経営科学　第13巻　第2号（1970年1月）

0-1変数非線形計画問題に対するブール代数的解法†

三　根　　久*
成　久　洋　之*

1. はしがき

さきに，著者は（0-1）変数線形計画問題に対するブール代数的解法アルゴリズム[8]を提案したが，その手法の特徴は線形な目標関数がつねに正係数の関数すなわち単調増加関数に変換できるために，与えられた条件式をブール条件式に変換して，それを最小項展開した場合には，それらの各展開論理項がそれぞれ実行可能解に対応していて，それらの各展開論理項の中より最適解に対応する展開論理項を求めることが効率的におこなえるということである．本論文では，この線形計画問題に対するブール代数的解法アルゴリズムは目標関数が非線形であっても単調増加関数であれば，同様な考え方で最適解を求めうることを示し，さらに，一般的に，それ以外（単調増加関数でない場合）の非線形計画問題に対するブール代数的解法について記述する．

本論文でのべるようなブール代数的解法アルゴリズムとして，P. L. Ivanescu は擬似ブール計画法[4] (Pseudo Boolean Programming) を提案しているが，その方法はブール代数の一部を使用しているにすぎない．そこで，本論文では，ブール代数を全面的に用いて，ブール代数的簡略化が，与えられた問題の最適解を求める最適化にある程度対応していることを利用して解適解を求めるアルゴリズムを提案するもので，第2節では本論文で用いるブール代数，ブール関数，擬似ブール関数等についての基本的概念についてのべ，第3節では擬似ブール関数よりブール関数への変換アルゴリズムにつき，第4節では問題の定式化につき，第5節では本論文で提案するアルゴリズムの基本的考え方につき，第6節ではアルゴリズムにつきその要約を，第7節ではアルゴリズムの収束性につき，第8節では目標関数が単調増加関数である場合のアルゴリズムにつき，第9節では例題につき，第10節ではまとめにつき，それぞれのべる．

---

† 1969年3月26日受理.
* 京都大学工学部.

2. 基本的概念

まず，本論文で必要なブール代数，ブール関数及び擬似ブール関数の諸概念についてのべる [5], [1]. $\{0,\ 1\}=G_2$ とし，その n 個の直積空間を $G_2{}^n$ とする．$G_2{}^n$ から G_2 への写像 M_1 はブール関数といわれ，$G_2{}^n$ から実数体 R への写像 M_2 は擬似ブール関数 (pseudo Boolean function) といわれる．したがって，ブール関数も擬似ブール関数である．

ブール代数の演算は通常，論理和 ($\cup$)，論理積 ($\cdot$ または $\cap$)，論理否定 ($-$) よりなっており，ブール関数の変数は x として表わされるものと 否定形で 表わされる $\bar{x}$ との２種を含むことが多い．ここでは便宜上，つぎのように表現する．

(1) $x^1=x$

$x^0=\bar{x}$

上の表現法を使って，すべてのブール関数 M_1 $(x_1,\cdots x_n)$ はつぎのような最小項展開の形で表わされることが知られている．

(2) $M_1(x_1,\cdots,\ x_n\ =\bigcup_{\alpha_1\cdots\alpha_n} M_1(\alpha_1\cdots,\ \alpha_n)\ x_1{}^{\alpha 1}\cdots x_n{}^{\alpha n}$

ただし，$\cup$ は $(\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n)\ \in G_2{}^n$ の値がとりうるすべての可能な論理和を意味し，

(3) $\alpha_j\in G_2,\ (j=1,\cdots n)$

である．

また，ブール関数と同様に，すべての擬似ブール関数 M_2 $(x_1,\cdots,\ x_n)$ はつぎのような形で表わされることが知られている．

(4) $M_2\ (x_1,\cdots,\ x_n)\ =\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_n} C_{j1\ldots}\alpha_n\ x_1{}^{\alpha 1}\cdots x_n{}^{\alpha n}$

ただし，$\sum$は $(\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n)\ \in G_2{}^n$ の値がとりうるすべての組合せについての通常の算術和を表わし，

(5) $G_{\alpha 1\ldots\alpha n}=M_2\ (\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n)$

(6) $\alpha_j\in G_2,\ (j=1,\cdots,\ n)$

である．また，$x_j{}^{\alpha j}$ の積は通常の算術における積とみなしてよい．

ブール関数 M_1 $(x_1,\cdots,\ x_n)$ の最小項展開は(2)式のようになるが，(2)式がブール代数により簡略化された場合には，一般的に，つぎの最簡形式展開の形に表わされる．

(7) $M_1\ (x_1,\cdots,\ x_n)\ =\underset{k\in K}{U}\ (x_1{}^{\alpha 1k}\cdots x_n{}^{\alpha nk})_k$

ただし，

(8) $$\alpha_{jk}=\begin{cases}0 & \\ 1 & (j=1,\cdots,\ n) \\ & (k\in K) \\ v\ (0\ \text{or}\ 1) & \end{cases}$$

とし，k は M_1 $(x_1,\cdots,\ x_n)$ の中の簡略化された各展開論理項につけられた index で，その index 集合を k で表わす．$\alpha_{jk}=v$ は簡略化された展開項に表われない変数 (x_j) を意味するものである．た

とえば，いま，3変数，x_1, x_2, x_3 よりなる簡略化されたブール関数 $M_1(x_1, x_2, x_3)$ を考えよう．

(9) $$M_1(x_1, x_3, x_3)=x_1\cup x_2\bar{x}_3$$

上式を（7）式のように表示すると，

(10) $$M_1\ (x_1, x_2, x_3)=(x_1{}^{\alpha 11}\,x_2{}^{\alpha 21}\,x_3{}^{\alpha 31})_1\cup(x_1{}^{\alpha 12}\,x_2{}^{\alpha 22}\,x_3{}^{\alpha 32})_2$$

$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$, $\alpha_{21}=\alpha_{31}=\alpha_{12}=v$, $\alpha_{32}=0$ となる．

この例でもわかるように，(7)式での α_{jk} の値として v が導入されているのは，v は0でも1でもいずれの値をもとりうるもので，簡略化された展開論理項の中には現われない変数 x_j を示している．

つぎに，ブール関数 $M_1(x_1,\cdots, x_n)$ の値が1となるようなブール方程式を考える．すなわち，

(11) $$M_1\ (x_1,\cdots, x_n)=1$$

この (11) 式の $M_1(x^1,\cdots, x_n)$ を（7）式のような最簡形式展開した場合，少くとも1個の最簡形式展開論理項はその値が1とならねばならない．そこで，いま，$\forall k\in K$ に対し，

(12) $$(x_1{}^{\alpha 1k}\cdots x_n{}^{\alpha nk})_k=1$$

となっているとすると，その場合の $x_j(j=1,\cdots, n)$ の値は

(13) $$x_{jk}=\alpha_{jk}(j=1,\cdots, n),\ k\in K$$

となる．ただし，α_{jk} の値は（8）式で定められたものに対応している．この場合，$\alpha_{jk}=v$ となるものの個数を $N(v)$ とすると，（2）式で表わされるブール方程式の解としては簡略化された展開項の1つに対して $2^{N(v)}$ 個の解が存在することになる．

3. 擬似ブール関数よりブール関数への変換

いま，つぎのような擬似ブール関数 $M_2(x_1,\cdots, x_n)$ に関する不等式が与えられているとする．

(14) $$M_2(x_1,\cdots, x_n)\geqq b$$

ただし，$x_j\in G_2$, $(i=1,\cdots, n)$, b は実数とする．これを擬似ブール不等式という．また，(14) 式が不等式でなく等式の場合，擬似ブール方程式という．

以下において，擬似ブール不等式および擬似ブール方程式よりブール方程式に変換する場合の方法をのべよう[8].

擬似ブール関数 $M_2(x_1\cdots, x_n)$ は一般に（4）式のように表わされる．すなわち，

(4) $$M_2(x_1,\cdots, x_n)\ =\sum_{\alpha_1\cdots\alpha n} C\alpha_1\cdots\alpha_n\ x_1{}^{\alpha 1}\cdots x_n{}^{\alpha n}$$

となる．ところが，この(4)式における $C\alpha_1\cdots\alpha_n$ は $C\alpha_1\cdots\alpha_n=0$ の場合もありうるが，$C\alpha_1\cdots\alpha_n\neq 0$ となる場合だけを考えればよい．このとき，ブール関数 $M_1(x_1,\cdots, x_n)$ が（7）式の形式で表わされることに対応して，擬似ブール関数 $M_2(x_1,\cdots, x_n)$ はつぎのようになる．

(15) $$M_2(x_1,\cdots, x_n)\ =\sum_{h\in H} C_h(x_1{}^{\alpha 1h}\cdots x_n{}^{\alpha nh})_h,\ C_h\neq 0.$$

ただし，$M_2(x_1,\cdots, x_n)$ を積の和として表した場合，その各項につけた index を h で表しており，その index 集合を H で表わす．また，この場合，$\alpha_{jh}\{(j=1,\cdots, n),\ h\in H\}$ の値はつぎの値をとっている．

$$(16)\qquad \alpha_{jh}=\begin{cases} 0 & (j=1,\cdots,n) \\ 1 & (h\in H) \\ v\ (0\ \text{or}\ 1) & \end{cases}$$

(16) 式において，$\alpha_{jh}=v$ の場合には，積の形で表わされているある項 h において，変数 x_j が項 h の中には現われてないことを意味している．このことは，（7），（8）式の場合と対応している．

ここで，記号の簡単化のため

$$(17)\qquad y_h=(x_1{}^{\alpha 1h}\cdots x_n{}^{\alpha nh})_h,\ h\in H$$

とおくと，(14) 式はつぎのように表わせる．

$$(18)\qquad \sum C_h y_h \geqq b$$

この形は y に関して線形化が行なわれたことを意味している．ここで，つぎのような集合を定義する．

$$(19)\qquad \begin{aligned} &H_p=\{h \mid C_h>0\} \\ &H_n=\{h \mid C_h<0\} \\ &H_p,\ H_n\subseteq H \end{aligned}$$

さらに，

$$(20)\qquad y_h=1-\bar{y}_h,\ h\in H$$

であるから，(18) 式において，

$$(21)\qquad \begin{aligned} &y_h=y_h \qquad h\in H_p \\ &y_h=1-\bar{y}_h\ \ h\in H_n \end{aligned}$$

とすると，(18) 式はつぎのように表わされる．

$$(22)\qquad \sum_{h\in H_p} C_h y_h + \sum_{h\in H_n} C_h y_h \geqq b$$

であるから，

$$(23)\qquad \sum_{h\in H_p} C_h y_h + \sum_{h\in H_n} C_h (1-\hat{y}_h) \geqq b$$

すなわち，

$$(24)\qquad \sum_{h\in H_p} C_h y_h - \sum_{h\in H_n} C_h \hat{y}_h \geqq b - \sum_{h\in H_n} C_h$$

となる．(24)式の左辺は全て正の係数となっているので，さらに，つぎのような置き換えを施す．

$$(25)\qquad \begin{aligned} &d_h=C_h \qquad h\in H_p \\ &d_h=-C_h \quad h\in H_n \\ &w_h=y_h \qquad h\in H_p \\ &w_h=\bar{y}_h \qquad h\in H_n \end{aligned}$$

$$(26)\qquad S=b-\sum_{h\in H_n} C_h$$

この結果，(25) 式はつぎのように表わせる．

$$(27)\qquad \sum_{h\in H} d_h w_h \geqq S$$

ここで，さらに，つぎの関係が満たされるように index h をつけ換える．

(28) $d_h \geqq d_{h+1},\ h \in H$

また，index 集合 H の Cardinal 数を l とする．このとき，(27) 式に対しては，変数の間にはつぎに示すようなケースのどれか１つを考慮すれば十分である．

(i) $S \leqq 0$ の場合，解は任意である．

(ii) $S>0$ で，しかも

$$d_1 \geqq \cdots \geqq d_{t-1} \sim S > d_t \geqq \cdots \geqq d_l \quad (2 \leqq t \leqq l+1)$$

ならば，つぎの２つの場合が考えられる．

(α) 少くとも全ての $h=1,\cdots,t-1$ に対し，

$$w_h=1$$

で，しかも，

$$w_1=\cdots=w_{h-1}=w_{h+1}=\cdots=w_l=0$$

(β) $w_1=\cdots=w_{t-1}=0$

で，しかも，

$$\sum_{h=t}^{l} d_h w_h \geqq S$$

を満足するような $(w_t,\cdots,w_l)$

(iii) $S>0$, $d_1<S$ でしかも，

$\sum_{h \in H} d_h < S$ の場合には，解は存在しない．

(iv) $S>0$, $d_1<S$ でしかも，$\sum_{h \in H} d_h = S$ の場合には，

$$w_h=1,\ h \in H$$

となる．

(v) $S>0$, $d_1<S$ でしかも

$\sum_{h=1}^{l} d_h > S$, $\sum_{h=2}^{l} d_h < S$ の場合には，

$$w_1=1$$

と，しかも

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h \geqq S-d_1$$

を満足するような $(w_2,\cdots,w_l)$ となる．

(vi) $S>0$, $d_1<S$ でしかも，

$\sum_{h=1}^{l} d_h > S$, $\sum_{h=2}^{l} d_h \geqq S$ の場合には，

つぎの２つの場合が存在する．

(α) $w_1=1$

としかも

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h \geqq S-d_1$$

を満足するような $(w_2,\cdots,\ w_l)$

となる．

起こりうる場合は以上の6ケースしかない．

したがって，以上の6個の各ケースに対してブール方程式を求めればよい．そこで，(27) 式を満足するような w_h $(h \in H)$ に対してはその値が1となり，そうでない場合には0となるような関数 Φ $(w_1,\cdots,\ w_l)$ すなわち特性関数を考えると w_h $(h \in H)$ $\in G_2$ であることから Φ は明らかにブール関数であり，(27) 式を満足するブール方程式は

(29) $\qquad \Phi\ (w_1,\cdots,\ w_l)=1$

として表わされることになる．しかも，(29) 式の Φ $(w_1,\cdots,\ w_l)$ はブール関数であるから，(7) 式のような最簡形式展開が可能であり，その中の任意の展開論理項における変数の間には上記6ケースでのべたような関係が変数間に成立しなければならない．逆に，(27) 式より (29) 式を構成する場合には，上記6ケースについて考えられる変数の値にもとづいて展開論理項を構成していけば，最終的に (27) 式より (29) 式をうることができる．以下，上記各ケースについてのブール方程式を示す．

(i) この場合，$w_h (h \in H)$ が如何なる値をとっても，必らず (27) 式は成立するので恒等的に Φ の値は1となる．すなわち，

$$\Phi(w_1,\cdots,\ w_l)\equiv 1$$

(ii) この場合，

$$\Phi\ (w_1,\cdots,\ w_l)=\bigcup_{h=1}^{t-1} w_h \cup \Phi_1(w_t,\cdots,\ w_l)$$

となる．ただし，$\Phi_1(w_t,\cdots,\ w_l)=1$ は

$$\sum_{h=t}^{l} d_h w_h \geqq S$$

を満たすものとする．

(iii) この場合，(27) 式は成立しないので

$$\Phi(w_1,\cdots,\ w_l)=0$$

となる．

(iv) この場合，

$$\Phi(w_1,\cdots,w_l)=w_1\cdots w_l$$

(v) この場合，

$$\Phi(w_1,\cdots,\ w_l)=w_1 \cap \Phi_2(w_2,\cdots,\ w_l)$$

となる．ただし，$\Phi_2(w_1,\cdots,\ w_l)=1$ は

$$\sum_{h\equiv 2}^{l} d_h w_h \geqq S-d_1$$

を満たすものとする，

(vi)　この場合,

$\Phi(w_1,\cdots, w_l)=w_1\cap\Phi_3(w_2,\cdots, w_l)\cup\overline{w}_1\cap\Phi_4(w_2,\cdots, w_l)$

となる．ただし, $\Phi_3(w_2,\cdots, w_l)=1$ は

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h \geqq S-d_1$$

を満たすものであり, $\Phi_4(w_2,\cdots, w_l)=1$ は

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h \geqq S$$

を満たすものとする．

上記各ケースについてブール方程式への変換方法により (27) 式より (28) 式に完全に変換できることがわかる．すなわち, (i) 及び (iii) については $\Phi(w_1,\cdots, w_l)$ の値は即座に定まるので問題は (ii), (iv), (v), (vi) の場合である．ところが (ii) における Φ_1 については, (iv), (v), (vi) のケースについて考えてゆける． そこで, (iv) については, この場合も一意的に求めうる．したがって, (v) および (vi) についてであるが, Φ_2, Φ_3, Φ_4 について, くり返し, (i)～(vi) の各ケースについて考えることにより, 必らず関数 Φ を求めうることがわかる．

つぎに, 与えられた擬似ブール方程式

(30)　　$M_2(x_1,\cdots, x_n)=b$

をブール方程式に変換する場合について考えよう．この場合, (14)式について考えたことと同様な考え方で, (27)式に対応して,

(31)　　$\sum_{h\in H} d_h w_h=S$

をうる．さらに, (31) 式をブール方程式に変換した場合, (29) に対応して,

(32)　　$\Phi'(w_1,\cdots, w_l)=1$

が成立するものとする．すると, (32) 式の Φ' を求めるためには, つぎのたがいに排反する 8 つのケースを考えればよい．

(i)　$S<0$ の場合, (31) 式は成立しないので,

$\Phi'(w_1,\cdots,w_l)\equiv 0$

(ii)　$S=0$ の場合,

$\Phi'(w_1,\cdots, w_l)=\overline{w}_1\cdots\overline{w}_l$

(iii)　$S>0$ の場合, しかも,

$d_1\geqq\cdots\geqq d_{t-1}\geqq S>d_t\geqq\cdots\geqq d_l$　$(2\leqq t\leqq l+1)$

ならば,

$\Phi'(w_1,\cdots, w_h)=(\overline{w}_1\cdots\overline{w}_{t-1})\cap\Phi_1'(w_t,\cdots, w_l)$

ただし, $\Phi_1'(w_1,\cdots, w_h)=1$ は

$$\sum_{h=t}^{l} d_h w_h=S$$

を満たすものとする．

(iv) $S>0$ の場合，しかも，

$d_1=\cdots=d_{t-1}=S>d_t\geqq\cdots\geqq d_l$

ならば，

$$\Phi'(w_1,\cdots,w_h)=\bigcup_{h=1}^{t-1} w_h\cup\Phi_2'(w_t,\cdots,w_l)$$

となる．ただし，$\Phi_2'(w_t,\cdots,w_l)=1$ は

$$\sum_{h=t}^{l} d_h\ w_h=S$$

を満たすものとする．

(v) $S>0$, $d_1<S$ の場合，しかも

$\sum_{h=1}^{l} d_h<S$ ならば，

$$\Phi'(w_1,\cdots,w_l)\equiv 0$$

(vi) $S>0$, $d_1<S$ の場合，しかも

$\sum_{h=1}^{l} d_h=S$ ならば，

$$\Phi'(w_1,\cdots,w_e)=w_1\cdots w_l$$

(vii) $S>0$, $d_1<S$ の場合，しかも

$\sum_{h=1}^{l} d_h>S$, $\sum_{h=2}^{l} d_h<S$ ならば，

$$\Phi'(w_1,\cdots,w_l)=w_1\cup\Phi_3'(w_2,\cdots,w_l)$$

となる．ただし，$\Phi_3'(w_2,\cdots,w_l)=1$ は

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h=S-d_1$$

を満たすものとする．

(viii) $S>0$, $d_1<S$ の場合，しかも

$\sum_{h=1}^{l} d_h>S$, $\sum_{h=2}^{l} d_h\geqq S$ ならば，

$$\Phi'(w_1,\cdots,w_l)=w_1\cup\Phi_4'(w_2,\cdots,w_l)\cup w_1\cup\Phi_5'(w_2,\cdots,w_l)$$

となる．ただし，$\Phi_4'(w_2,\cdots,w_l)=1$ は

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h=S-d_1$$

を満たし，$\Phi_5'(w_2,\cdots,w_l)=1$ は

$$\sum_{h=2}^{l} d_h w_h=S$$

を満たすものとする．

上記8ケースについてどれかを考えていくことをくり返すことにより (31) 式より (32) 式に変換できる．以上ブール方程式への変換手順についてのべたが，(14) 式が等号を含まない不等式の場合

についても，同様な考え方を用いてブール方程式に変換できる．また本節でのべたアルゴリズムは最悪の場合，l 回のくり返しで必らずブール方程式に変換できるわけであるが，実際上 l 回のくり返しは不要である．

4. 問題の定式化

一般に，（0－1）変数よりなる非線形計画問題はつぎのように表わせる．

(33-1)　$g_1(x_1,\cdots, x_n) \geqq b_1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(33-m)　$g_m(x_1,\cdots, x_n) \geqq b_m$

(34)　$x_j \in G_2,\ j \in N$

となる条件のもとで，

(35)　$f(x_1,\cdots, x_n)$

を最適（最大または最小）にするような点 $(x_1,\cdots, x_n)$ を求めよ．

ただし，$M=\{1,\cdots' m\}$, $N=\{1,\cdots, n\}$ とし，$g_i(x_1,\cdots, x_n)$，$f(x_1,\cdots, x_n)$，$i \in M$ はそれぞれ変数 x_j $(j \in N)$ の非線形関数であるとする．

(33)，(34) 式を満たすような点 $(\xi_1,\cdots, \xi_n) \in G_2{}^n$ を実行可能点といい，実行可能点の集合を実行可能領域といって，これを F で表わす．また，(33)，(34) の条件のもとで，(35) を最適にするような点 $(\xi_1{}^0,\cdots, \xi_n{}^0) \in G_2{}^n$ を最適点または最適解という．

(34) の条件のもとで．(33) で与えられる各実係数非線形不等式は擬似ブール不等式であり，前節の方法により，この不等式をブール方程式に変換する．

この場合，

$g_i(x_1,\cdots, x_n) \geqq b_i,\ i \in M$

を満足するようなブール方程式を

$\Phi_i(x_1,\cdots, x_n)=1,\ \ i \in M$

とすると，(33) 式全体を満足するブール方程式は，

(36)　$(x_1,\cdots, x_n)=\cap\, \Phi_i(x_1,\cdots, x_n)=1$

となる．したがって，(33)，(34)，(35) 式で与えられる問題はつぎのとおり表わせる．

(37)　$\Phi(x_1,\cdots, x_n)=1 \quad x_j \in G_2,\ j \in N$

となる条件のもとで，

$f(x_1,\cdots, x_n)$

を最小にする $(x_1,\cdots, x_n) \in G_2{}^n$ を求めよ．

ここでは，最小化問題として取扱っているが，最大化問題の場合には目標関数 $f(x_1,\cdots, x_n)$ に -1 を乗ずればよいので，(37)，(35) 式で与えられているような最小化問題として考えても一般性は失わない．さらに，$\Phi(x_1,\cdots, x_n)$ はブール関数であるから，（7）式で与えたような最簡形式展開が可能であり，このような最簡形式展開論理項 $(x_1{}^{\alpha 1k}\cdots x_n{}^{\alpha nk})_k$ の値を 1 とするような各変数の値は $x_j=$

α_{jk}, $k \in K$, $j \in N$となり，これらの値は (33) 式を当然満足するものであるから，実行可能解を示していることがわかる．

5. アルゴリズムの基本的考え方

前節で記述したように，与えられた問題というのは (37) 式を満足するもので，目標関数 $f(x_1,\cdots, x_n)$ を最小にする $(x_1,\cdots, x_n) \in G_2{}^n$ を求めることになる．ところが(37)式で与えられる $\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ は（7）式で与えられるような最簡形式展開が可能であり，この場合，各展開論理項はその値を1とすると，それぞれ与えられた問題の実行可能解に対応していることはすでにのべた．したがって，問題は与えられた実行可能解の中より如何にして最適解を選び出すかということになる．

すなわち，何らかの方法で実行可能解となりえないものを除去していき，最終的に最適解のみが残るようにすればよい．ところで，ブール条件式として与えられた (37) 式の $\Phi(x_1,\cdots, x_n)$ を最簡形式展開した場合，展開論理項数が少なくて，しかも各展開論理項に対応した実行可能解が少ない程，最適解を含む展開論理項を選び易いと言える．したがって，展開論理項の数を減少させるような工夫が必要となる．そこで与えられたブール条件にさらに制限条件を附加することを考えよう．すなわち，その附加条件というのはつぎのようなものである．

(38) $\quad f(x_1,\cdots, x_n) < f(\xi_1{}^1,\cdots, \xi_n{}^1)$

この (38) 式をブール条件式に変換する（この変換方法は第4節でのべた）．その結果，つぎのブール条件式をえたとする．

(39) $\quad \Phi_{b1}(x_1,\cdots, x_n) = 1$

そこで，$\Phi(x_1,\cdots, x_n)$ と $\Phi_{b1}(x_1,\cdots, x_n)$ との論理積をとり，

(40) $\quad \Phi(x_1,\cdots, x_n) \cap \Phi_{b1}(x_1,\cdots, x_n) = 1$

となるようなブール条件式を生成する．

(40) 式を満足する $(x_1,\cdots, x_n)$ は与えられた実行可能解の中で目標関数 $f(x_1,\cdots, x_n)$ の値が $f(\xi_1{}^1,\cdots, \xi_n{}^1)$ より小さいものからなっていることがわかる．また，(40) 式を最簡形式展開した場合の展開論理項に対応した実行可能解の数は (37) 式で与えられた場合のそれと比較すると少なくなっているはずである．そのことはつぎのことから明白である．

いま，$(\xi_1{}^1,\cdots, \xi_n{}^1) \in G_2{}^n$ を実行可能領域 F より選ぶ．すなわち，

$$(\xi_1{}^1,\cdots, \xi_n{}^1) \in F$$

である．さらに，F の要素で，(38) 式が成立するような点 $(\xi_1,\cdots, \xi_n)$ の集合を B_1 とすると，(40) 式を満足するような点 $(\eta_1,\cdots, \eta_n)$ は $F \cap B_1$ に属している．すなわち，

(40) $\quad (\eta_1,\cdots, \eta_n) \in F \cap B_1$

となっている．ただし，この場合には，$B_1 \neq \phi$ である．したがって，いま，集合 X の Cardinal 数を Card (X) と記すと，つぎのことが成立する．

(42) $\quad \mathrm{Card}(F) > \mathrm{Card}(F \cap B_1)$

このことから，(40) 式で表わされる実行可能解数の方が，(37) 式で表わされるものより少ないこと

がわかる.

さらに, (40) 式を最簡形式展開し, その展開論理項の任意の 1 つに対応するような実行可能解 $(\xi_1^2,\cdots,\xi_n^2)$ を選び, つぎの条件式を生成する.

(43) $$f(x_1,\cdots,x_n)<f(\xi_1^2,\cdots,\xi_n^2)$$

ただし,

(44) $$f(\xi_1^2,\cdots,\xi_n^2)<f(\xi_1^1,\cdots,\xi_n^1)$$

となっている. (43) 式に対応するブール条件式をつぎのようにする.

(45) $$\Phi_{b2}(x_1,\cdots,x_n)=1$$

この Φ_{b2} と $\Phi\cap\Phi_{b1}$ との論理積をとり, その値を 1 とするようなブール条件式を生成して同様な手順をとり実行可能解数を減少させていく. いま, このような手順をくり返し, S 段階で,

(46) $$f(x_1,\cdots,x_n)<f(\xi_1^s,\cdots,\xi_n^s)$$

なる制限条件式を作成し, それに対応するブール条件式

(47) $$\Phi_{bs}(x_1,\cdots,x_n)=1$$

をえたとする. このとき,

(48) $$\Phi(x_1,\cdots,x_n)\bigcap_{k=1}^{S}\Phi_{bk}(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0$$

となったとする.

このときは (46) 式を満たすような実行可能解は存在しないことを意味している. この場合,

(49) $$f(x_1,\cdots,x_n)=f(\xi_1^s,\cdots,\xi_n^s)$$

となるような擬似ブール方程式に対応するブール条件式をつぎのように求める.

(50) $$\Phi_{bs}'(x_1,\cdots,x_n)=1$$

そこで,

(51) $$\Phi(x_1,\cdots,x_n)\bigcap_{k=1}^{S-1}{}_b\Phi_k(x_1,\cdots,x_n)\cap\Phi_{bs}'(x_1,\cdots,x_n)=1$$

を生成する. すると, (51) 式の左辺は必らず恒等的に零でなく, (51) 式を満足するような $(x_1,\cdots,x_n)$ は必らず存在し, それらは実行可能であり, しかも, 点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in F$ は

(51) $$f(\xi_1^s,\cdots,\xi_n^s)<f(\xi_1^{s-1},\cdots,\xi_n^{S-1})<\cdots<f(\xi_1^1,\cdots,\xi_n^1)$$

となっており,

(53) $$f(\xi_1^s,\cdots,\xi_n^s)\leqq f(\xi_1,\cdots,\xi_n),\ \forall(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in F$$

となる関係が成立するので, $(\xi_1^s,\cdots\xi_n^s)$ は最適解の 1 を示すことから, (51) 式を満足する $(x_1,\cdots,x_n)$ は最適解を与えることがわかる. また S 段階において, (48) 式の左辺が恒等的に零でないときには, さらに, $(S+1)$ 段階の操作をくり返せばよい. ところが, $f(x_1,\cdots,x_n)$ は (15) で与えられるような形式で表わせるものであるから,

(54) $$f(x_1,\cdots,x_n)\geqq\sum_{h\in H_n}\bar{C}_h$$

となっている. そこでは, いつかは (48) 式が成立し, このような手順で最適解を必らず求めうることがわかる.

つぎに，目標関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の上限値 $f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ を与えるような $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in F$ の選び方について記述する．

(38) 式以降にのべた目標関数に上限値を与えた不等式は一般的につぎのようになる．

(55) $$f(x_1,\cdots,x_n)<f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

上式の $(\xi_1,\cdots,x_n)\in F$ は勿論 (37) 式を満足する．いま，(37) 式の $\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ を最簡形式展開すると，

$$(x_1,\cdots,x_n)=\bigcup_{k\in K}(x_1{}^{\alpha 1k}\cdots x_n{}^{\alpha nk})_k$$

となる．任意の展開論理項 $(x_1{}^{\alpha 1k}\cdots x_n{}^{\alpha nk})_k$, $\forall k\in K$, に対し，その値を 1 とするような変数 $x_j(j\in N)$ の値は

(56) $$x_j=\alpha_{tk},\ j\in N,\ k\in K$$

であり，α_{jk} の値は（8）式のようなものである．このような $x_j(j\in N)$ の値は実行可能解であり，いま，$\alpha_{jk}=v$ となるものの数を $N(v)$ とする，上記展開論理項に対応する実行可能解は $2^{N(v)}$ 個存在する．ところが (38) 式以降にのべた最適解を求める過程においては実行可能解の中より，目標関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ をより小さくするような $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in F$ を求めなければならない．以下に，そのような $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in F$ を $2^{N(v)}$ 個の中から求める方法についてのべる．

目標関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ は (15) 式のように表わされる．すなわち，

(15)′ $$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum C_h(x_1{}^{\alpha 1h}\cdots x_n{}^{\alpha nh})$$

となる．ここで，$\forall k\in K$ に対し，

$$J_d=\{j\mid \alpha_{jk}\neq v\},\quad J_{ud}=\{j\mid \alpha_{jk}=v\}$$

とすると，目標関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ は $x_j(j\in J_{ud})$ で表現される．すなわち，

(57) $$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{h\in H}C_h{}'(\prod_{j\in J'_{ud}\subseteq J_{ud}} x_j{}^{\alpha ih'})'$$

$$\begin{cases} x_j=\alpha_{jk}(j\in J_d)\\ x_j=x_j(j\in J_{ud})\end{cases}$$

ただし，h' は目標関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ において $x_j=\alpha_{jk}(j\in J_d)$, $x_j=x_j(j\in J_{ud})$ としたときの f の各項につけた index であり，H' はその index 集合とする．

さらに，つぎのような index 集合を考える．

$$J_{udn}=\{j\mid (\prod_{j\in J'_{ud}} xj^{\alpha jk})_{h'},\ C_{h}{}'<0,\ h'\in H'\}$$

$$J_{udp}=\{j\mid (\prod_{j\in J'_{ud}} xj^{\alpha jk})_{h'},\ C_{h}{}'>0,\ h'\in H'\}$$

ここで，$x_j(j\in J_{ud})$ の値をつぎのように定める．

（i） $J_{udn}\cap J_{udp}=\phi$ のとき，

$\alpha_{jk}=0(j\in J_{udp})$

$\alpha_{jk}=1(j\in J_{udn})$

（ii） $J_{udn}\cap J_{udp}\neq\phi$ のとき，

$J_{udn}\oplus J_{udp}=\phi$ ならば，

$\alpha_{jk}=1(j\in J_n\subseteq J_{ud})$

$\alpha_{jk}=0\,(j\notin J_n)$

ただし，

$J_n=\{j\mid (\prod_{j\in J'ud\subsetneqq Jud} x_j^{\alpha jh'})_{h'},\ \min_{h'\in H'} C_{h'}\}$ とする．

$J_{udn}\oplus J_{udp}\neq\phi$ ならば，

$\alpha_{jk}=0\,(j\in J_{udp}\cap\overline{J_{udn}})$

$\alpha_{jk}=1\,(j\in J_{udn}\cap\overline{J_{udp}})$

ただし，$\oplus$は排他的論理和，$\overline{\ }$は補集合を示すものとする．

6. アルゴリズムについての記述

前節でのべた基本的考え方にもとづいて，以下に，一括したアルゴリズムにつきのべる．

ステップ1　与えられた条件式 (33)，(34) をブール条件式 (36) と変換する．

ステップ2　(36) の $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ を最簡形式展開で表わす．

ステップ3　最簡形式展開論理項の中で，その値を1とした場合の各変数 $x_j(j\in N)$ が，できるだけ目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の値を小さくするような任意の展開論理項

$(x_1^{\alpha_1 k}\cdots x_n^{\alpha nk})_k,\ k\in K$

を選ぶ．

ステップ4

$(x_1^{\alpha_1 k}\cdots x_n^{\alpha nk})_k=1$

とし，$x_j=(j\in N)$，$\exists k\in K$ として x_j の値を決定する．さらにここで $S=1$ とする．

ステップ5　ステップ4における論理項の $N(v)$ を調べる．

5a　$N(v)=0$ ならば

$x_j=\xi_j{}^S=\alpha_{jk},\ j\in N$ とし，

$f(x_1, \cdots\cdots, x_n)<f(\xi_1{}^S, \cdots, \xi_n{}^S)$

となる不等式を生成しステップ9

5b　$N(v)\neq 0$ ならば，ステップ6

ステップ6　目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，

$$\left.\begin{array}{l} x_j=j_k(\alpha\in J_{jkd}) \\ x_j=x_j(j_k\in J_{ud}) \end{array}\right. \quad \exists k\in K$$

として，fの値を計算する．それを (57) 式のような形式で表わす．

ステップ7　$J_{udn}\cap J_{udp}$ について調べる．

7a　$J_{udn}\cap J_{udp}=\phi$ ならば

$\alpha_{jk}=0\,(j\in J_{udp})$

$\alpha_{jk}=1\,(j\in J_{udn})$

としてステップ5

7b　$J_{udn} \cap J_{udp} \neq \phi$ ならばステップ 8.

ステップ 8　$J_{udp} \oplus J_{udn}$ について調べる.

8a　$J_{udp} \oplus J_{udn} = \phi$ ならば

$\alpha_{jk} = 1\,(j \in J_n)$

$\alpha_{jk} = 0\,(j \notin J_n)$

とし, さらに

$J_d = J_a \cup \{j | \alpha_{jk} \neq v,\ j \in N' \subseteq N\}$ としてステップ 6.

8b　$J_{udp} \oplus J_{udn} \neq \phi$ ならば

$\alpha_{jk} = 0\,(j \in J_{udp} \cap J_{udn})$

$\alpha_{jk} = 1\,(j \in J_{udn} \cap \overline{J_{udp}})$

とし, さらに

$J_d = J_d \cup \{j | \alpha_{jk} \neq v,\ j \in N' \subseteq N\}$ としステップ 6.

ステップ 9　ステップ 5a で生成した不等式に対応するブール条件式

$$\Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

に変換する.

ステップ10　ブール関数 $\Phi \cap \Phi_{bs}$ を生成し,

この値が恒等に零かどうか調べる.

10a

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \cap \Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0$$

ならば,

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\xi_1{}^s, \cdots, \xi_n{}^s)$$

となる擬似ブール方程式に対応するブール条件式

$$\Phi'_{bs}(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

を生成してステップ11.

10b

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \cap \Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) \not\equiv 0$$

ならば,

$$S + 1 = S$$

として,

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \cap \Phi_{bs}(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(x_1, \cdots, x_n)$$

とし, ステップ 3.

ステップ11

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) \cap \bigcap_{k=1}^{S-1} \Phi_{bk}(x_1, \cdots, x_n) \cap \Phi'_{bk}(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

となるブール条件式を生成する. この場合の展開論理項は全て最適解に対応する. 停止.

7. アルゴリズムの有限性

本アルゴリズムはブール条件式生成アルゴリズム，目標関数の上限値決定アルゴリズム，最適化アルゴリズムの3つのサブアルゴリズムから構成されている．したがって，それらの各サブアルゴリズムについての有限性を調べれば，それにより，本アルゴリズム全体としての有限性がわかる．以下に，各サブアルゴリズムの有限性についてのべる．

まず，ブール条件式生成アルゴリズムについて考えよう．これは第3節でのべたように，(14) 式の形で与えられているものを (27) 式の形に変形する．さらに，(27)式が成立するような変数は(29)式をも満足するわけであるが，(27) 式より，(29) 式をうる手順についてみよう．S と $d_h(h\in H)$ との間で考えられるケースとしては（i）～(vi) の6ケースだけである．ところが（i），(ii)，(iv) の場合には一意的に決定できる．さらに，(ii) の (β) の場合については，(iv)，(v)，(vi) の場合について考えればよい．したがって，(v)，(vi) については不確定要素としては，$(l-1)$ 個となっているので，結局（i）～(vi) の処理を全部で l 回くり返せば必らず，(27) 式より (29) 式に変換できることがわかり，l は有限であるので有限回のくり返しで必らず収束することがわかる．

つぎに，目標関数の上限値 $f(\xi_1{}^S, \cdots, \xi_n{}^S)$ 決定アルゴリズムについて考えよう．この場合には，$2^{N(v)}$ 個の実行可能解の中から，目標関数値をより小さくするような実行可能解 $(\xi_1{}^S, \cdots, \xi\ {}^S)$ を選ぶわけであるが，(57) 式で示すように，変数 $x_j(j\in J_{ud})$ のみで目標関数が示されており，したがって，それらの変数で表わされる多項式の項数は一般に，

$$\mathrm{Card}(H')\leqq\mathrm{Card}(H)$$

として表わされる．これらの多項式の係数 C_h' の正負にしたがって，index について考えると，つぎの2通りの場合が考えられる．

（i） $J_{udn}\cap J_{udp}=\phi$

（ii） $J_{udn}\cap J_{udp}\neq\phi$

第5節でのべたように，（i）の場合については一意的に $x_j(j\in J_{ud})$ の値を決定でき，(ii) の場合についてはさらに

(iii) $J_{udn}\oplus J_{udp}=\phi$

(iv) $J_{udn}\oplus J_{udp}\neq\phi$

の2通りのケースが考えられ，(iii) については (57) 式のように目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を $x_j(j\in J_{ud})$ の関数として表わし，その形は積の和として表わされているのであるが，それらの項の係数の中で最小のものを選び，その項の値を1とすることにより決定される $x_j(j\in J\ )$ を決めることによりCard(J_{ud}) はそれ以前のものより減少し，さらにまた (iv) についてもステップ 8b の処理をおこなうことにより，ステップ8の課程を通ることによりこのステップを経る前に比較して Card(J_{ud}) は必らず減少していることがわかる．したがって，変数の数はもともと有限個であるから，これらのステップの有限回のくり返しで，必らず収束することがわかる．すなわち，有限回で，変数 $x_j(j\in J_{ud})$ の値が決定される．

最後に，最適化アルゴリズムについて考えてみよう．目標関数 $f(x_1, \cdots, x\ )$ の上限値

$$f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

はつぎの関係を満たしている．

$$f(\xi_1^{S+1}, \cdots, \xi_n^{S+1})<f(\xi_1^S, \cdots, \xi_n^S) \quad S=1,\ 2\cdots\cdots \tag{58}$$

したがって，(48) 式の左辺，すなわち，

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n)\cap\bigcap_{k=1}^{S}\Phi_{bk}(x_1, \cdots, x_n)$$

となるブール関数の最簡形式展開論理項を 1 としたときの対応実行可能解数は

$$\Phi(x_1, \cdots, x\ )\cap\bigcap_{k=1}^{S-1}\Phi_{bk}(x_1, \cdots, x_n)$$

となるブール関数の最簡形式展開論理項を 1 としたときの対応実行可能解数よりは少くとも 1 個以上は少くなっていることがわかる．そのことはアルゴリズムの内容から明白である．すなわち，

$$f(x_1, \cdots, x_n)<f(\xi_1^{S-1}, \cdots, \xi_n^{S-1})$$

$$(\xi_1^{S-1}, \cdots, \xi_n^{S-1})\in F$$

を満足する $(\xi_1, \cdots, \xi_n)\in F$ の集合を B_{S-1} とすると，B_{S-1} の要素より少くとも一個の要素を除去するように B_S を求めるのであるから，

$$\mathrm{Card}(B_{S-1})-\mathrm{Card}(B_S)\geqq 1 \tag{59}$$

となる．しかも，(54) 式で与えたように，目標関数 $f(x_1, \cdots, x\ )$ は必らず下限を有している．すなわち，

$$f(x_1, \cdots, x_n)\geqq\sum_{h\in H_n}C_h \tag{54}$$

となっている．したがって，このような操作をくり返すことにより，Card (K) が有限であるかぎり必らず有限回のくり返しで (48) 式が成立することになり最適解は必らず求まることになる．

8. 目標関数が単調増加関数である場合のアルゴリズム

第 6 節で記述した本アルゴリズムにおいて，目標関数が単調増加関数である場合について考えてみよう．

一般に，単調増加関数についてつぎの関係が満足されている．

擬似ブール関数 $M_2(x_1, \cdots, x\ )$ に関し，

$$x_j\leqq y_j\ (j\in N) \tag{60}$$

であるとき，

$$M_2(x_1, \cdots, x_n)\leqq M_2(y_1, \cdots, y_n) \tag{61}$$

ただし，$x_j,\ y_j\in G_2,\ (j\in N)$．

さらに，目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は一般につぎのように表わされることはすでにのべたとおりである．

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{h\in H} C_h (\prod_{j\in N} x_j^{\alpha jh})_h.$$

ところが，このf $(x_1, \cdots, x_n)$ は $M_2(x_1, \cdots, x_n)$ であり，これが単調増加関数であるとすると，(60)，(61) 式より，つぎの関係が満たされる．

(62) $$C_h > 0 (h\in H)$$

(63) $$\alpha_j = \begin{cases} 1 \\ v'(j\in N) \end{cases}$$

ただし，(63) 式の v' は任意の項の中に現われない変数 x_j を表わす．

すなわち，単調増加関数であれば，係数はすべて正であり，しかも否定形で表わされる変数は存在しない．

(62) 式が成立すれば，

$$J_{ud} = \phi$$

となり，したがって，

$$J_{ud} \cap J_{udp} = \phi$$

すなわち，

$$\alpha_j = 0,\ j\in J_{udp} = J_{ud}$$

と一意的に決定でき，

$$J_{ud} = \phi$$

となるように処理できる．すなわち，ブール条件式

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

の $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ を最簡形式に展開し，その展開論理項を1とした場合に対応する実行可能解は $2^{N(v)}$ 個存在するが，目標関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を最小にするような実行可能解は一意的に決定され，$\alpha_j = v(j\in N'\subset N)$ となるものについては，$\alpha_j = 0(j\in N'\subset N)$ としてしまって差支えないことがわかる．このことから，本アルゴリズムにおけるステップ6，7，8の処理を省略して考えられるし，アルゴリズムはかなり簡単になることがわかる．

さらに，目標関数が単調増加関数である場合，上記ステップの短縮の他に，$\alpha_j = v$，あるいは $\alpha_j = 0$ となるものについては，いずれの場合についても，$x_j = 0$ とするのであるから $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ を最簡形式で表わしたとき，すなわち，論理積の論理和という形式で表現したとき，普通のブール代数により，これ以上簡略化できないものも，$x_j = 0$ となっているものを $\alpha_j = v$ とすることにより，さらに，ブール代数により簡略化できる．ここで，$\alpha_j = 0$ となっているものを，$\alpha_j = v$ とすることは，実際のブール関数として表現されている変数 x_j を，その展開論理項より省略してしまってよいこと示しており，そのことだけでもブール関数を簡単化できることを示しているが，そのことにより，$\alpha_j = 0$ となっているものを，$\alpha_j = v$ とするのであるから，否定形で表わされている変数がなくなり，ブール関数がすべて正変数（否定形を含まない）のみで表現され，このような関数については，ブール代数の吸収律によりさらに簡略化できることもあるので全体としてかなり最簡形式で表現されているブール関数 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ を再簡略化できることがわかる．このことは，論理関係に関しては本来の論理関

数とは異なるものを生成するが最適解を含む実行可能解に対応しているという点ではこのような処理をおこなっても差支えないといえる．この操作により，ブール関数 $(x_1, \cdots, x\ )$ を展開した場合の展開論理項数をより減少させ，実行可能解の中より最適解を選択する処理をより迅速におこなえる効果をもっていることがわかる．

9. 例　　題

$4x_3+x_1x_2-4x_1x_3-3x_2x_3x_5+6x_4x_6-6x_2x_4x_6 \geq -1,$

$5x_1+5x_5+5x_3-5x_1x_3-5x_1x_5-5x_3x_5+3x_2x_5+4x_4x_6+5x_1x_3x_5 \geqq 6$

となる条件のもとで，

$3x_1-3x_1x_2-8x_3x_6+8x_1x_3x_6+4x_2x_5-4x_2x_5x_6-7x_6+7x_5x_6+3x_4-5x_4x_5x_6$

を最小にするような $x_j(j=1, 2, \cdots, 6)$ を求めよ．ただし，$x_j=1$ or 0, $(j=1, \cdots, 6)$ とする．

上記問題をつぎのように整理する．

$x_1x_2+4\bar{x}_1x_3-3x_2x_3x_5+6\bar{x}_2x_4x_6 \geq -1,$

$3x_2x_4-5\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5+4x_4x_6 \geq 1$

$x_j=0$ or $1(j=1, 2, \cdots, 6)$

となる条件のもとで，

$3x_1\bar{x}_2-8\bar{x}_1x_3x_6+4x_2x_5\bar{x}_6-7\bar{x}_5x_6+3x_4-5x_4x_5x_6$

を最小にするような $x_j(j=1, \cdots, 6)$ を求めよ．

解法：

与えられた条件式をブール条件式に変換するが，そのために，まず，条件式の係数が全て正となるように変換する．

$x_1x_2+4\bar{x}_1x_3+3\overline{x_2x_3x_5}+6\bar{x}_2x_4x_6 \geq 2,$

$3x_2x_4+5\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5}+4x_4x_6 \geq 6$

ここで，

$y_{11}=x_1x_2,\ y_{21}=\bar{x}_1x_3,\ y_{31}=\overline{x_2x_3x_5},\ y_{41}=\bar{x}_2x_4x_6,\ y_{12}=x_2x_4,\ y_{22}=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5},\ y_{32}=x_4x_6$

と変数変換すると，

$y_{12}+4y_{21}+3y_{31}+6y_{41} \geq 2$

$3y_{12}+5y_{22}+4y_{32} \geq 6$

となる．そこで，これらの条件式をブール条件式に変換すると，

$y_{41} \cup y_{21} \cup y_{31}=1$

$y_{22}(y_{32} \cup y_{12}) \cup y_{32}y_{12}=1$

となる．したがって，ここで，y 変数を x 変数に逆変換すると，つぎのようにになる．

$\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \supset \bar{x}_3 \cup \bar{x}_5=1,$

$x_1x_4y_6 \cup x_1x_2x_4 \cup x_3x_4x_6 \cup x_2x_3x_4 \cup x_4x_5x_6 \cup x_2x_4x_5\ \ x_2x_4x_6=1.$

上記2つのブール条件式の左辺の論理積を1とするようなつぎのブール条件式を考える．

$$\bar{x}_1x_3x_4x_6\cup\bar{x}_1x_2x_3x_4\cup\bar{x}_1x_4x_5x_6\cup\bar{x}_1x_2x_4x_5\cup\bar{x}_1x_2x_4x_6\cup x_1\bar{x}_2x_4x_6\cup\bar{x}_2x_3x_4x_6\cup\bar{x}_2x_4x_5x_6\cup x_1\bar{x}_3x_4x_6$$
$$\cup x_1x_2\bar{x}_3x_4\cup\bar{x}_3x_4x_5x_6\cup x_2\bar{x}_3x_4x_5\cup x_2\bar{x}_3x_4x_6\cup x_1x_4\bar{x}_5x_6\cup x_1x_2x_4\bar{x}_5\cup x_3x_4\bar{x}_5x_6\cup x_2x_3x_4\bar{x}_5$$
$$\cup x_2x_4\bar{x}_5x_6=1$$

このブール条件式の左辺の展開論理項は実行可能解に対応しているので，いま，最初の展開項を1としてみる．すなわち，

$$\bar{x}_1x_3x_4x_6=1$$

この場合の変数の値は，

$$x_1=0,\ \ x_3=x_4=x_6=1$$

となっているので，これらの値を目標関数fに代入すると，

$$f=-10-2\bar{x}_5$$

となる．ここで，fを小さくするためには，$\bar{x}_5=1$ とならねばならない．その場合，fの値は-12 となる．そこで，

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_6)<-12$$

となる不等式を考え，それに対応するブール条件式をつぎのように求める．すなわち，

$$3x_1\bar{x}_2-8\bar{x}_1x_3x_6+4x_2x_5\bar{x}_6-7\bar{x}_5x_6+3x_4-5x_4x_5x_6<-12$$

となる条件式を書きかえると，

$$8\bar{x}_1x_3x_6+7\bar{x}_5x_6+5x_4x_5x_6+4\overline{x_2x_5\bar{x}_6}+3\overline{x_1\bar{x}_2}+3\bar{x}_4>22$$

となり，これに対応するブール関数 Φ_{b1} を1とするブール条件式は

$$\Phi_{b1}=\bar{x}_1x_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6=1$$

となり，この Φ_{b1} とさきほど求めたブール条件式の左辺との論理積をとると

$$\Phi(x_1,\ \cdots,\ x_6)\cap\Phi_{b1}(x_1,\ \cdots,\ x_6)\equiv0$$

となるので，$f<-12$ となるような実行可能解は存在しないことを意味している．そこで，$f=-12$ としたときのブール関数 Φ'_{b1} を1とするようなブール条件式は

$$\Phi'_{b1}=\bar{x}_1x_3\bar{x}_5x_6x_4=1$$

となり，

$$\Phi(x_1,\ \cdots,\ x_6)\cap\Phi'_{b1}(x_1,\ \cdots,\ x_6)=\bar{x}_1x_4x_3\bar{x}_5x_6=1$$

となって，これは最適解に対応しており，その値は，

$$x_1=0,\ \ x_3=1,\ \ x_4=1,\ \ x_5=0,\ \ x_6=1,\ \ x_2=0\ \text{or}\ 1,\ \ f=-12$$

となる．

10. むすび

0－1変数よりなる非線形計画問題に対するブール代数的解法についてのべたが，この手法は実行可能解の中より最適解を求める対策として，ブール代数的諸演算を用いたものである．したがって，与えられた条件式が多ければ多い程，変数の数が一定の場合には，実行可能解が少なくなり，最適解を求めるための処理が少なくて済むことになる．したがって，与えられた条件式に対し，さらに条件

式を生成し，実行可能解の数を減少させるような工夫をし，最終的に最適解のみ残すようにするのが本アルゴリズムの基本的考え方である．しかも，本アルゴリズムは与えられた条件式をブール条件式に変換してしまえば，以後の操作は目標関数の上限値を最小にすることを系統的におこないうるもので，E. Balas の Additinv Algorithm における ceiling 過程を自動的におこない，この種の 0—1 変数計画問題における tree search の elimination をブール代数による簡略化により自動的におこなう極めて効率的なアルゴリズムといえる．ブール代数的手法としての擬似ブール計画法 (P. L. Ivanescu により提案されたもの) との根本的な相違点は本アルゴリズムが全面的にブール代数を用いての処理であること，したがって，そのことにより，自動的しかも効率的 ceiling をおこないうることにより最適解を迅速に求めうることである．また，目標関数が単調増加関数であるときには，線形計画問題において，変数が 0 および 1 のみをとる場合に対するブール代数的解法をそのまま適用できることがわかった．したがって，目標関数が単調増加関数である場合には，0 — 1 変数非線形計画問題に対しても本アルゴリズムで提案したブール代数的解法により効率的に最適解を求めうるものである．

文　献

[1] Fortet, R.: "Application de l' algebre de Boole en recherche operationell" *Revue Francais de Recherche Operationelle*, 4, 17–25 (1960)

[2] Balas, E.: "Un algorithm addittif pour la resolution des programmes lineares en variables bivalentes," *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences*, 258, 3817–3820 (1964)

[3] Balas, E.: "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables" *Operations Research*, Vol. 13 517–545 (1965)

[4] Ivanescu, P. L.: Programmation polynomiale en nombre entiere." *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences*, 257, 424–427 (1963)

[5] Ivanescu. P. L.: *Boolean Methods in Operations Research*." Springer-Verlag (1968)

[6] 三根，成久："0–1変数をもつ線形計画問題に対するブール代数的解法，" 43年春季オペレーションズ・リサーチ研究発表会アブストラクト集

[7] 三根，成久："2進変数線形計画問題に対するブール代数的解法–II" 43年度秋季オペレーションズ・リサーチ研究発表会アブストラクト集

[8] Mine, H. and Narihisa, H.: "An Algorithm for Solving Linear Programming Problem with Bi-valent Variables by Boolean Algebra." Proceeding of Second Hawaii International Conference on System Science (Jan. 1969)

[9] 三根，成久："(0–1) 変数線形計画問題のブール代数的解法" 電子通信学会論文誌 Vol. 52–C, No. 7, 1969 pp. 407–414