経営科学　第13巻　第1号（1969年10月）

複数待ち行列の解析†

橋田　　温*
中村　義作*

1. まえがき

複数待ち行列 (multiqueue) とは，複数個の窓口 (counter) にできる待ち行列を，1人の扱者 (server) が巡回的に処理して行く待ち行列のシステムをいう[1]．窓口の数は $N(>1)$ 個とし，扱者の巡回する方向に窓口の番号を $1, 2, \cdots\cdots, N$ とつける．ただし，窓口 N からは窓口1に戻るものとする．扱者が1つの窓口から次の窓口に移るための時間は，歩行時間 (walking time) と呼ばれる．

複数待ち行列の規律 (queue discipline) としては，

(I) 扱者が窓口に到着したときまでに並んでいる呼を処理し，そののち次の窓口に移る．

(II) 扱者は1つの窓口で呼がなくなるまで処理を続け，そののち次の窓口に移る．

(III) 窓口の先頭に並んでいる k 個の呼だけを処理し[2]，そののち次の窓口に移る．

などが考えられ，(I) については Leibowitz [1]，(II) については Avi-Itzhak et al. [2] と Takács [3] がそれぞれ解析を行なっている．この論文では (II) の複数待ち行列を対象とし，隠れマルコフ連鎖 (imbedded Markov chain) の方法で，待ち呼数分布，待ち時間分布，各窓口における全稼働時間 (busy period) 分布と，それらの平均などを求める．なお，Avi-Itzhak et al. および Takács の解析では，ともに窓口の数を2とし，しかも歩行時間は無視しうるものとしている．この論文では，窓口の数を N としたうえ，歩行時間も任意分布に従うとしているから，モデルはかなり一般化されている．

2. モデルと若干の概念

$N(>1)$ 種類の呼があり，それぞれは種類別の窓口に互いに独立に到着する．以下では，窓口 $i(i=1, 2, \cdots\cdots, N)$ に到着する呼を「タイプ i の呼」と呼ぶ．各窓口に到着した呼は先着順に待

† 1969年3月17日受理
* 電々公社電気通信研究所
1) この論文では，counter と server が1対1に対応しないので，counter を窓口，server を扱者と呼んで区別する．
2) k は定められた正整数である．

ち行列を作り，各自の順番を待つ．呼を処理する扱者は1人で，窓口番号の若い順に巡回的に処理してゆく．ただし，最後の窓口 N からは最初の窓口1に戻る．

いま，扱者が窓口 i に到着したとする．このとき，待ち呼がなければ，直ちに次の窓口 $i+1$ に移る．待ち呼があれば，先着順サービスによる普通の方法で処理を開始する．処理は，その後に到着した呼も含めて，呼がなくなるまで続けられる．そして，待ち呼がなくなると，直ちに次の窓口に移る．扱者による窓口の巡回は永久に続けられるから，扱者はどこかの窓口で処理中か歩行中かのいずれかである．

呼の窓口への到着，サービス時間，扱者の歩行時間にたいし，次の仮定を設ける．

(i) タイプ $i(i=1,2,\cdots\cdots,N)$ の呼は，平均到着率 λ_i で窓口 i にポアソン到着をする．

(ii) タイプ i の呼にたいするサービス時間は，互いに独立に分布関数 $H_i(x)$ に従う．ただし，$H_i(x)$ の1次と2次の積率は有限とする．すなわち，

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{h}_i=\displaystyle\int_0^\infty x dH_i(x)<\infty\,, \\ h_i^{(2)}=\displaystyle\int_0^\infty x^2 dH_i(x)<\infty\,. \end{cases}$$

(iii) 窓口 i から窓口 $i+1$ への歩行時間は，互いに独立に分布関数 $U_i(x)$ に従う．ここに，$U_N(x)$ は窓口 N から窓口1への歩行時間の分布関数である．$U_i(x)$ の1次と2次の積率は有限とする．すなわち，

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{u}_i=\displaystyle\int_0^\infty x dU_i(x)<\infty\,, \\ u_i^{(2)}=\displaystyle\int_0^\infty x^2 dU_i(x)<\infty\,. \end{cases}$$

つぎに，扱者の窓口到着時点とサービス終了時点をとり，これらの全時点を時間の経過に従って

$$\cdots\cdots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \cdots\cdots$$

と順序づける．そして，これらの時点の集合を T で表わす．また，$t_n(\in T)$ が扱者の窓口到着時点か呼のサービス終了時点かを区別する指標として，

$$(3)\qquad \delta_n=\begin{cases} 0, & t_n \text{ が扱者の窓口到着時点} \\ 1, & t_n \text{ が呼のサービス終了時点} \end{cases}$$

を導入する．さらに，扱者が時点 t_n にどの窓口にいるかを示す指標 ε_n には，そのときの窓口番号を用いる．

いま，時点 $t_n(\in T)$ における窓口 $i(i=1,2,\cdots\cdots,N)$ の待ち呼数を $\xi_n(i)$ で表わし，N 次元の確率ベクトル χ_n を

$$\chi_n=\{\xi_n(1),\xi_n(2),\cdots\cdots,\xi_n(N)\}$$

で定義する．すると，簡単な考察から，$N+2$ 次元の確率ベクトル $(\delta_n,\varepsilon_n,\chi_n)$ は既約で非周期的

なマルコフ連鎖を作ることが判り，その状態空間は

$$I=\{(l,i,k_1,k_2,\cdots\cdots,k_N):l=0,1:i=1,2,\cdots\cdots,N:k_j=0,1,2,\cdots\cdots,\ j=1,2,\cdots\cdots,N\}$$

で表わされる．よって，マルコフ連鎖の定理 [4] により，

(4) $$p_i{}^l(\chi)=\lim_{n\to\infty}P_r\{\delta_n=l,\varepsilon_n=i,\chi_n=\chi\}$$

が初期状態と独立に存在し，すべての

$$(l,i,\chi)\in I$$

にたいし，

(5) $$p_i{}^l(\chi)>0,\quad \sum_{(l,i,\chi)\in I}p_i{}^l(\chi)=1$$

または

(6) $$p_i{}^l(\chi)=0$$

の何れかが成立する．もし，系に統計的平衡状態が存在すれば，式 (5) が成立する．これは，マルコフ連鎖がエルゴード的であることを意味し，そのときの定常確率は式 (4) で与えられる．

平衡条件にたいする考察は節5で行なうこととし，以下ではこれを仮定して議論を進める．定常確率 $p_i{}^l(\chi)$ にたいしては，次の各母関数

(6) $$G_i(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N)=\sum_{k_1,k_2,\cdots\cdots,k_N=0}^{\infty}z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\cdots\cdots z_N{}^{k_N}p_i{}^0(k_1,k_2,\cdots\cdots,k_N)$$

(7) $$Q_i(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N)=\sum_{k_1,k_2,\cdots\cdots,k_N=0}^{\infty}z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\cdots\cdots z_N{}^{k_N}p_i{}^1(k_1,k_2,\cdots\cdots,k_N)$$

を導入しておくと便利である．前者は扱者が窓口 i へ到着した時点での待ち呼数にたいする母関数，後者は窓口 i における呼のサービス終了時点での待ち呼数にたいする母関数を表わす．もちろん，

(8) $$\sum_{i=1}^{N}\{G_i(1,1,\cdots\cdots,1)+Q_i(1,1,\cdots\cdots,1)\}=1$$

が成立する．

3. 窓口が2個の複数待ち行列

この場合の解析が最も基本的で，歩行時間を無視すると，Avi-Itzhak et al. [2] と Takács [3] の場合になる．窓口番号は1と2である．

3・1 待ち呼数の解析

扱者が時点 $t_{n+1}(\in T)$ に窓口1に到着したとする．この事象は $\{\delta_{n+1}=0,\varepsilon_{n+1}=1\}$ で，次のいずれかの事象

(a) $\{\delta_n=0,\quad \varepsilon_n=2,\quad \xi_n(2)=0\}$

(b) $\{\delta_n=1,\quad \varepsilon_n=2,\quad \xi_n(2)=0\}$

から生じる．窓口２から１への歩行時間を $u_2(=t_{n+1}-t_n)$ とし，その間に窓口 1, 2 へ到着する呼数をそれぞれ $\nu_1(u_2), \nu_2(u_2)$ で表わす．(a), (b) のいずれにたいしても

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \xi_{n+1}(1)=\xi_n(1)+\nu_1(u_2) \\ \xi_{n+1}(2)=\nu_2(u_2) \end{cases}$$

が成立する．

さて，定義により，u_2 の分布関数は $U_2(u_2)$ である．よって，その L-S 変換[3] を

$$\text{(10)} \qquad U_2^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dU_2(x)$$

とかけば，$\{\nu_1(u_2), \nu_2(u_2)\}$ の確率母関数は呼がポアソン到着のため

$$\text{(11)} \qquad E[z_1^{\nu_1(u_2)}z_2^{\nu_2(u_2)}]=U_2^*(Z_1+Z_2)$$

となる．ただし，記法を簡単にするため，

$$\text{(12)} \qquad Z_i=\lambda_i(1-z_i), \quad i=1,2$$

とおいた．一方，$\{\xi_n(1), \xi_n(2)\}$ にたいする母関数は，(a) の場合が $G_2(z_1, 0)$, (b) の場合が $Q_2(z_1, 0)$ であるから，式 (9) より

$$\text{(13)} \qquad G_1(z_1, z_2)=\{G_2(z_1, 0)+Q_2(z_1, 0)\}U_2^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．

同様にして，扱者が時点 $t_{n+1}(\in T)$ に窓口２に到着した事象を考えれば，

$$\text{(14)} \qquad G_2(z_1, z_2)=\{G_1(0, z_2)+Q_1(0, z_2)\}U_1^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．ただし，

$$\text{(15)} \qquad U_1^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dU_1(x)$$

とした．式 (14) で $z_2=0$ とおけば

$$G_2(z_1, 0)=\{G_1(0, 0)+Q_1(0, 0)\}U_1^*(Z_1+\lambda_2)$$

となるから，これを式 (13) の $G_2(z_1, 0)$ に代入すれば

$$\text{(16)} \qquad G_1(z_1, z_2)=[\{G_1(0, 0)+Q_1(0, 0)\}U_1^*(Z_1+\lambda_2)+Q_2(z_1, 0)]U_2^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．式 (16) で $z_1=z_2=0$ とおき，$G_1(0, 0)$ を解けば

$$\text{(17)} \qquad G_1(0, 0)=\frac{Q_1(0, 0)U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)+Q_2(0, 0)}{1-U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)$$

をうる．よって，これを式 (16) に代入したのち若干の計算をすれば，

$$\text{(18)} \qquad G_1(z_1, z_2)=\left[\frac{Q_1(0, 0)+Q_2(0, 0)U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}{1-U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}U_1^*(Z_1+\lambda_2)\right.$$
$$\left.+Q_2(z_1, 0)\right]U_2^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．窓口１と窓口２の関係は対称であるから，$G_2(z_1, z_2)$ にたいしても

3) Laplace-Stieltjes 変換の略である．この論文では，分布関数 $F(x)$ の L-S 変換を $F^*(S)$ で表わす．

(19)
$$G_2(z_1, z_2)=\left[\frac{Q_2(0,0)+Q_1(0,0)\,U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)}{1-U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)\,U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}\,U_2^*(\lambda_1+Z_2)\right.$$
$$\left.+Q_1(0, z_2)\right]U_1^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．式 (18), (19) の右辺の括孤内はそれぞれ z_1, z_2 だけの関数であるから，これらを

(20)
$$\begin{cases} V_2(z_1)=\dfrac{Q_1(0,0)+Q_2(0,0)\,U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}{1-U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)\,U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}\,U_1^*(Z_1+\lambda_2)+Q_2(z_1, 0) \\ V_1(z_2)=\dfrac{Q_2(0,0)+Q_1(0,0)\,U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)}{1-U_1^*(\lambda_1+\lambda_2)\,U_2^*(\lambda_1+\lambda_2)}\,U_2^*(\lambda_1+Z_2)+Q_1(0, z_2) \end{cases}$$

とかけば，

(21)
$$\begin{cases} G_1(z_1, z_2)=V_2(z_1)\,U_2^*(Z_1+Z_2) \\ G_2(z_1, z_2)=V_1(z_2)\,U_1^*(Z_1+Z_2) \end{cases}$$

をうる．ただし，$V_2(z_1)$ と $V_1(z_2)$ はまだ未知関数である．

つぎに，$Q_i(z_1, z_2)$, $i=1, 2$, について考える．$t_{n+1}(\in T)$ を窓口1における呼のサービス終了時点とする．この事象は $\{\delta_{n+1}=1, \varepsilon_{n+1}=1\}$ で表わされ，次のいずれかの事象

(c) $\{\delta_n=1,\quad \varepsilon_n=1,\quad \xi_n(1)>0\}$

(d) $\{\delta_n=0,\quad \varepsilon_n=1,\quad \xi_n(1)>0\}$

から生じる．t_n から t_{n+1} までのサービス時間を v_1, その間に窓口 1, 2 に到着する呼数をそれぞれ $\nu_1(v_1), \nu_2(v_1)$ とすれば，(c), (d) のいずれにたいしても

(22)
$$\begin{cases} \xi_{n+1}(1)=\xi_n(1)+\nu_1(v_1)-1, \quad \xi_n(1)>0 \\ \xi_{n+1}(2)=\xi_n(2)+\nu_2(v_1) \end{cases}$$

が成立する．v_1 の分布関数は $H_1(v_1)$ であるから，その L-S 変換を

(23)
$$H_1^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dH_1(x)$$

とかけば，式 (13) の誘導とほぼ同様にして

(24)
$$Q_1(z_1, z_2)=[\{Q_1(z_1, z_2)-Q_1(0, z_2)\}+\{G_1(z_1, z_2)$$
$$-G_1(0, z_2)\}]H_1^*(Z_1+Z_2)/z_1$$

をうる．これを変形すれば

$$Q_1(z_1, z_2)=\frac{G_1(z_1, z_2)-G_1(0, z_2)-Q_1(0, z_2)}{z_1-H_1^*(Z_1+Z_2)}\,H_1^*(Z_1+Z_2)$$

となり，さらに式 (14) と式 (21) の第2式より得られる関係

$$V_1(z_2)=G_1(0, z_2)+Q_1(0, z_2)$$

に注意すれば，

(25)
$$Q_1(z_1, z_2)=\frac{V_2(z_1)\,U_2^*(Z_1+Z_2)-V_1(z_2)}{z_1-H_1^*(Z_1+Z_2)}\,H_1^*(Z_1+Z_2)$$

をうる．$Q_2(z_1, z_2)$ についても，同様にして

$$Q_2(z_1, z_2) = \frac{V_1(z_2)\,U_1{}^*(Z_1+Z_2)-V_2(z_1)}{z_2-H_2{}^*(Z_1+Z_2)}\,H_2{}^*(Z_1+Z_2) \tag{26}$$

をうる.

いま，$\rho_i=\lambda_i\bar{h}_i\,(i=1,2)$ とおき，

$$\rho_1+\rho_2<1 \tag{27}$$

を仮定する[4]．式 (25) の右辺の分母にルーシェの定理を適用すると，$\rho_1<1$ のとき，任意の $z_2(|z_2|\leqq 1)$ にたいして分母は $|z_1|\leqq 1$ の範囲でただ1つの零点をもつ [3]. そこで，この零点を

$$\hat{z}_1=\beta_1(z_2),\quad |z_2|\leqq 1 \tag{28}$$

で表わす．これは，次のようにも表示される．いま，タイプ1の呼だけが到着する普通の M/G/1 系を考え，その全稼働時間分布の L-S 変換を $\Gamma_1(s)$ で表わす．すると，z_1 は

$$\hat{z}_1=\Gamma_1(Z_2) \tag{29}$$

である [3]. $Q_1(z_1, z_2)$ は

$$|z_1|\leqq 1,\quad |z_2|\leqq 1$$

の範囲で正則であるから，式 (25) の右辺の分母の零点は分子の零点に一致する．よって，

$$V_1(z_2)=V_2\{\beta_1(z_2)\}\,U_2{}^*[\lambda_1\{1-\beta_1(z_2)\}+Z_2] \tag{30}$$

が成立する．同様にして，式 (26) の右辺の分母の零点を

$$\hat{z}_2=\beta_2(z_1),\quad |z_1|\leqq 1 \tag{31}$$

とおけば，

$$V_2(z_1)=V_1\{\beta_2(z_1)\}\,U_1{}^*[\lambda_2\{1-\beta_2(z_1)\}+Z_1] \tag{32}$$

が成立する．式 (30), (32) は $V_1(z_2)$, $V_2(z_1)$ にたいする関数方程式を与え，比例定数を除けば，それぞれの関数形は決定される[5]．そして，比例定数は

$$\lim_{z_1, z_2\to 1}\sum_{i=1}^{2}\{G_i(z_1, z_2)+Q_i(z_1, z_2)\}=1 \tag{33}$$

から与えられる.

$V_1(z_2), V_2(z_1)$ の具体的関数形が与えられなくても，待ち呼数の平均特性は求められる．以下に，これを示そう.

3・2 平均待ち呼数の計算

扱者の窓口 $i(i=1,2)$ への到着時点における窓口 $j(j=1,2)$ の平均待ち呼数を $\bar{g}_i(j)$, タイプ $i(i=1,2)$ の呼のサービス終了時点における窓口 $j(j=1,2)$ の平均待ち呼数を $\bar{q}_i(j)$ とする.

$$G_i(1,1)=\lim_{z_1, z_2\to 1} G_i(z_1, z_2),\quad i=1,2$$

$$Q_i(1,1)=\lim_{z_1, z_2\to 1} Q_i(z_1, z_2),\quad i=1,2$$

とおけば，

---

4) 節5の解析から知られるように，これは系の平衡条件である.

5) ただし，Takács [3] の解析からも知られるように，これを具体的に求めるのは困難である，

(34) $$\bar{g}_i(j)=\lim_{z_1, z_2\to 1}\{\partial G_i(z_1, z_2)/\partial z_j\}/G_i(1,1)$$

(35) $$\bar{q}_i(j)=\lim_{z_1, z_2\to 1}\{\partial Q_i(z_1, z_2)/\partial z_j\}/Q_i(1,1)$$

である．

まず，$\bar{g}_i(j)$ を計算するため，式 (34) に式 (21) を代入すれば，

(36) $$\begin{cases}\bar{g}_1(1)=\{V_2'(1)+\lambda_1\bar{u}_2V_2(1)\}/G_1(1,1)\\ \bar{g}_2(2)=\{V_1'(1)+\lambda_2\bar{u}_1V_1(1)\}/G_2(1,1)\end{cases}$$

(37) $$\begin{cases}\bar{g}_1(2)=\lambda_2\bar{u}_2V_2(1)/G_1(1,1)\\ \bar{g}_2(1)=\lambda_1\bar{u}_1V_1(1)/G_2(1,1)\end{cases}$$

をうる．式 (25) の右辺の分母は $z_1, z_2\to 1$ の極限で 0 となるから，分子も同じ極限で 0 となる．よって，K を 1 つの定数とすれば，

(38) $$V_1(1)=V_2(1)=K$$

となる．また，式 (21) から

(39) $$G_1(1,1)=G_2(1,1)=K$$

となり，式 (36), (37) はそれぞれ

(40) $$\begin{cases}\bar{g}_1(1)=V_2'(1)/K+\lambda_1\bar{u}_2\\ \bar{g}_2(2)=V_1'(1)/K+\lambda_2\bar{u}_1\end{cases}$$

(41) $$\begin{cases}\bar{g}_1(2)=\lambda_2\bar{u}_2\\ \bar{g}_2(1)=\lambda_1\bar{u}_1\end{cases}$$

とかかれる．式 (41) は直観からも容易にえられる．つぎに，

(42) $$\begin{cases}\beta_1'(1)=-\lambda_2\Gamma_1'(0)=\lambda_2\bar{h}_1/(1-\rho_1)\\ \beta_2'(1)=-\lambda_1\Gamma_2'(0)=\lambda_1\bar{h}_2/(1-\rho_2)\end{cases}$$

に注意しながら [5]，式 (30), (32) をそれぞれ z_2, z_1 で微分して $z_2, z_1\to 1$ とすれば，

(43) $$\begin{cases}V_1'(1)=\lambda_2\{\bar{u}_2K+\bar{h}_1V_2'(1)\}/(1-\rho_1)\\ V_2'(1)=\lambda_1\{\bar{u}_1K+\bar{h}_2V_1'(1)\}/(1-\rho_2)\end{cases}$$

をうる．ただし，$\rho_i=\lambda_i\bar{h}_i(i=1,2)$ の関係を利用した．これから $V_1'(1), V_2'(1)$ を解けば

(44) $$\begin{cases}V_1'(1)=\lambda_2\{\rho_1\bar{u}_1+(1-\rho_2)\bar{u}_2\}K/(1-\rho_1-\rho_2)\\ V_2'(1)=\lambda_1\{\rho_2\bar{u}_2+(1-\rho_1)\bar{u}_1\}K/(1-\rho_1-\rho_2)\end{cases}$$

となり，式 (40) に代入して

(45) $$\begin{cases}\bar{g}_1(1)=\lambda_1(1-\rho_1)(\bar{u}_1+\bar{u}_2)/(1-\rho_1-\rho_2)\\ \bar{g}_2(2)=\lambda_2(1-\rho_2)(\bar{u}_1+\bar{u}_2)/(1-\rho_1-\rho_2)\end{cases}$$

をうる．

タイプ $i(i=1,2)$ の待ち呼が 1 つあるとき，全稼働時間の分布関数の L-S 変換は $\Gamma_i(s)$ で，その平均は

(46) $\quad \bar{\gamma}_i = -\Gamma_i'(0) = \bar{h}_i/(1-\rho_i), \quad i=1,2$

である [5]．よって，1回の到着で扱者が窓口 $i(i=1,2)$ に滞在している時間を b_i とすれば，その分布関数の L-S 変換 $B_i^*(s)$ は

(47) $$\begin{cases} B_1^*(s) = G_1\{\Gamma_1(s), 1\}/G_1(1,1) \\ B_2^*(s) = G_2\{1, \Gamma_2(s)\}G_2(1,1), \end{cases}$$

その平均 $\bar{b}_i$ は式 (45)，(46) より

(48) $\quad \bar{b}_i = \rho_i(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/(1-\rho_1-\rho_2), \quad i=1,2$

となる．

つぎに，$\bar{q}_i(j)$ を計算する．まず，式 (25)，(26) にロピタルの定理を適用すれば，

(49) $\quad Q_i(1,1) = \lambda_i(\bar{u}_1+\bar{u}_2)K/(1-\rho_1-\rho_2), \quad i=1,2$

をうる．また，式 (25) をそれぞれ z_1, z_2 で微分したのち $z_1, z_2 \to 1$ とすれば，若干の計算ののち

(50) $$\begin{aligned} \bar{q}_1(1) = [&\{(1-\rho_1)(2\rho_1\bar{u}_2 + \lambda_1 u_2^{(2)}) + \lambda_1^2 h_1^{(2)}\bar{u}_2\}\lambda_1 K \\ &+ \{2(1-\rho_1)(\rho_1+\lambda_1\bar{u}_2) + \lambda_1^2 h_1^{(2)}\}V_2'(1) \\ &+ (1-\rho_1)V_2''(1)]/2(1-\rho_1)^2 Q_1(1,1) \end{aligned}$$

(51) $$\begin{aligned} \bar{q}_1(2) = [&\{-\lambda_2\bar{h}_1(2\lambda_2\bar{h}_1\bar{u}_2 + \lambda_2 u_2^{(2)}) + \lambda_2^2 h_1^{(2)}\bar{u}_2\}\lambda_2 K \\ &+ \{2(\lambda_2\bar{h}_1)^2 - \lambda_2^2 h_1^{(2)}\}V_1'(1) \\ &+ \lambda_2\bar{h}_1 V_1''(1)]/2(\lambda_2\bar{h}_1)Q_1(1,1) \end{aligned}$$

をうる．式 (50)，(51) の右辺において，すべての添字 1，2 を交換すれば，$\bar{q}_2(2)$，$\bar{q}_2(1)$ も容易にえられる．なお，$V_1''(1)$ と $V_2''(1)$ は次のように計算される．

式 (30)，(32) をそれぞれ z_2, z_1 について2回微分したのち，$z_1, z_2 \to 1$ とすれば

(52) $$\begin{cases} -(\lambda_2\bar{h}_1)^2 V_2''(1) + (1-\rho_1)^2 V_1''(1) = KC_1 \\ -(\lambda_1\bar{h}_2)^2 V_1''(1) + (1-\rho_2)^2 V_2''(1) = KC_2 \end{cases}$$

をうる．ただし，簡単のため

(53) $$\begin{cases} C_1 = \lambda_2^2 u_2^{(2)} + 2\lambda_2\bar{u}_2\rho_1 \dfrac{(1-\rho_1)\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2}{1-\rho_1-\rho_2} + \lambda_2^2 h_1^{(2)} \dfrac{\lambda_1(\bar{u}_1+\bar{u}_2)}{1-\rho_1-\rho_2} \\ C_2 = \lambda_1^2 u_1^{(2)} + 2\lambda_1\bar{u}_1\rho_2 \dfrac{(1-\rho_2)\bar{u}_2 + \rho_1\bar{u}_1}{1-\rho_1-\rho_2} + \lambda_1^2 h_2^{(2)} \dfrac{\lambda_2(\bar{u}_1+\bar{u}_2)}{1-\rho_1-\rho_2} \end{cases}$$

とおいた．式 (52) から $V_2''(1), V_1''(1)$ を解けば

(54) $$\begin{cases} V_1''(1) = \dfrac{(\lambda_1\bar{h}_2)^2 C_1 + (1-\rho_1)^2 C_2}{(1-\rho_1)^2(1-\rho_2)^2 - \rho_1^2\rho_2^2} K \\ V_2''(1) = \dfrac{(\lambda_2\bar{h}_1)^2 C_2 + (1-\rho_2)^2 C_1}{(1-\rho_1)^2(1-\rho_2)^2 - \rho_1^2\rho_2^2} K \end{cases}$$

をうる．最後に，式 (39)，(49) を式 (33) に代入すれば，

(55) $\quad 1/K = 2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\bar{u}_1+\bar{u}_2)/(1-\rho_1-\rho_2)$

をうる．

3・3 待ち時間の解析

タイプ $i(i=1,2)$ の呼にたいする待ち時間分布の L-S 変換を $W_i^*(s)$ とする．系に到着した呼は待ち時間とサービス時間の和の間だけ系に滞在しているから，その間に到着した呼数は，対象とする呼が系から退去するときの待ち呼数に一致する．よって，

$$|s-\lambda_i| \leqq \lambda_i, \quad i=1,2$$

にたいし，

$$\text{(56)} \qquad \begin{cases} W_1^*(s)=Q_1(1-s/\lambda_1,1)/Q_1(1,1)H_1^*(s) \\ W_2^*(s)=Q_2(1,1-s/\lambda_2)/Q_2(1,1)H_2^*(s) \end{cases}$$

が成立する [3]．この関係は，右辺の連続性と解析接続により，$R_e(s) \geqq 0$ の領域で一意に決定される．式 (56) に式 (25)，(26)，(49) を代入すれば，

$$\text{(57)} \qquad \begin{cases} W_1^*(s)=\dfrac{(1-\rho_1-\rho_2)\{K-U_2^*(s)V_2(1-s/\lambda_1)\}}{(\bar{u}_1+\bar{u}_2)[s-\lambda_1\{1-H_1^*(s)\}]K} \\ W_2^*(s)=\dfrac{(1-\rho_1-\rho_2)\{K-U_1^*(s)V_1(1-s/\lambda_2)\}}{(\bar{u}_1+\bar{u}_2)[s-\lambda_2\{1-H_2^*(s)\}]K} \end{cases}$$

をうる．いま，タイプ $i(i=1,2)$ の呼にたいする平均待ち時間を $\bar{w}_i$ で表わす．式 (57) の第1式より，$\bar{w}_1$ は

$$\text{(58)} \qquad \begin{aligned} \bar{w}_1 &= \lim_{s\to 0}(-1)dW_1^*(s)/ds \\ &= \frac{1-\rho_1-\rho_2}{2(1-\rho_1)^2(\bar{u}_1+\bar{u}_2)K}[(1-\rho_1)\{u_2^{(2)}K+2\bar{u}_2V_2'(1)/\lambda_1+V_2''(1)/\lambda_1^2\} \\ &\quad +\lambda_1h_1^{(2)}\{u_2K+V_2'(1)/\lambda_1] \\ &= [\{(1-\rho_1)\lambda_1u_2^{(2)}+\lambda_1^2h_1^{(2)}\bar{u}_2\}\lambda_1K+\{2(1-\rho_1)\lambda_1\bar{u}_2+\lambda_1^2h_1^{(2)}\}V_2'(1) \\ &\quad +(1-\rho_1)V_2''(1)]/2(1-\rho_1)^2Q_1(1,1) \end{aligned}$$

と計算される．式 (58) の右辺において，すべての添字 1, 2 を交換すれば，$\bar{w}_2$ も容易にえられる．なお，式 (58) を式 (50) に代入したのち，若干の計算をすれば

$$\text{(59)} \qquad \bar{q}_1(1)=\lambda_1(\bar{w}_1+\bar{h}_1)$$

が導かれる．式 (59) は Little [6] の結果と一致する．また，

$$\bar{u}_i \to 0, \quad i=1,2$$

とすれば，

$$\text{(60)} \qquad \lim_{u_1,u_2\to 0}\bar{w}_1=\frac{\lambda_1h_1^{(2)}}{2(1-\rho_1)}+\frac{\lambda_1\rho_2^2h_1^{(2)}+\lambda_2(1-\rho_1)^2h_2^{(2)}}{2(1-\rho_1)\{(1-\rho_1)^2(1-\rho_2)^2-\rho_1^2\rho_2^2\}}$$

となり，歩行時間を無視した Takács [3] の結果と一致することが確かめられる．

4. 窓口が N 個の複数待ち行列

この節では，N個の窓口よりなる一般の複数待ち行列を対象とする．ただし，解析の方法は前

節と同様である，

4・1 待ち呼数の解析

扱者が時点 $t_{n+1}(\in T)$ に窓口 $i+1$ に到着したとする．この事象は $\{\delta_{n+1}=0, \varepsilon_{n+1}=i+1\}$ で表わされる．m を

$$m=\max\{k : \delta_k=0, k<n+1, t_k\in T\}$$

で定義すれば，t_m は扱者が窓口 i に到着した最新の時点である．よって，扱者が窓口 i に滞在した時間を τ_i，窓口 i から $i+1$ への歩行時間を u_i とすれば，

$$(61)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1}(j)=\xi_m(j)+\nu_j(\tau_i+u_i), & j\neq i \\ \xi_{n+1}(i)=\nu_i(u_i) \end{cases}$$

をうる．ただし，タイプ j の呼が x 時間に窓口 j に到着する呼数を $\nu_j(x)$ で表わした．いま，タイプ i の呼だけが到着する普通の M/G/1 系を考え，その全稼働時間分布の L-S 変換を $\Gamma_i(s)$ で表わす．すると，時点 t_m における窓口 i の待ち呼数は $\xi_m(i)$ であるから，τ_i の分布関数にたいする L-S 変換は $\{\Gamma_i(s)\}^{\xi_m(i)}$ である．よって，

$$(62)\qquad \begin{cases} Z_j=\lambda_j(1-z_j), \quad j=1, 2, \cdots\cdots, N \\ \sum Z_j=\sum_{j=1}^{N} Z_j \\ \sum Z_j-Z_i=\sum_{j=1}^{N} Z_j-Z_i \end{cases}$$

とかけば，

$$(63)\qquad \begin{aligned} &G_{i+1}(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N) \\ &\quad =G_i\{z_1, z_2, \cdots\cdots, \Gamma_i(\sum Z_j-Z_i), \cdots\cdots, z_N\}\, U_i^*(\sum Z_j) \end{aligned}$$

をうる．式 (63) の右辺の $G_i\{\ \}$ は変数 z_i を含まず，式 (21) の一般化となっている．しかし，式 (63) の右辺に $G_i, G_{i-1}, G_{i-2}, \cdots\cdots$ を順次代入すると，G_{i+1} に関してかなり複雑な関数方程式となる．

つぎに，$Q_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)$ について考察する．$t_{n+1}(\in T)$ を窓口 i における呼のサービス終了時点とする．この事象は $\{\delta_{n+1}=1, \varepsilon_{n+1}=i\}$ で表わされ，次のいずれかの事象

(e) $\{\delta_n=1, \quad \varepsilon_n=i, \quad \xi_n(i)>0\}$

(f) $\{\delta_n=0, \quad \varepsilon_n=i, \quad \xi_n(i)>0\}$

から生じる．t_n から t_{n+1} までのサービス時間を v_i，その間に窓口 j に到着する呼数を $\nu_j(v_i)$ とすれば，

$$(64)\qquad \begin{cases} \xi_{n+1}(i)=\xi_n(i)+\nu_i(v_i)-1, & \xi_n(i)>0 \\ \xi_{n+1}(j)=\xi_n(j)+\nu_j(v_i) \end{cases}$$

をうる．式 (64) は式 (22) とまったく対応し，式 (25)．(26) を導いたのと同様にして

(65) $$Q_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)$$
$$= \frac{G_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N) - V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, 0, \cdots\cdots, z_N)}{z_i - H_i^*(\sum Z_j)} H_i^*(\sum Z_j)$$

をうる．ただし，$H_i^*(s)$ は分布関数 $H_i(x)$ の L-S 変換で，また $V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)$ は

$$V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)$$
$$= G_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N) + Q_i(z_1, z_2, \cdots\cdots z_N)$$

で定義される．さて，すべての j にたいして

$$|z_j| \leqq 1, \quad j \neq i$$

のとき，$Q_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)$ は $|z_i| \leqq 1$ の範囲で正則である．よって，式 (65) の右辺の分母を $\beta_i(\sum Z_j - Z_i)$ とすれば

(66) $$V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, 0, \cdots\cdots, z_N)$$
$$= G_i\{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{i-1}, \beta_i(\sum Z_j - Z_i), z_{i+1}, \cdots\cdots, z_N\}$$

である．この関係は，平均特性を求めるときに用いられる．

4・2 平均待ち呼数の計算

扱者が窓口 i に到着したときの窓口 j における平均待ち呼数を $\bar{g}_i(j)$ とすれば，

(67) $$\bar{g}_i(j) = \lim_{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1} \{\partial G_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)/\partial z_j\}/G_i(1, 1, \cdots\cdots, 1)$$

である．式 (63) で $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1$ とすれば，

(68) $$G_i(1, 1, \cdots\cdots, 1) = K, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

をうる．ただし，K は 1 つの定数とした．つぎに，式 (63) を z_j で微分したのち $z_1, z_2 \cdots\cdots, z_N \to 1$ とすれば，式 (68) を用いて

(69) $$\bar{g}_{i+1}(j) = \lambda_j \bar{u}_i + \bar{g}_i(j) + \lambda_j \bar{\gamma}_i \bar{g}_i(i), \quad j \neq i$$
$$\bar{g}_{i+1}(i) = \lambda_i \bar{u}_i$$

をうる．ただし，

(70) $$\bar{\gamma}_i = -\Gamma_i'(0) = \bar{h}_i/(1-\rho_i), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

は，タイプ i の呼だけが到着したときの全稼働時間の平均で，式 (46) の一般化である．式 (69) は $\bar{g}_i(j)$, $i, j = 1, 2, \cdots\cdots, N$, にたいする N^2 元の連立 1 次方程式を与え，その根として $\bar{g}_i(j)$ は求められる．

$\bar{g}_i(i)$ は，窓口 i への到着時点における窓口 i の平均待ち呼数を表わし，系の状態を知るうえで特に重要である．以下では，まずこれを求める．式 (70) の関係を利用しながら，$\bar{g}_{i+1}(j)$ を $i=0$ から $N-1$ まで加えれば

(71) $$\sum_{i=0}^{N-1} \bar{g}_{i+1}(j) = \lambda_i \sum_{i=0}^{N-1} \bar{u}_i + \sum_{i=0}^{N-1} \{\bar{g}_i(j) + \lambda_j \bar{\gamma}_i \bar{g}_i(i)\}$$
$$- \{\bar{g}_j(j) + \lambda_j \bar{\gamma}_j \bar{g}_j(j)\}$$

をうる．窓口への処理は巡回的であるから，添字の 0 は N にかき変えられ，式 (71) は

(72) $$\bar{g}_j(j)=\lambda_j\sum_{i=1}^{N}\bar{u}_i+\lambda_j\sum_{i=1}^{N}\bar{\gamma}_i\bar{g}_i(i)-\lambda_j\bar{\gamma}_j\bar{g}_j(j)$$

となる．これから，若干の計算を行なえば，

(73) $$\bar{g}_i(i)=\lambda_i(1-\rho_i)\sum_{j=1}^{N}\bar{u}_j/(1-\sum_{j=1}^{N}\rho_j),\quad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

が導かれる．事実，式 (73) の $\bar{g}_i(i)$ が解であることは，これを式 (72) に代入して容易に確かめられる．$\bar{g}_i(i)$ を用いると，1回の到着で扱者が窓口 i に滞在している平均時間 $\bar{b}_i$ は

(74) $$\bar{b}_i=\bar{\gamma}_i\bar{g}_i(i)=\rho_i\sum_{j=1}^{N}\bar{u}_j/(1-\sum_{j=1}^{N}\rho_j)$$

となる．なお．滞在時間 b_i の分布関数の L-S 変換 $B_i^*(s)$ は，式 (47) と同様にして

(75) $$B_i^*(s)=G_i\{1,1,\cdots\cdots,\Gamma_i(s),1,\cdots\cdots,1\}/G_i(1,1,\cdots\cdots,1)$$

となる．

$\bar{g}_i(i)$ を用いると，$\bar{g}_i(j)$ は以下のように求められる．式 (69) の $\bar{g}_i(j)$ を $i=j,j+1,\cdots\cdots,i-1,i$ について加えれば，

(76) $$\bar{g}_{i+1}(j)=\lambda_j\sum_{k=j}^{i}\bar{u}_k+\lambda_j\sum_{k=j+1}^{i}\bar{\gamma}_k\bar{g}_k(k)$$

をうる．ただし，$j>i$ のときは

$$\sum_{k=j}^{i}=\sum_{k=j}^{N}+\sum_{k=1}^{i}$$

と解釈する．式 (76) に式 (73) を代入すれば

(77) $$\bar{g}_i(j)=\lambda_j\sum_{k=j}^{i-1}\bar{u}_k+\lambda_j\sum_{k=1}^{N}\bar{u}_k\sum_{k=j+1}^{i-1}\rho_k/(1-\sum_{k=1}^{N}\rho_k)$$

をうる．

つぎに，タイプ i の呼のサービス終了時点における窓口 j の平均待ち呼数を $\bar{q}_i(j)$ とすれば，

(78) $$\bar{q}_i(j)=\lim_{z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N\to 1}\{\partial Q_i(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N)/\partial z_j\}/Q_i(1,1,\cdots\cdots,1)$$

である．式 (65) にロピタルの定理を適用したのち式 (73) に注意すれば，

(79) $$\begin{aligned}Q_i(1,1,\cdots\cdots,1)&=K\bar{g}_i(i)/(1-\rho_i)\\&=K\lambda_i\sum_{j=1}^{N}\bar{u}_j/(1-\sum_{j=1}^{N}\rho_j)\end{aligned}$$

をうる．式 (79) は式 (49) の一般化である．つぎに，式 (65) を $z_j(j=1,2,\cdots\cdots,N)$ で微分したのちロピタルの定理を適用すれば，

(80) $$\begin{aligned}&\lim_{z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N\to 1}\partial Q_i(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_N)/\partial z_i\\&=K[\{g_i^{(2)}(i,i)+2\rho_i\bar{g}_i(i)\}(1-\rho_i)+\lambda_i^2h_i^{(2)}\bar{g}_i(i)]/2(1-\rho_i)\end{aligned}$$

(81)
$$\lim_{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1} \partial Q_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)/\partial z_j$$
$$=[\lambda_j \bar{h}_i \{V_i''(j,j) - Kg_i^{(2)}(j,j)\} + 2(\lambda_j \bar{h}_i)^2 \{V_i'(j) - K\bar{g}_i(j)\}$$
$$+\lambda_j^2 h_i^{(2)} \{K\bar{g}_i(j) - V_i'(j)\}]/2(\lambda_j \bar{h}_i)^2, \quad i \neq j$$

をうる．ここに，

(82)
$$g_i^{(2)}(j,k) = \lim_{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1} \partial^2 G_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N)/\partial z_j \partial z_k$$

(83)
$$\begin{cases} V_i'(j) = \lim_{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1} \partial V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, 0, \cdots\cdots, z_N)/\partial z_j \\ V_i''(j,j) = \lim_{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N \to 1} \partial^2 V_i(z_1, z_2, \cdots\cdots, 0, \cdots\cdots, z_N)/\partial z_j^2 \end{cases}$$

とした．式 (66) を用いれば

(84)
$$\begin{cases} V_i'(j) = K\{\bar{g}_i(j) + \lambda_j \bar{\gamma}_i \bar{g}_i(i)\} \\ V_i''(j,j) = K\{g_i^{(2)}(j,j) + 2\lambda_j \bar{\gamma}_i g_i^{(2)}(i,j) + \lambda_j^2 \gamma_i^{(2)} g_i^{(2)}(i,i)\} \end{cases}$$

となるから，

(85)
$$\bar{q}_i(i) = (1 - \sum_{j=1}^N \rho_j)[\{2\rho_i(1-\rho_i) + \lambda_i^2 h_i^{(2)}\}\bar{g}_i(i)$$
$$+ (1-\rho_i) g_i^{(2)}(i,i)]/2\lambda_i(1-\rho_i)\sum_{j=1}^N \bar{u}_j$$

(86)
$$\bar{q}_i(j) = (1 - \sum_{j=1}^N \rho_j)[\lambda_j \bar{\gamma}_i \{2(\lambda_j \bar{h}_i)^2 - \lambda_j^2 h_i^{(2)}\}\bar{g}_i(i)$$
$$+\lambda_j^3 \bar{h}_i \gamma_i^{(2)} g_i^{(2)}(i,i) + 2\lambda_j^2 \bar{h}_i \bar{\gamma}_i g_i^{(2)}(i,j)]/2\lambda_i(\lambda_j \bar{h}_i)^2 \sum_{j=1}^N \bar{u}_j,$$
$$i \neq j$$

をうる．$\bar{g}_i(i), \bar{g}_i(j)$ はそれぞれ式 (73), (77) で与えられているから，$g_i^{(2)}(j,k)$ が求められれば $\bar{q}_i(i), \bar{q}_i(j)$ は決定される．

式 (63) を z_j と z_k で微分すれば，

(87)
$$\begin{cases} g_{i+1}^{(2)}(j,k) = \lambda_j \lambda_k u_i^{(2)} + \lambda_j \bar{u}_i \bar{g}_i(k) + \lambda_k \bar{u}_i \bar{g}_i(j) \\ \qquad + (2\lambda_j \lambda_k \bar{u}_i \bar{\gamma}_i + \lambda_j \lambda_k \gamma_i^{(2)})\bar{g}_i(i) + \lambda_k \bar{\gamma}_i g_i^{(2)}(i,j) \\ \qquad + \lambda_j \bar{\gamma}_i g_i^{(2)}(i,k) + \lambda_j \lambda_k (\bar{\gamma}_i)^2 g_i^{(2)}(i,i) + g_i^{(2)}(j,k), \quad i \neq j, \ i \neq k \\ g_{i+1}^{(2)}(i,j) = \lambda_i \lambda_j u_i^{(2)} + \lambda_i \bar{u}_i \bar{g}_i(j) + \lambda_i \lambda_j \bar{u}_i \bar{\gamma}_i \bar{g}_i(i), \quad i \neq j \\ g_{i+1}^{(2)}(i,i) = \lambda_i^2 u_i^{(2)} \end{cases}$$

をうる．式 (87) は $g_i^{(2)}(j,k)$, $i,j,k=1,2,\cdots\cdots,N$, にたいする N^3 元の連立一次方程式を与え，その根として $g_i^{(2)}(j,k)$ は求められる．しかし，節 3·2 の解析から類推されるように，この根は単純な形で表示されない．よって，現実には電子計算機による数値計算が考えられる．なお，対称な複数待ち行列[6] の場合，$g_i^{(2)}(i,i)$ は単純な形に帰着できるので，これを付録に示し

6) 対称な複数待ち行列の定義は，付録で与えられる．

た．

最後に，式 (68), (79) を用いると，定数 K は

$$1/K = N + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{N} \bar{u}_j / (1 - \sum_{j=1}^{N} \rho_j) \tag{88}$$

で与えられる．式 (88) は式 (55) の一般化である．

4・3 待ち時間の解析

タイプ i ($i=1, 2, \cdots\cdots, N$) の呼にたいする待ち時間分布の L-S 変換を $W_i^*(s)$ とする．すると，式 (56) の誘導と同様にして

$$\begin{aligned} W_i^*(s) &= Q_i(1, \cdots\cdots, 1, 1-s/\lambda_i, 1, \cdots\cdots, 1)/Q_i(1, 1, \cdots\cdots, 1) H_i^*(s) \\ &= \frac{K - G_i(1, \cdots\cdots, 1, 1-s/\lambda_i, 1, \cdots\cdots, 1)}{Q_i(1, 1, \cdots\cdots, 1)[s - \lambda_i\{1 - H_i^*(s)\}]\lambda_i} \\ &= \frac{(1 - \sum_{j=1}^{N} \rho_j)\{1 - G_i(1, \cdots\cdots, 1, 1-s/\lambda_i, 1, \cdots\cdots, 1)/K\}}{\sum_{j=1}^{N} \bar{u}_j [s - \lambda_i\{1 - H_i^*(s)\}]} \end{aligned} \tag{89}$$

をうる．これから平均待ち時間 $\bar{w}_i$ を計算すると，

$$\bar{w}_i = \lambda_i h_i^{(2)}/2(1-\rho_i) + g_i^{(2)}(i, i)/2\lambda_i \bar{g}_i(i) \tag{90}$$

をうる．$g_i^{(2)}(i, i)$ は式 (87) から求められるが，対称な複数待ち行列については，具体的表示が付録に与えられている．

5. 複数待ち行列の平衡条件

以下では，窓口が 2 個の複数待ち行列について平衡条件を考察するが，この論理は N 個の窓口についても容易に拡張される．

既約で非周期的なマルコフ連鎖がエルゴード的となるための必要条件と十分条件の 1 組が，Foster [7] によって求められている．Cohen [8] は，この Foster の定理を用いて，扱者が手空きのとき到着した呼のサービス時間分布 [$A_1(x)$ とする] と，扱者が処理中に到着した呼のサービス時間分布 [$A_2(x)$ とする] が異なる変形の M/G/1 系について，平衡条件を導いた．それによると，

$$\begin{cases} \lambda \int_0^\infty x dA_1(x) < \infty \\ \lambda \int_0^\infty x dA_2(x) < 1 \end{cases} \tag{91}$$

が所要の必要十分条件である．

いま，扱者が手空きのとき到着した呼にたいしては，処理開始の準備時間 (orientation time) を必要とする M/G/1 系を考える．処理開始の準備時間がその後に続くサービス時間と独立に，

分布関数 $O(x)$ に従えば，式 (91) の第1式は

$$\lambda\int_0^\infty xdO(x)+\lambda\int_0^\infty xdA_2(x)<\infty$$

となる．よって，式 (91) は

$$(92)\qquad \begin{cases}\lambda\int_0^\infty xdO(x)<\infty \\ \lambda\int_0^\infty xdA_2(x)<1\end{cases}$$

とかき直される．この第1式は，扱者が手空きのとき到着した呼にたいしては，到着からサービス開始までの平均準備時間が有限であることを意味する．また第2式は，全稼働時間が有限であることを示す．

さて，窓口が2個の複数待ち行列において，窓口1の待ち行列に着目する．扱者が窓口1を離れたときから戻ってくるまでの時間を扱者不在時間と名付け，θ_1 で表わす．これは窓口1から2への歩行時間，窓口2における全稼働時間，窓口2から1への歩行時間より構成される．扱者不在時間中に到着した最初の呼は，自分の到着時点から扱者の到着時点(扱者不在時間の終了時点)までの時間 θ_1' だけ待たされる．よって，θ_1' を窓口1における処理開始の準備時間と解釈すれば，うえの M/G/1 系の1種とみなされる．扱者不在時間中に到着した最初の呼のサービス時間は，θ_1' と独立に分布関数 $H_1(x)$ に従うから，平衡条件の考察に式 (92) が適用される．よって，$\theta_1'\leqq\theta_1$ に注意すれば，平衡であるための十分条件は

$$(93)\qquad \begin{cases}\lambda_1\bar{\theta}_1<\infty \\ \lambda_1\bar{h}_1=\rho_1<1\end{cases}$$

となる．ただし，$\bar{\theta}_1$ は θ_1 の平均とした．

つぎに，扱者不在時間の平均 $\bar{\theta}_1$ が有限となる条件を求める．平均歩行時間 $\bar{u}_1,\bar{u}_2$ はともに有限であるから，窓口2における全稼働時間の平均が有限であれば十分である．いま扱者が窓口1を離れる1つの時点をとり，そのときの窓口2の待ち呼数を n で表わす．すると，窓口2の全稼働時間の平均 $\bar{b}_2(n,1)$ は

$$\bar{b}_2(n,1)=(n+\lambda_2\bar{u}_1)\bar{\gamma}_2=\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\left(\frac{n}{\lambda_2}+\bar{u}_1\right)$$

である．よって，窓口1へ戻ってきたときの全稼働時間の平均は $\lambda_1\{\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{b}_2(n,1)\}\bar{\gamma}_1$ となり，扱者の次の到着における窓口2の全稼働時間の平均 $b_2(n,2)$ は

$$\bar{b}_2(n,2)=\lambda_2[\bar{u}_1+\bar{u}_2+\lambda_1\{\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{b}_2(n,1)\}\bar{\gamma}_1]\bar{\gamma}_2$$
$$=\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\left[\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{1-\rho_2}+\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\bar{b}_2(n,1)\right]$$

となる．一般に，扱者の m 回目の到着における窓口2の全稼働時間の平均 $\bar{b}_2(n,m)$ は

$$\bar{b}_2(n,m)=\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\left[\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{1-\rho_2}+\frac{\rho_1}{1-\rho_2}\bar{b}_2(n,m-1)\right]$$

となり，その解は

(94)
$$\bar{b}_2(n,m)=\frac{\rho_2(\bar{u}_1+\bar{u}_2)}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\sum_{k=0}^{m-2}\left\{\frac{\rho_1\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\right\}^k+\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\left(\frac{n}{\lambda_2}+\bar{u}_1\right)\left\{\frac{\rho_1\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\right\}^{m-1}$$

となる．よって，

$$\bar{u}_1<\infty,\quad \bar{u}_2<\infty,\quad \rho_1<1,\quad \rho_2<1$$

のもとで

$$\lim_{m\to\infty}\bar{b}_2(n,m)<\infty$$

となるには,

$$n<\infty,\ \frac{\rho_1\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}<1$$

すなわち

(95)
$$n<\infty,\quad \rho_1+\rho_2<1$$

であれば十分である．しかるに，歩行時間を無視した複数待ち行列では，式 (95) が平衡であるための必要条件にもなっている [3]. よって，これは歩行時間を考慮したときの必要条件ともなり，結局必要十分条件を与えることになる．

歩行時間を考慮したときと無視したときの平衡条件が一致することは，次の直観的考察からもえられる．トラヒック密度 $\sum\rho_i$ が増加するにつれ，少なくとも1つの窓口にたいし，1回の巡回で滞在する平均時間は長くなる．このため，一定の時間内の歩行回数は減少し，

歩行のための時間 / 全時間

は $\sum\rho_i$ の増加につれて減少する．飽和直前の臨界状態では，この比は殆んど0に近づき，歩行時間の影響は無視できる．これが，一致の理由である．

5. むすび

Avi-Itzhak et al. や Takács の解析した複数待ち行列を取上げ，窓口の数を N としたうえ，歩行時間も考慮して，待ち呼数や待ち時間などを解析した．窓口が2個の場合は詳しく解析し，同じ方法が窓口数 N の場合にも容易に適用できることを示した．

付　録

対称な複数待ち行列における $g_i^{(2)}(i,i)$ の計算

対称な複数待ち行列とは，到着する呼のタイプおよび窓口番号に無関係に

(付-1)
$$\lambda_i=\lambda,\quad U_i(x)=U(x),\quad H_i(x)=H(x)$$

が成立する複数待ち行列をいう．式 (87) を対称な複数待ち行列についてかき直せば，

$$\text{(付-2)}\quad \begin{cases} g_{i+1}^{(2)}(j,k)=a+b\{\bar{g}_i(k)+\bar{g}_i(j)\}+c\bar{g}_i(i)+d\{g_i^{(2)}(i,j) \\ \qquad\qquad +g_i^{(2)}(i,k)\}+d^2g_i^{(2)}(i,i)+g_i^{(2)}(j,k),\quad i\neq j,\ i\neq k \\ g_{i+1}^{(2)}(i,j)=a+b\bar{g}_i(j)+bd\bar{g}_i(i),\quad i\neq j \\ g_{i+1}^{(2)}(i,i)=a \end{cases}$$

をうる．ただし，

$$\text{(付-3)}\quad a=\lambda^2u^{(2)},\ b=\lambda\bar{u},\ c=2\lambda^2\bar{u}\bar{\gamma}+\lambda^2\gamma^{(2)},\ d=\lambda\bar{\gamma}$$

とした．

待ち行列は対称であるから，

$$\text{(付-4)}\quad \bar{g}=\bar{g}_i(i),\ g^{(2)}=g_i^{(2)}(i,i),\ i=1,2,\cdots\cdots,N$$

とかくことができる．式 (付-2) の第 1，2 式を用いて，両辺を $i=1$ から $i=N$ まで加えれば，

$$\text{(付-5)}\quad \begin{aligned} &g_j^{(2)}(j,k)+g_k^{(2)}(j,k) \\ &=Na+b[\sum_{i=1}^{N}\{\bar{g}_i(k)+\bar{g}_i(j)\}-2\bar{g}]+\{(N-2)c+2bd\}\bar{g} \\ &\quad +d[\sum_{i=1}^{N}\{g_i^{(2)}(i,j)+g_i^{(2)}(i,k) \\ &\quad -2g^{(2)}-g_k^{(2)}(k,j)-g_j^{(2)}(j,k)]+(N-2)d^2g^{(2)} \end{aligned}$$

をうる．同様に，式 (付-2) の第 1, 3 式を用いて，$g_{i+1}^{(2)}(j,j)$ を $i=1$ から $i=N$ まで加えれば

$$\text{(付-6)}\quad \begin{aligned} &g_j^{(2)}(j,j) \\ &=Na+2b\{\sum_{i=1}^{N}\bar{g}_i(j)-\bar{g}\}+(N-1)c\bar{g} \\ &\quad +2d\{\sum_{i=1}^{N}g_i^{(2)}(i,j)-g^{(2)}\}+(N-1)d^2g^{(2)} \end{aligned}$$

をうる．いま，

$$\text{(付-7)}\quad S_1=\sum_{i=1}^{N}\bar{g}_i(j),\ S_2=\sum_{i=1}^{N}g_i^{(2)}(i,j)$$

とおけば，待ち行列の対称性によって S_1, S_2 は j に無関係である．よって，式 (付-5), (付-6) は

$$\text{(付-8)}\quad \begin{aligned} &(1+d)\{g_j^{(2)}(j,k)+g_k^{(2)}(j,k)\} \\ &=Na+\{(N-2)c+2bd-2b\}\bar{g}+2bS_1+2dS_2+\{(N-2)d^2-2d\}g^{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{(付-9)}\quad g_j^{(2)}(j,j)=Na+\{(N-1)c-2b\}\bar{g}+2bS_1+2dS_2+\{(N-1)d^2-2d\}g^{(2)}$$

とかき直される．よって，$(1+d)\{g_j^{(2)}(j,k)+g_k^{(2)}(j,k)\}$ を $i=1$ から $i=N$ まで加えれば，

$$\text{(付-10)}\quad \begin{aligned} &2\{1-(N-2)d\}S_2 \\ &=N(N-1)a+(N-1)\{(N-2)c+2bd-2b\}\bar{g} \\ &\quad +2(N-1)bS_1+[(N-1)\{(N-2)d^2-2d\}+2(1+d)]g^{(2)} \end{aligned}$$

をうる[7]．式（付-9)，（付-10）から S_2 を消去し，$g^{(2)}$ について整理すれば

（付-11） $$g^{(2)}=[(1+d)(Na+2bS_1)+\{(N-1)c-2(1+d)b+2(N-1)bd^2\}\bar{g}]/(1-d)\{1-(N-2)d\}\{1-(N-1)d\}$$

をうる．ここに，S_1 はつぎのように求められる．式 (76) を対称な複数待ち行列に適用すると，

（付-12） $$\bar{g}_{i+1}(j)=(i-j+1)(\lambda\bar{u}+\lambda\bar{\gamma}\bar{g})-\lambda\bar{\gamma}\bar{g}$$

をうる．ただし，$j>i$ のときは

$$(i-j+1)\rightarrow(N+i-j+1)$$

と解釈する．よって，$\bar{g}_{i+1}(j)$ を $i=0$ から $i=N-1$ まで加えれば，

（付-13） $$S_1=\sum_{i=0}^{N-1}\bar{g}_{i+1}(j)=N(N+1)\lambda\bar{u}/2+N(N-1)\lambda\bar{\gamma}\bar{g}/2$$

をうる．式 (73) を対称な複数待ち行列に適用すれば

（付-14） $$\bar{g}=N\lambda(1-\rho)\bar{u}/(1-N\rho)$$

となるから，式（付-3)，（付-13)，（付-14）を式（付-11）に代入して若干の計算をすれば，

（付-15） $$g^{(2)}=\frac{N(1-\rho)\lambda^2u^{(2)}}{1-N\rho}+\frac{N(N-1)(1-\rho)\lambda^2\bar{u}^2}{(1-N\rho)^2}+\frac{N(N-1)\lambda\bar{u}\lambda^2h^{(2)}}{(1-N\rho)^2}$$

をうる．なお，この場合の平均待ち時間 $\bar{w}$ は，式 (90) に式（付-14)，（付-15）を代入して

（付-16） $$\bar{w}=\frac{u^{(2)}}{2\bar{u}}+\frac{(N-1)\bar{u}}{2(1-N\rho)}+\frac{N\lambda h^{(2)}}{2(1-N\rho)}$$

となる．

参 考 文 献

[1] Leibowitz, M.A., "An Approximate Method for Treating a Class of Multiqueue Problems," IBM Journal, July (1961, 204-209).

[2] Avi-Itzhak, B., Maxwell, W.L. and Miller, L.W., "Queueing with Alternating Priorities," J. Oper. Res. Soc. America, **13** (1965, 306-318).

[3] Takács, L., "Two Queues Attended by a Single Server," J. Oper. Res. Soc. America, **16** (1968, 639-650).

[4] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[5] Takács, L., Introduction to the Theory of Queues, Oxford Univ. Press, 1962.

[6] Little, J.D.C., "A Proof for the Queuing Formula: $L=\lambda W$," J. Oper. Res. Soc. America, **9** (1961, 383-387).

[7] Foster, D.G., "On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Processes," Ann. Math. Statist., **24** (1953, 355-360).

[8] Cohen, J.W., "A Variant of the M/G/1 Delay Problem," 4-th International Teletraffic Congress, Session 3, 1964.

7) $\sum_{i=1}^{N} g_i^{(2)}(i,j)=\sum_{j=1}^{N} g_i^{(2)}(i,j)=S_2$ となることに注意する．