待機冗長システムの挙動の樹形図

$$(23) \quad \varphi(s) = f_1(s) \frac{h_1(s) + h_2(s)h_3(s)}{1 - h_2(s)h_4(s)}$$

となる。この $\varphi(s)$ が 2 ユニット待機冗長システムの初めてシステム・ダウンとなるまでの時間分布の L-S 変換である。また、その平均時間は、

$$(24) \quad \hat{T} = - \left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}h_2(0)}{1 - h_2(0)h_4(0)}$$

となる。ここで、 $\int_0^\infty t dF_1(t) = 1/\lambda_1$ および $\int_0^\infty t dF_2(t) = 1/\lambda_2$ とする。

4. 優先権のある 2 ユニット待機冗長システム

このモデルはモデル (ii) とほぼ同じであるが、2つのユニットに優先権を付けて、できるだけユニット 1 を用いるようにしたい。すなわち、ユニット 1 が修理中で、もしその修理が完了したならば、稼働中のユニット 2 を停めて、直ちにユニット 1 に切り換えて稼働させる。したがって、ユニット 2 に対しては修理能力は必要でない。また、ユニット 2 の故障時間に対して memoryless の性質を仮定しなければ解析解を得ることができないので、

$$(25) \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t} \quad (t \geq 0)$$

と仮定する。ユニット 1 の故障および修理時間分布に対しては任意の分布でよい。初めてシステム・ダウンとなるまでの時間分布を $\Phi(t)$ とすれば、 $\Phi(t)$ はつぎの再生形積分方程式

$$(26) \quad \Phi(t) = F_1(t) * H_1(t) + F_1(t) * H_2(t) * \Phi(t)$$

を満たす。ここで、 $H_1(t)$ はユニット 1 が分布 $F_1(t)$ にしたがって故障したのちに、ユニット 1 の修理を始めて、修理が完了しないうちに残りのユニット 2 が故障する時間分布であるから、

$$(27) \quad H_1(t) = \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} G_1^c(t) dt$$

となる。その L-S 変換は、

$$(28) \quad h_1(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} [1 - g_1(s + \lambda_2)]$$

となる。一方、 $H_2(t)$ はユニット 1 が分布 $F_1(t)$ にしたがって故障したのちに、ユニット 1 の修理を始めて、残りのユニット 2 が故障しないうちに修理が完了する時間分布であるから、

$$(29) \quad H_2(t) = \int_0^t e^{-\lambda_2 t'} dG_1(t')$$

となり、その L-S 変換は、

$$(30) \quad h_2(s) = g_1(s + \lambda_2)$$

となる。したがって、 $\Phi(t)$ の L-S 変換を $\varphi(s)$ として、式 (26) を L-S 変換して、 $\varphi(s)$ について解けば、

$$(31) \quad \varphi(s) = \frac{f_1(s)h_1(s)}{1 - f_1(s)h_2(s)} \\ = \frac{f_1(s) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} [1 - g_1(s + \lambda_2)]}{1 - f_1(s)g_1(s + \lambda_2)}$$

となる。ただし、 $f_1(s)$ は $F_1(t)$ の L-S 変換である。さらに、その平均時間は、

$$(32) \quad \hat{T} = - \left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{-f_1'(0) + \frac{1}{\lambda_2} [1 - g_1(\lambda_2)]}{1 - g_1(\lambda_2)}$$

となる。ここで、ユニット 1 の平均故障時間を $\int_0^\infty t dF_1(t) = -f_1'(0) = 1/\lambda_1$ とおけば、式 (32) は、

$$(33) \quad \hat{T} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 [1 - g_1(\lambda_2)]}$$

となる。式 (33) の平均時間 \hat{T} は Gaver [2] の求めた同じユニットよりなる優先権のない通常の 2 ユニット待機冗長システムの平均時間と一致する。しかし、Gaver [2] の結果は 2 ユニットともに指数故障を仮定しているのだから、故障時間が memoryless であるから、優先権を考えない場合と同じ結果になる。式 (31) および (33) に示した結果は、ユニット 1 に優先権を与え、しかもユニット 1 の故障は一般分布であることを注意しておく。

5. 結 論

この論文で示した 2 ユニット冗長システムの解析はすべて再生理論の積分方程式の考え方をを用いた方法である。再生理論で言えば、交替再生過程 (alternating renewal process, Cox [1], Chap. 7 参照) の一応用であると考えられる。

ここでは、2 ユニットのもっとも簡単な場合について議論したが、さらに一般に n ユニットの場について解析することもできるが、つぎの機会にこれらの理論の拡張について述べる。

最後に、本研究について多くの貴重な助言を頂いた本学大学院学生朝倉立行氏に厚く感謝する。

参 考 文 献

- [1] Cox, D.R., *Renewal Theory*, Methuen, London, 1962.
- [2] Gaver, D.P., "Time to Failure and Availability of Paralleled Systems with Repair," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-12** (1963), pp. 30-38.
- [3] _____, "Failure Time for a Redundant Repairable System of Two Dissimilar Elements," *Ibid.*, **R-13** (1964), pp. 14-22.
- [4] Liebowitz, B.H., "Reliability Considerations for a Two-Element Redundant System with Generalized Repair Times," *Opns. Res.*, **14** (1966), pp. 233-241.
- [5] Mine, H., S. Osaki, and T. Asakura, "Reliability Considerations on Redundant System with Repair," *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Kyoto University, **29** (1967), pp. 509-529.
- [6] 三根・尾崎, "修理可能な並列冗長システムの信頼性について," *制御工学*, **12** (1968), pp. 265-271.
- [7] Mine, H., S. Osaki, and T. Asakura, "Some Considerations for Multiple-Unit Redundant Systems with Generalized Repair Time Distributions," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-17** (1968), pp. 170-174.
- [8] Srinivasan, V.S., "The Effect of Standby Redundancy in Systems Failure with Repair Maintenance," *Opns. Res.*, **14** (1966), pp. 1024-1036.
- [9] Osaki, S., "Reliability Analysis of a Two-Unit Standby Redundant System with Priority," *Canadian Opnl. Res. Soc. J.*, **8** (1970), 60-62.