

2 ユニット待機冗長システムとその保全について†

三 根 久*
尾 崎 俊 治*
朝 倉 立 行**

1. 序 論

最近のシステムは非常に複雑となり高度化して、信頼性の問題が重要となってきた。システムの信頼度を上昇させるには大きくわけて2つの方策がある。1つはそのシステムを冗長系システムにすることであり、もう1つはそのシステムに保全を施すことである。

冗長系システムの基本の役割を果すものは2ユニット(待機)冗長システムであり、これに関する研究は今までに数多くなされている。たとえば、Gaver [8, 9], Dick [10], Mine, Osaki, and Asakura [12], Liebowitz [11], Srinivasan [13] などがある。もっとも簡単なものはシステムを構成するユニットの故障および修理時間分布が共に指数分布の場合である。それがだんだん拡張されているいろいろな要素がつけ加わったりしている。たとえば、故障あるいは修理時間分布を一般の分布にしたり、ユニットの切替時間(ユニットが故障したとき他のユニットに切替えるときに要する時間)を考慮したり、1つのユニットが故障したとき他のユニットにかかる過負荷を考慮したり、あるいは2つのユニット間に何らかの相関をもたせたりしたときの解析がなされている。現在では2ユニット並列冗長システムにおいては故障および修理時間分布が共に一般の分布にしたがうときの解析はなされていない。しかし、2ユニット待機冗長システムにおいては故障および修理時間分布が共に一般の分布のときの解析がSrinivasan [13] によってなされている。

システムの信頼度上昇のもう1つの方策の保全(Maintenance)の理論も重要であり、信頼性工学の分野において1つの大きな領域を有している。保全は大別して事後保全と予防保全の2つがある。事後保全はシステムや、それを構成するユニットが故障したり、あるいはひどい劣化をしたのちに何らかの修復処置をとるもので、予防保全は故障や、ひどい劣化が生ずる以前に修復処置を行なうものである。高度にそして大規模になったシステムでは1回のシステムダウンが多額の損害を与えるようにたった今日では事後保全よりは予防保全を特に重要視しなければならないであろう。予防保全の基礎となる数学的理論は主としてBarlow and Proschan [2, 3, 4], Barlow and Hunter [1], Flehinger [6, 7] などによって議論されている。

今までの信頼性の研究は冗長系システムと保全とは全く切り離されてなされたもので、両者を同時に扱った研究はなされていない。しかるに信頼性上昇手段の2つの方策のどちらか一方だけ

† 1969年4月3日受理, 1969年6月18日再受理

* 京都大学工学部

** 帝人KK

を実施しても相当な信頼度上昇を得ることが報告されているから、両方の方策を同時に行なったら、その信頼度上昇は一方だけの方策を施したときにくらべて著しいものと期待される。そこで本論文では、冗長系システムに予防保全を行なったときの解析を試みる。冗長系システムとしては2ユニット待機冗長システムをとり、予防保全としては Age Replacement をとるとする。そこで、まずその準備として第2節で2ユニット待機冗長システムの解析を Srinivasan [13] の方法を若干変更した方法で行なう。第3節では、第2節で述べた方法を用いて2ユニット待機冗長システムに Age Replacement を行なったときの解析をする。さらに第4節で Age Replacement を施したことによってたしかに信頼度が上昇するという定理を述べ、それを証明する。

2. 2 ユニット待機冗長システム

この節では2ユニット待機冗長システムの信頼度解析を行なう。このシステムの解析は既に Srinivasan [13] によってなされているが、ここでは次節の解析の準備として簡単に述べる。

〔モデル〕 2つのユニットAおよびBよりなるシステムを考える。時刻 $t=0$ でAユニットを動作させ、Bユニットを待機させておく。Aユニットが故障したら、ただちに修理を施し、同時にBユニットを動作させる。修理の終わったユニットはすぐに待機の状態にし、修理終了後に動作しているユニットが故障したら、待機しているユニットを動作させ、同時に故障したユニットは修理を施す。もし、修理が終わらないうちに、動作中のユニットが故障したらシステムダウン（これを事象Eで表わす）となる。ここでは、初めてシステムダウンとなるまでの時間分布とその平均時間を求めよう。

2つのユニットは共に同じ故障時間分布 $F(t)$ および修理時間分布 $G(t)$ に従い、修理されたユニットの機能は全く新しいものと同様になり、また待機中のユニットは何の変化も受けないとする。ユニットのすべての切換時間は瞬間的であるとする。

〔解析〕 まず最初にサイクルの概念を導入しよう。「Aユニットが動作し始めてから一度だけ故障・修理・待機の状態を経て再び動作し始めるまでを1サイクルと言う。」

プロセス進展の様相の一例を図示すると第1図のようになる。さて、プロセスは第1サイクル、第2サイクルと進んでゆくが、一般につきの量を定義する。

$H_n(t)$: 第 n サイクルが E を生じることなしに時刻 t までに終了する確率、と定義する。まず、 $H_1(t)$ を求める。

(i) $H_1(t)$ の計算

第1サイクルが t までに終了して、しかもその間に E の生じないという事象は第2図のようになる。この図から、ただちに、

$$(1) \quad H_1(t) = \int_0^t dF(x) \int_0^{t-x} G(y) dF(y)$$

となる。いま、

$$(2) \quad \alpha(t) = \int_0^t G(y) dF(y)$$

と定義すると、(1)式は、

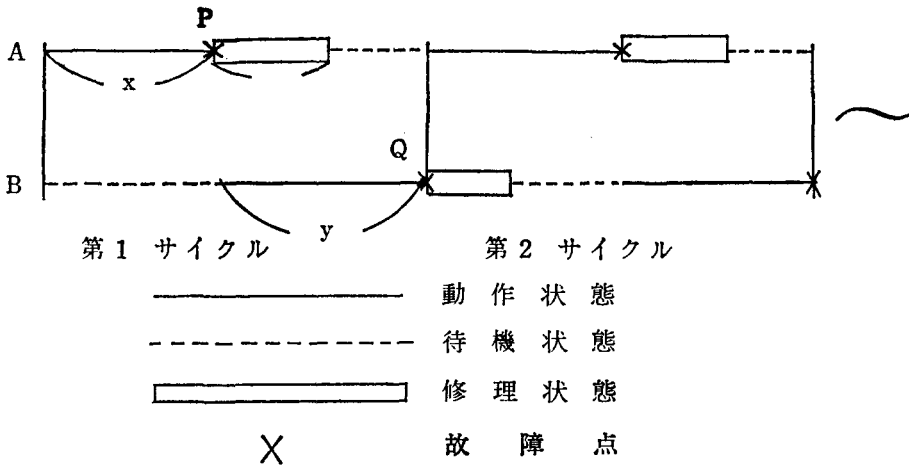


図1 システムの挙動

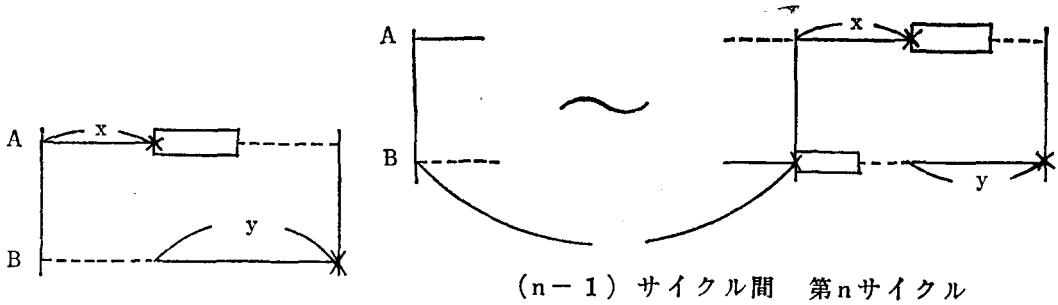


図2 $H_1(t)$ の挙動

図3 $H_n(t)$ の挙動 ($n \geq 2$)

(3) $H_1(t) = \alpha(t) * F(t)$

となる。ここで、* はたたみこみを表わす。(3) 式を Laplace-Stieltjes (L-S.) 変換すれば、

(4) $H_1^*(s) = \alpha^*(s) F^*(s)$

となる。右肩の * 印は L-S. 変換を表わす。

(ii) $H_n(t)$ の計算

$H_n(t)$ ($n \geq 2$) の様相は第3図のようになる。第3図において $(n-1)$ サイクル間は $H_{n-1}(z)$ に従い、残り時間 $t-z$ の間に E の生じることなしに、第 n サイクルが終了する場合であるから、

$$(5) \quad H_n(t) = \int_0^t dH_{n-1}(z) \int_0^{t-z} G(x) dF(x) \int_0^{t-x-z} G(y) dF(y) \\ = H_{n-1}(t) * \alpha(t) * \alpha(t)$$

となる。L-S. 変換すれば、

(6) $H_n^*(s) = H_{n-1}^*(s) (\alpha^*(s))^2$

を得る。したがって、(4) および (6) 式から、

$$(7) \quad H_n^*(s) = \alpha^*(s)^{2n-1} F^*(s)$$

を得る。つぎに E の生じる様相を考える。

$J_n(t)$: 第 $(n-1)$ サイクルまでに E が生じないで、第 n サイクルにおいて時刻 t までに E の生じる確率、

と定義する。最初に $J_1(t)$ を求める。

(iii) $J_1(t)$ の計算

第1サイクルで E の生じる様相は第4図のようになる。Aユニットの修理が終了しないうちにBユニットの故障する確率は $G(y) dF(y)$ で与えられる。ただし、

$$(8) \quad G(y) = 1 - G(y)$$

である。したがって、 $J_1(t)$ は

$$(9) \quad J_1(t) = \int_0^t dF(x) \int_0^{t-x} G(y) dF(y)$$

となる。ここで

$$(10) \quad \beta(t) = \int_0^t G(y) dF(y)$$

と定義すれば、(9) 式とその L-S. 変換は、

$$(11) \quad J_1(t) = \beta(t) * F(t)$$

$$(12) \quad J_1^*(s) = \beta^*(s) F^*(s)$$

となる。

(iv) $J_{n+1}(t)$ の計算

第 $(n+1)$ サイクル ($n \geq 1$) 目に E が生じる様相は2つの場合があり、第5および6図のようになる。第5図と第6図の事象は互いに排反事象であるから、同様にして、

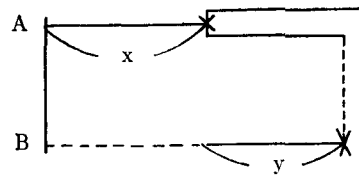
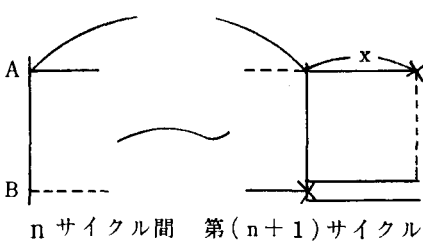
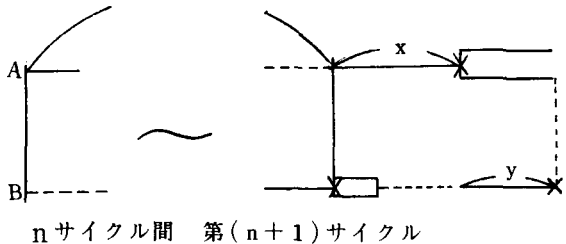


図4 $J_1(t)$ の挙動



n サイクル間 第 (n+1) サイクル



n サイクル間 第 (n+1) サイクル

図5

図6

$$\begin{aligned}
 (13) \quad J_{n+1}(t) &= \int_0^t dH_n(z) \int_0^{t-z} \bar{G}(x) dF(x) \\
 &\quad + \int_0^t dH_n(z) \int_0^{t-z} G(x) dF(x) \int_0^{t-x-z} \bar{G}(y) dF(y) \\
 &= H_n(t) * \beta(t) + H_n(t) * \alpha(t) * \beta(t)
 \end{aligned}$$

となる, L.-S. 変換すれば,

$$(14) \quad J_{n+1}^*(s) = H_n^*(s) \beta^*(s) (1 + \alpha^*(s))$$

を得る. さて,

$J(t)$: 時刻 t までに初めてシステムダウン (すなわち, E が生じる) となる時間分布, とすれば,

$$(15) \quad J(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1}(t) = J_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n+1}(t)$$

となる. L.-S. 変換すれば,

$$(16) \quad J^*(s) = J_1^*(s) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n+1}^*(s)$$

となる. (7), (12) および (14) 式を (16) 式に代入すれば,

$$(17) \quad J^*(s) = \frac{\beta^*(s) F^*(s)}{1 - \alpha^*(s)}$$

を得る. その平均時間は,

$$(18) \quad \hat{T} = - \left. \frac{dJ^*(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

により与えられるから,

$$(19) \quad \hat{T} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \alpha}$$

を得る. ここで,

$$(20) \quad 1/\lambda = \int_0^{\infty} t dF(t)$$

$$(21) \quad \alpha = \int_0^{\infty} G(t) dF(t)$$

である. (19) 式において, 右辺の第 2 項は 2 ユニット冗長システムにすることによって得た平均時間の長さの効果を示す.

さて, 次節ではこのシステムにさらに Maintenance を施す場合の解析を行なう.

3. Age Replacement を施した 2 ユニット待機冗長システム

この節は前節で述べた 2 ユニット待機冗長システムに予防保全として Age Replacement を施したときのモデルを解析する.

〔モデル〕 故障時間分布 $F(t)$, 修理時間分布 $G_1(t)$ および検査時間分布 $G_2(t)$ を持つ2つのユニット (A, B と名づける) より構成されたシステムを考える。

最初時刻 $t=0$ で, どちらかの一方のユニット (ここではAユニット) を動作させ, 他のユニットは待機の状態にしておく。待機しているユニットがある場合に動作しているユニットが故障したらすぐに修理にまわして, 待機しているユニットを動作させる。あるいは, ある一定時間 t_0 (これを Replacement Interval という) の間故障することなく動作しつづけたら, この時点で直ちに検査にまわして待機しているユニットを動作させる。待機しているユニットがない場合, すなわち2つのうち1つのユニットが修理または検査の状態にあるときに動作しているユニットが故障したら, このとき2つのユニットが同時に動作していないことになるのでシステムダウンとなる。動作しているユニットが一定時間 t_0 だけ故障することなしに動作しつづけても, このときには待機しているユニットがないので検査はしないでそのまま故障するまで動作させることになる。この待機しているユニットがないために検査する時点が来ても取替をしないでそのまま動作させつづけるような時点を仮の検査時点 (Virtual Inspection Point) という。

ユニットを取替えるに要する時間は故障, 修理および検査時間に較べて小さいので無視できるものとする。また待機している限りユニットは何の変化も受けないとする。さらに修理または検査が終わったユニットは全く新しいものと同じになり, ただちに待機の状態に入るものとする。

このとき2つのユニットがはじめて同時に動作不可能になる (これを事象 E で示す) までの時間分布の L.S. 変換形を求め, さらにその平均時間を Replacement Interval t_0 の関数として求める。

故障する前に予め検査して長い修理時間をとるのをさけて, できるだけシステムダウンになるまでの時間を引き伸ばそうというこのモデルの意図から $G_1(t) \leq G_2(t)$ と仮定する。また, 解析の便宜上 Replacement Interval t_0 を確率変数とみなして一般分布 $A(t)$ に従うとする。

〔解析〕 前節と同じようにまずサイクルの概念を導入する。「Aユニットが動作しはじめてから一度だけ故障・修理 (または検査)・待機の状態を経てから再び動作するまでをサイクルという。」

プロセスの進展の様相の一例を第7図で示す。

第7図はつぎのように説明される。時刻 $t=0$ でAユニットが動作しはじめ, x 時間動作して点 P で故障し, Bユニットが動作しはじめ, Aユニットは修理を受ける。その修理も z 時間後に終了し, しばらく待機する。Bユニットが y 時間動作しつづけて点 Q で故障したらAユニットが再び動作しはじめて, ここで第1サイクルは終了し第2サイクルに入る。上の図では第2サイクルはBユニットの修理状態から出発している。以下このプロセスがつづく。

記号をつぎのように定義する。

$u_n(t)$: 第 n サイクルが時刻 t までに E を生じることなしにBユニットの故障によって終了する確率,

$v_n(t)$: 第 n サイクルが時刻 t までに E を生じることなしにBユニットの検査によって完了する確率,

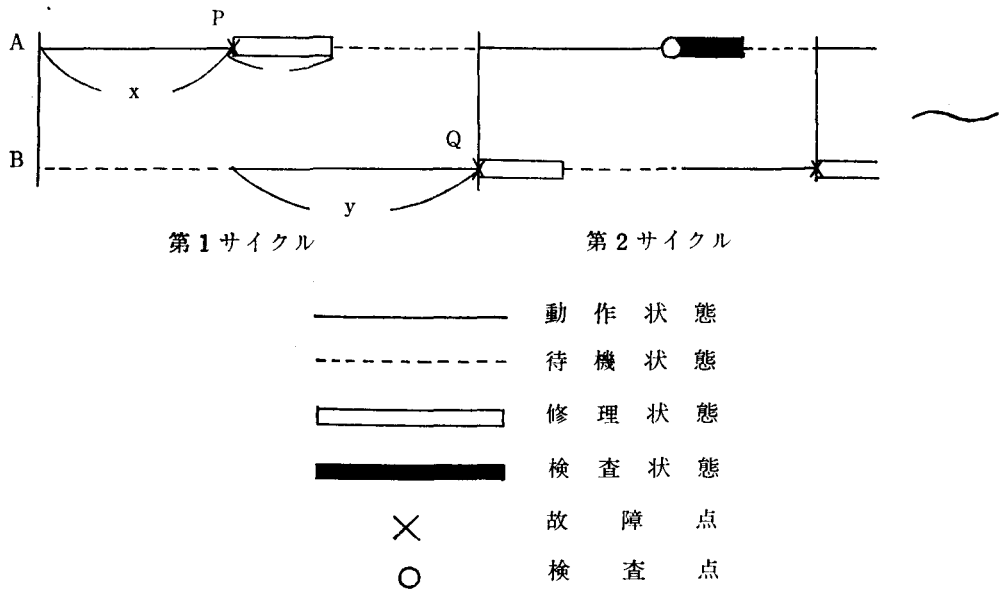


図7 システムの挙動

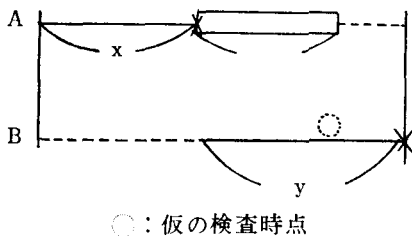


図8

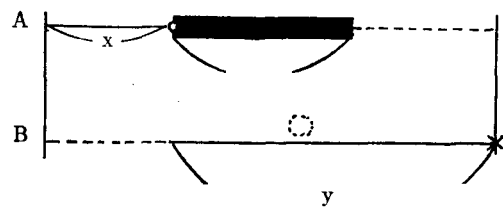


図9

としよう。まず、 $u_1(t)$ および $v_1(t)$ を求める。

(i) $u_1(t)$ の計算

$u_1(t)$ を求めるには第8および9図によって示されるような2つの様相を考えなければならない。

前節で示した考え方により、第8および9図から、

$$(22) \quad u_1(t) = \int_0^t \bar{A}(x) dF(x) \left\{ \int_0^{t-x} G_1(y) \bar{A}(y) dF(y) + \int_0^{t-x} dF(y) \int_0^y A(z) dG_1(z) \right\} \\ + \int_0^t \bar{F}(x) dA(x) \left\{ \int_0^{t-x} G_2(y) \bar{A}(y) dF(y) + \int_0^{t-x} dF(y) \int_0^y A(z) dG_2(z) \right\}$$

を得る。ここで、つぎの記号を導入する、

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \alpha_i(t) &= \int_0^t \bar{F}(x) G_i(x) dA(x) & (i=1, 2) \\
 \beta_1(t) &= \int_0^t \bar{A}(x) dF(x), \quad \beta_2(t) = \int_0^t \bar{F}(x) dA(x) \\
 \varphi_i(t) &= \int_0^t A(x) dG_i(x) & (i=1, 2) \\
 \gamma_i(t) &= \int_0^t (G_i(x) \bar{A}(x) + \varphi_i(x)) dF(x) & (i=1, 2)
 \end{aligned}$$

とくに、 $\varphi_i(t)$ は仮の点検時点があるときに必要である。(23)の諸式を用いて(22)式を書き直せば、

$$(24) \quad u_1(t) = \sum_{i=1}^2 \beta_i(t) * \gamma_i(t)$$

を得る。

(ii) $v_1(t)$ の計算

(i)と同じように第10および11図より

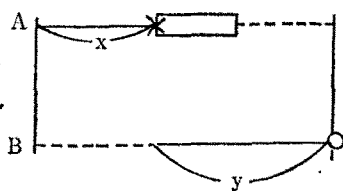


図10

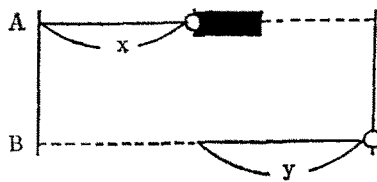


図11

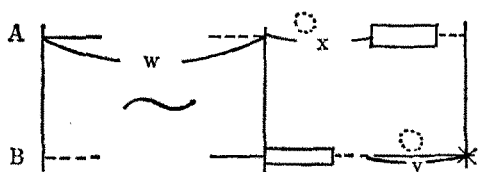


図12

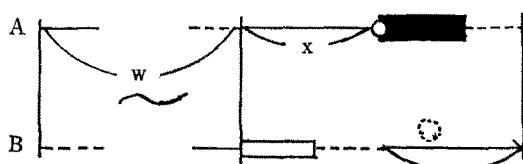


図13

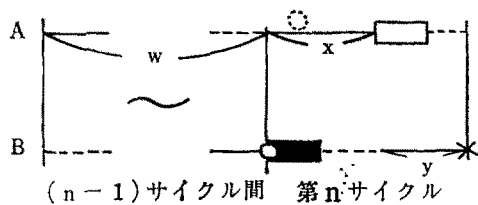


図14

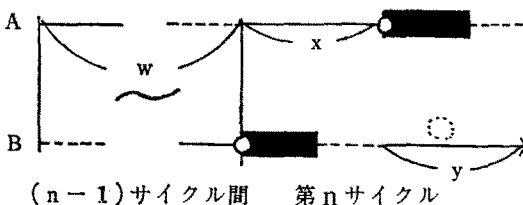


図15

$$(25) \quad v_1(t) = \int_0^t \bar{A}(x) dF(x) \int_0^{t-x} G_1(y) \bar{F}(y) dA(y) + \int_0^t \bar{F}(x) dA(x) \int_0^{t-x} G_2(y) \bar{F}(y) dA(y) \\ = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) * \beta_i(t)$$

となる。

つぎに, $u_n(t), v_n(t) (n \geq 2)$ を求める。

$$(iii) \quad u_n(t) (t \geq 0)$$

$u_n(t)$ を求めるにはつぎの図で示されるように 4 通り場合を考えなければならない。これらの第12, 13, 14および15図より,

$$(26) \quad u_n(t) = \int_0^t du_{n-1}(w) \left[\int_0^{t-w} (G_1(x) \bar{A}(x) + \varphi_1(x)) dF(x) \int_0^{t-w-x} (G_1(y) A(y) + \varphi_1(y)) dF(y) \right. \\ \left. + \int_0^{t-w} G_1(x) \bar{F}(x) dA(x) \int_0^{t-w-x} (G_2(y) \bar{A}(y) + \varphi_2(y)) dF(y) \right] \\ + \int_0^t dv_{n-1}(w) \left[\int_0^{t-w} (G_2(x) \bar{A}(x) + \varphi_2(x)) dF(x) \int_0^{t-w-x} (G_1(y) A(y) + \varphi_1(y)) dF(y) \right. \\ \left. + \int_0^{t-w} G_2(x) \bar{F}(x) dA(x) \int_0^{t-w-x} (G_2(y) \bar{A}(y) + \varphi_2(y)) dF(y) \right]$$

を得る。したがって

$$(27) \quad a(t) = \gamma_1(t) * \gamma_1(t) + \alpha_1(t) * \gamma_2(t) \\ b(t) = \gamma_1(t) * \gamma_2(t) + \alpha_2(t) * \gamma_2(t)$$

とおくと,

$$(28) \quad u_n(t) = a(t) * u_{n-1}(t) + b(t) * v_{n-1}(t)$$

を得る。全く同様にして

$$(29) \quad c(t) = \alpha_1(t) * \gamma_1(t) + \alpha_1(t) * \alpha_2(t) \\ d(t) = \alpha_1(t) * \gamma_2(t) + \alpha_2(t) * \alpha_2(t)$$

とすれば,

$$(30) \quad v_n(t) = c(t) * u_{n-1}(t) + d(t) * v_{n-1}(t)$$

となる。(28) および (30) 式を L-S. 変換すれば,

$$(31) \quad u_n(s) = a^*(s) u_{n-1}^*(s) + b^*(s) v_{n-1}^*(s) \\ v_n(s) = c^*(s) u_{n-1}^*(s) + d^*(s) v_{n-1}^*(s)$$

となる。ここで,

$$(32) \quad a^*(s) = (\gamma_1^*(s))^2 + \alpha_1^*(s) \gamma_2^*(s) \\ b^*(s) = \gamma_1^*(s) \gamma_2^*(s) + \alpha_2^*(s) \gamma_2^*(s) \\ c^*(s) = \alpha_1^*(s) \gamma_1^*(s) + \alpha_1^*(s) \alpha_2^*(s) \\ d^*(s) = \alpha_1^*(s) \gamma_2^*(s) + (\alpha_2^*(s))^2$$

である。(31) 式は連立差分方程式であるからつぎの特性方程式

$$(33) \quad \rho^2 - (a^*(s) + d^*(s))\rho + (a^*(s)d^*(s) - b^*(s)c^*(s)) = 0$$

の2根を ρ_1 および ρ_2 とすれば,

$$(34) \quad \begin{aligned} u_n^*(s) &= C_1 \rho_1^n + C_2 \rho_2^n \\ v_n^*(s) &= C_1 \rho_1^n + C_2 \rho_2^n \end{aligned}$$

を得る。ただし,

$$(35) \quad \begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{\rho_1 - a^*(s)}{b^*(s)} \right) C_1, \quad C_2 = \left(\frac{\rho_2 - a^*(s)}{b^*(s)} \right) C_2 \\ C_1 &= \frac{(\rho_2 - a^*(s))u_1^*(s) - b^*(s)v_1^*(s)}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)} \\ C_2 &= \frac{-(\rho_1 - a^*(s))u_1^*(s) + b^*(s)v_1^*(s)}{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)} \end{aligned}$$

である。

さて, つぎに E の生じる様相を考える。

$J_1(t)$: 第1サイクルで E が生じ, しかもそれが t までに生じる確率, とする。第1サイクルで E が生じる様相はつぎの第16および17図で示される。これらの2つの図より,

$$(36) \quad J_1(t) = \int_0^t A(x) dF(x) \int_0^{t-x} G_1(y) dF(y) + \int_0^t F(x) dA(x) \int_0^{t-x} G_2(y) dF(y)$$

となる。ここで,

$$(37) \quad \theta_i(t) = \int_0^t G_i(x) dF(x) \quad (i=1, 2)$$

とおくと,

$$(38) \quad J_1(t) = \sum_{i=1}^2 \beta_i(t) * \theta_i(t)$$

となる。L-S. 変換すると,

$$(39) \quad J_1^*(s) = \sum_{i=1}^2 \beta_i^*(s) \theta_i^*(s)$$

を得る。

$J_{n+1}(t)$: 第 n サイクルまでに E が生じないで, 第 $(n+1)$ サイクル目に E が生じかつそれが時刻 t までに生じる確率 ($n \geq 1$),

とする。 $J_{n+1}(t)$ を求めるには, つぎの6つの様相を考えなければならない。したがって, これ

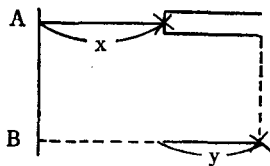


図 16

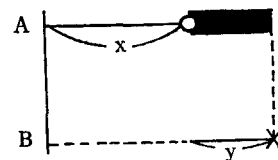


図 17

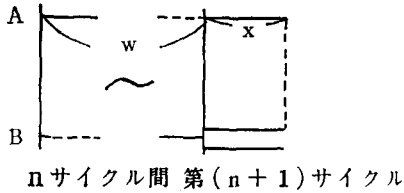


図18

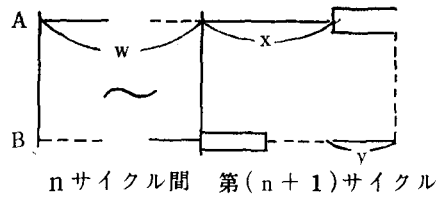


図19

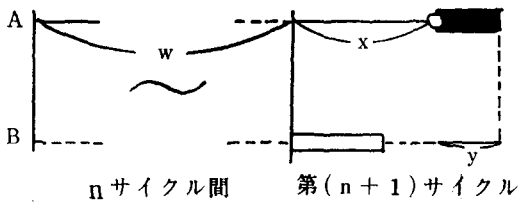


図20

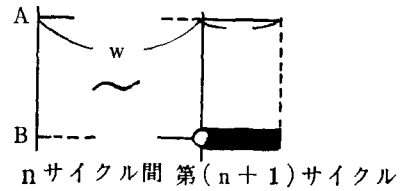


図21

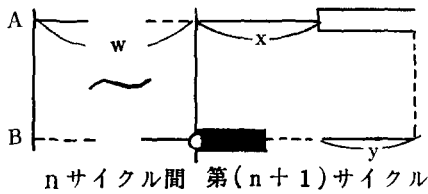


図22

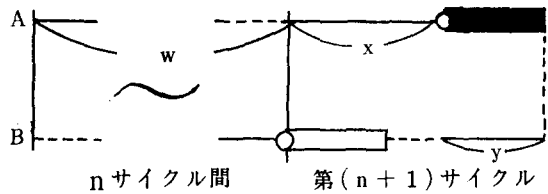


図23

らの図より,

$$\begin{aligned}
 (40) \quad J_{n+1}(t) &= \int_0^t du_n(w) \int_0^{t-w} G_1(x) dF(x) + \int_0^t du_n(w) \int_0^{t-w} (G_1(x) A(x) + \varphi_1(x)) dF(x) \\
 &\quad \times \int_0^{t-w-x} G_1(y) dF(y) + \int_0^t du_n(w) \int_0^{t-w} G_1(x) F(x) dA(x) \int_0^{t-w-x} G_2(y) dF(y) \\
 &\quad + \int_0^t dv_n(w) \int_0^{t-w} G_2(x) dF(x) + \int_0^t dv_n(w) \int_0^{t-w} (G_2(x) A(x) + \varphi_2(x)) dF(x) \\
 &\quad \times \int_0^{t-w-x} G_1(y) dF(y) + \int_0^t dv_n(w) \int_0^{t-w} G_2(x) F(x) dG(x) \int_0^{t-w-x} G_2(y) dF(y) \\
 &= \{\theta_1(t) + \gamma_1(t) * \theta_1(t) + \alpha_1(t) * \theta_2(t)\} * u_n(t)
 \end{aligned}$$

$$+ \{\theta_2(t) + \gamma_2(t) * \theta_1(t) + \alpha_2(t) * \theta_2(t)\} * v_n(t)$$

となる. L.-S. 変換して,

$$(41) \quad J_{n+1}^*(s) = (\theta_1^*(s) + \gamma_1^*(s) \theta_1^*(s) + \alpha_1^*(s) \theta_2^*(s)) u_n^*(s) \\ + (\theta_2^*(s) + \gamma_2^*(s) \theta_1^*(s) + \alpha_2^*(s) \theta_2^*(s)) v_n^*(s)$$

を得る. したがって

$J(t)$: E の生じるまでの時間の分布関数とすれば,

$$J(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1}(t) = J_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n+1}(t)$$

となる. L.-S. 変換すれば,

$$(42) \quad J^*(s) = J_1^*(s) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n+1}^*(s)$$

を得る. いま簡略化のため,

$$(43) \quad A = \theta_1^*(s) + \gamma_1^*(s) \theta_1^*(s) + \alpha_1^*(s) \theta_2^*(s) \\ B = \theta_2^*(s) + \gamma_2^*(s) \theta_1^*(s) + \alpha_2^*(s) \theta_2^*(s)$$

とおくと,

$$(44) \quad J_{n+1}^*(s) = A u_n^*(s) + B v_n^*(s)$$

となる. したがって, (34) および (44) 式より,

$$(45) \quad \sum_{n=1}^{\infty} J_{n+1}^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (A u_n^*(s) + B v_n^*(s)) \\ = A \left\{ C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_2^n \right\} + B \left\{ C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_2^n \right\} \\ = A \left\{ \frac{\rho_1}{1-\rho_1} C_1 + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} C_2 \right\} + B \left\{ \frac{\rho_1}{1-\rho_1} C_1 + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} C_2 \right\}$$

を得る. しかるに

$$(46) \quad \rho_1 + \rho_2 = a^*(s) + d^*(s) \\ \rho_1 \rho_2 = a^*(s) d^*(s) - b^*(s) c^*(s)$$

であるから, (32), (35), (39), (45), (46) および (42) 式により, 結局つぎの式を得る.

$$(47) \quad J^*(s) = \{[(1-\alpha_2^*(s)) \beta_1^*(s) + \gamma_2^*(s) \beta_2^*(s)] \theta_1^*(s) + \{\alpha_1^*(s) \beta_1^*(s) \\ + (1-\gamma_1^*(s)) \beta_2^*(s)\} \theta_2^*(s)\} / [(1-\gamma_1^*(s)) (1-\alpha_2^*(s)) - \alpha_1^*(s) \gamma_2^*(s)]$$

これが, 最初のシステムダウンまでの時間分布の L.-S. 変換形である. さらに, $J^*(0) = 1$ は容易に立証できる (付録参照).

つぎに E が生じるまでの平均時間 \hat{T} を求める. 記号簡略化のため,

$$(48) \quad \alpha_i^*(0) = \alpha_i, \quad \beta_i^*(0) = \beta_i \quad (i=1, 2)$$

$$-\frac{d\alpha_i^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \alpha'_i, \quad -\frac{d\beta_i^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \beta'_i \quad (i=1, 2)$$

とする。これらの記号はその他の、 γ_i, θ_i ($i=1, 2$) についても同様である。

$$(49) \quad \hat{T} = -\frac{dJ^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} \\ = \beta'_1 + \beta'_2 + \frac{(\beta_1\theta_2 + \gamma_2)(\alpha'_1 + \gamma'_1 + \theta'_1) + (1 - \gamma_1 - \beta_1\theta_1)(\alpha'_2 + \gamma'_2 + \theta'_2)}{(1 - \gamma_1)\theta_2 + \gamma_2\theta_1}$$

を得る。いままでは、 t_0 は確率変数であったが実際は一定の値であるから、

$$(50) \quad A(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

でなければならない。このとき、

$$(51) \quad \beta_1 = F(t_0), \quad \beta_2 = 1 - F(t_0) \equiv \bar{F}(t_0) \\ \beta'_1 + \beta'_2 = \int_0^{t_0} F(t) dt \\ G_i \equiv G_i(t_0), \quad \bar{G}_i \equiv 1 - G_i \\ \alpha_i + \theta_i + \gamma_i = 1 \\ \alpha'_i + \theta'_i + \gamma'_i = (\beta'_1 + \beta'_2)G_i + \lambda \bar{G}_i \quad (i=1, 2)$$

となり、(49) 式は、

$$(52) \quad \hat{T} = \left(\frac{1 + \theta_1}{\theta_1}\right) \frac{1}{\lambda} + \frac{(\theta_1 + G_1) \left\{ \theta_1(\beta'_1 + \beta'_2) - \frac{1}{\lambda}(\beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2) \right\}}{\theta_1 \{ \theta_1 + \beta_2(G_1\theta_2 - G_2\theta_1) \}}$$

となる。右辺の第1項は Replacement Interval t_0 には無関係で、2 ユニット待機冗長システムの最初のシステムダウンまでの平均時間、すなわち (19) 式と一致する。(52) 式の右辺の第2項は Age Replacement を施したことによって得られる補正項を示す。

とくに $t_0 \rightarrow \infty$ とすると、すなわち Age Replacement を行なわないと、(52) 式の右辺の第2項は0となり、(19) 式と一致する。

次節では、(52) 式の右辺の第2項を正にする t_0 が存在するとを証明する。

4. Age Replacement の効果

Age Replacement は動作時間がたつにつれて故障しやすくなるものにも有効な予防保全政策である。すなわち、Failure Rate を $r(t)$ とする。ここで、

$$r(t) = f(t)/F(t) \\ f(t) = dF(t)/dt$$

である。 $r(t) dt$ は時刻 t までに故障しなかったという条件のもとで $(t, t+dt)$ で故障する確率を示しているから、動作時間がたつにつれて故障しやすくなるのは $r(t)$ が単調増加であることを意味している。このような性質を持つ $r(t)$ を IFR (Increasing Failure Rate) という (例えば、Barlow and Proschan [4] 参照)。

〔定理〕 2 ユニット待機冗長システムに Age Replacement を行なうとき、ユニットの Failure Rate $r(t)$ が IFR で非有界であるならばある適当な Replacement Interval t_0 をとれば、システムダウンまでの時間の期待値が大きくなる。

〔証明〕 (52) 式の右辺の第2項、すなわち補正項において、

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \theta_1 \{ \theta_1 + \beta_2 (G_1 \theta_2 - \theta_1 G_2) \} \\ &= \theta_1 \{ (1 - \beta_2 G_2) \theta_1 + \beta_2 G_1 \theta_2 \} \\ &= \theta_1 \{ (1 - \bar{F}(t_0) G_2(t_0)) \theta_1 + \bar{F}(t_0) G_1(t_0) \theta_2 \} \end{aligned}$$

となるので、明らかに分母は正となる。分子の $\theta_1 + G_1$ も正であるから、

$$p(t_0) = \theta_1 (\beta'_1 + \beta'_2) - \frac{1}{\lambda} (\beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_2)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} p(t_0) &= \theta_1 \int_0^{t_0} \bar{F}(t) dt - \frac{1}{\lambda} \{ (1 - \bar{F}(t_0)) \theta_1 + \bar{F}(t_0) \theta_2 \} \\ &= \frac{1}{\lambda} (\theta_1 - \theta_2) \bar{F}(t_0) - \theta_1 \int_{t_0}^{\infty} \bar{F}(t) dt \end{aligned}$$

となる。一方、

$$p(0) = -\theta_2 / \lambda < 0$$

$$p(\infty) = 0$$

$$p'(t_0) = \frac{p(t_0)}{dt_0} = -\frac{1}{\lambda} (\theta_1 - \theta_2) f(t_0) + \theta_1 \bar{F}(t_0) = \bar{F}(t_0) \left\{ \theta_1 - \frac{1}{\lambda} (\theta_1 - \theta_2) r(t_0) \right\}$$

となる。 $G_1(t) \leq G_2(t)$ であるから、 $\theta_1 > \theta_2$ である。したがって、仮定より $r(t)$ は IFR で $r(t)$

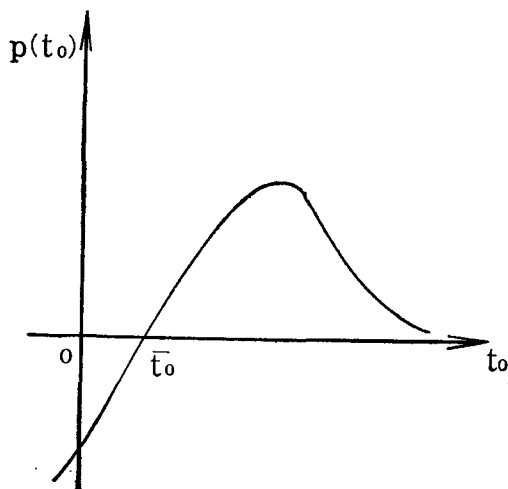


図24 Replacement Interval t_0 の関数としての $p(t_0)$

$t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) であるから, $p'(t_0) = 0$ をみたす解が一意に存在する. したがって, $p(t_0)$ は第24図のようになる. この図で, t_0 は $p(t_0) = 0$ をみたすものである. したがって, いま Replacement Interval を $t_0 > t_0$ ととれば, 補正項は正になるから Age Replacement の効果はでてくる.

付 録

[$J^*(0) = 1$ の証明]

(48) 式の簡略化された記号を使う. (47) 式において $s=0$ とおくと,

$$\text{分母} = 1 - \gamma_1 - \alpha_2 + \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2$$

となる. ところが,

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \int_0^\infty G_i(t) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^\infty dF(t) \int_0^t A(x) dG_i(x) \\ &= \int_0^\infty G_i(t) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^\infty A(x) dG_i(x) \int_x^\infty dF(t) \\ &= \int_0^\infty G_i(t) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^\infty \bar{F}(t) A(t) dG_i(t) \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \int_0^\infty \bar{F}(t) G_i(t) dA(t) \\ &= - \int_0^\infty G_i(t) A(t) d\bar{F}(t) - \int_0^\infty A(t) \bar{F}(t) dG_i(t) \\ &= \int_0^\infty G_i(t) A(t) dF(t) - \int_0^\infty A(t) \bar{F}(t) dG_i(t) \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

$$\theta_i = \int_0^\infty \bar{G}_i(t) dF(t)$$

であるから,

$$\alpha_i + \gamma_i + \theta_i = \int_0^\infty dF(t) = 1 \quad (i=1, 2)$$

となる. 一方, 上式を用いて

$$1 - \alpha_2 = \gamma_2 + \theta_2$$

$$\alpha_1 = 1 - \gamma_1 - \theta_1$$

となるから,

$$\begin{aligned} \text{分母} &= (\gamma_2 + \theta_2)(1 - \gamma_1) - (1 - \gamma_1 - \theta_1)\gamma_2 \\ &= (1 - \gamma_1)\theta_2 + \gamma_2\theta_1 \\ \text{分子} &= \{(\gamma_2 + \theta_2)\beta_1 + \gamma_2(1 - \beta_1)\}\theta_1 \\ &\quad + \{(1 - \gamma_1 - \theta_1)\beta_1 + (1 - \gamma_1)(1 - \beta_1)\}\theta_1 \\ &= (\beta_1\gamma_2 + \beta_1\theta_2 + \gamma_2 - \gamma_2\beta_1)\theta_1 \\ &\quad + (\beta_1 - \beta_1\gamma_1 - \beta_1\theta_1 + 1 - \gamma_1 - \beta_1 + \beta_1\gamma_1)\theta_2 \\ &= (1 - \gamma_1)\theta_2 + \gamma_2\theta_1 \end{aligned}$$

となる. したがって, $J^*(0) = 1$ となる.

参 考 文 献

- [1] Barlow, R.E. and L.C. Hunter, "Optimum Preventive Maintenance Policies," *Opns. Res.*, **8** (1960), 90-100.
- [2] Barlow, R.E. and F. Proschan, "Planned Replacement," in *Studies in Applied Probability and Management Science*, Arrow, Karlin, and Scarf (eds.), Stanford University Press, Stanford, California, 1962.
- [3] —, "Comparison of Replacement Policies, and Renewal Theory Implications," *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 577-589.
- [4] —, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York, 1965.
- [5] Dick, R.S., "The Reliability of Repairable Complex Systems, Part B: The Dissimilar Machine Case," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-12** (1963), 1-8.
- [6] Flehinger, B.J., "A General Model for the Reliability Analysis of Systems under Various Preventive Maintenance Policies," *Ann. Math. Statist.*, **33** (1962), 137-156.
- [7] —, "A Markovian Model for the Analysis of the Effect of Marginal Testing on System Reliability," *Ibid.*, **33** (1963), 754-766.
- [8] Gaver, D.P., "Time to Failure and Availability of Paralleled Systems With Repair," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-12** (1963), 30-38.
- [9] —, "Failure Time for a Redundant Repairable System of Two Dissimilar Elements," *Ibid.*, **R-13** (1964), 14-22.
- [10] Harris, R., "Reliability Applications of a Bivariate Exponential Distribution," *Opns. Res.*, **16** (1968), 18-27.
- [11] Liebowitz, B.H., "Reliability Considerations for a Two Element Redundant System with Generalized Repair Times," *Opns. Res.*, **14** (1966), 233-241.
- [12] Mine, H., S. Osaki, and T. Asakura, "Reliability Considerations on Redundant Systems with Repair," *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, **29** (1967), 509-529.
- [13] Srinivasan, V.S., "The Effect of Standby Redundancy in System's Failure with Repair Maintenance," *Opns. Res.*, **14** (1966), 1024-1036.