経営科学　第13巻　第1号（1969年10月）

≪特　別　講　演≫

展望：　地域投資配分と最適経済成長†

坂　下　昇*

ダイナミック・プログラミングの形に定式化された地域間最適投資配分理論の系譜は，1963年に発表された Md. A. ラーマンの論文 [5] に始まる．その後今日に至るまで，このラーマン・モデルに関しては，いくつかのコメントないし覚書が発表されているが（[2], [3], [6], [8], [9], [11] 等），分析手法の彫琢を別にすれば，問題の基本的発想はほとんど全く変っていない．連続的時間変数を用いて表現するならば，それは以下のようになる．

(1) $$\frac{dK_1}{dt}=\beta(t)\{S_1b_1K_1(t)+S_2b_2K_2(t)\}$$

(2) $$\frac{dK_2}{dt}=(1-\beta(t))\{S_1b_1K_1(t)+S_2b_2K_2(t)\}$$

ここで

$K_i(t)=t$ 時点において i 地域に存在する資本ストック量（$i=1,2$）

$\dfrac{dK_i}{dt}=$同時点における $K_i(t)$ の変化率（$i=1,2$）

$\beta(t)=t$ 時点における第1地域への投資配分率（制御変数，すべての t に関して，$0\leqq\beta(t)\leqq1$）

$S_i=i$ 地域における貯蓄率（定数，$i=1,2$）

$b_i=i$ 地域における資本の生産力係数（＝産出量－資本比率，定数）

である．

上2式を所得変数 $x_i(t)=b_iK_i(t)$,（$i=1,2$）を用いて書き直せば，

(3) $$\frac{dx_1}{dt}=b_1\beta(t)\{S_1x_1(t)+S_2x_2(t)\}$$

(4) $$\frac{dx_2}{dt}=b_2(1-\beta(t))\{S_1x_1(t)+S_2x_2(t)\}$$

となる．ラーマンの樹てた問題は，計画視野を有限時間 [0, T] とするとき，

† 1968年11月14日　秋季研究発表会講演．

* 東北大学，経済学部．

(3)(4) および，すべての t に関して $0 \leqq \beta(t) \leqq 1$ の制約の下で，一定の初期条件 $(x_1(0), x_2(0))$ から出発して，最終時点 T における国民所得 $\{x_1(T)+x_2(T)\}$ を最大化すること．

にほかならない．ところで，この問題は最大原理の手法（[4]）を用いて組織的に解くことができ，その結果は下表のように示される[1]．ただし結果の一般性をほとんど失うことなく，$b_1 > b_2$ と仮定しておく．

パラメーター等の大小関係		最適投資配分政策
1. $S_1b_1 \geqq S_2b_2$		全期間を通じて，$\beta=1$
2. $S_1b_1 < S_2b_2$	2-1. $T \leqq t^*$	全期間を通じて，$\beta=1$
	2-2. $T > t^*$	(i) $0 \leqq t < T-t^*$ の期間は，$\beta=0$. (ii) $T-t^* \leqq t \leqq T$ の期間は，$\beta=1$. ($t=T-t^*$ において政策の切替えが起る.)

$$t^* = \frac{1}{S_1b_1}\log\left\{1+\frac{S_1(b_1-b_2)}{S_2b_2-S_1b_1}\right\} \tag{5}$$

さて，上記のラーマン・モデルは，中央集権化された計画経済に対応するものであって，わが国のような混合経済体制における地域開発政策とは，問題意識をおのづから異にしている．自由市場経済を包含した混合経済体制においては，中央政府にとって制御可能な変数は，たとえば所得税率，公共投資の地域間配分比率等に限られるべきであろう．このような点をふまえて，私は [10] の中で以下に述べるような「公共投資配分モデル」を考えたのである．

1. 租税体系を含む2地域経済の成長パターン

2地域から成る国民経済を考え，それらを総括する中央政府は任意の時点においてある限度内の経常所得税を課しうるものと仮定しよう．ただし課税前において，各地域所得の一定割合が消費控除として留保されるものとする．またこの消費控除は政府による非投資支出を含むと解釈されてよい．C_1, C_2 を各地域の平均消費性向とすれば，被課税所得は，$(1-C_1)x, (1-C_2)y$ のよう

1) 拙稿 [8] 参照．なお，最大原理の手法は最適成長経路のための必要条件しか与えないが，ロクシン [7] で示されている一定の条件下での最適解の存在性と，上記必要条件をみたす解の一義性から，同解が真の最適解であることが保証される．

に示される．ここで，

x＝第１地域の所得

y＝第２地域の所得

とする．

常に可変的かつ一律の所得税率 $r(t)$ が，$100\theta\%$ $(0<\theta<1)$ を上限として両地域に課せられ，結果された税収が両地域に $u:1-u$ の比率で配分されて，生産力を持つ公共投資に用いられるとすれば，われわれは次のような地域成長方程式を持つことになろう．

$$\frac{dx}{dt}=\sigma_1\lambda(1-r)(S_1x+S_2y)+\delta_1ur(S_1x+S_2y) \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt}=\sigma_2(1-\lambda)(1-r)(S_1x+S_2y)+\delta_2(1-u)r(S_1x+S_2y) \tag{7}$$

ここで，

σ_i＝地域 i における民間投資の，増分的産出量－資本比率 $(i=1,2)$

δ_i＝地域 i における公共投資の，増分的産出量－資本比率 $(i=1,2)$

$S_i=1-C_i$ $(i=1,2)$

λ＝第１地域に配分される民間投資の比率[2)]

u＝第１地域に配分される公共投資の比率

かつ，

$$\begin{cases} 0\leqq r\leqq\theta \\ 0<\lambda<1. \\ 0\leqq u\leqq 1 \end{cases}$$

であるが，σ_i, δ_i, S_i および λ は定数係数として扱われ，u および r は中央政府による政策変数として扱われる．

$\theta_1=ur$，$\theta_2=(1-u)r$ という新変数を用いることによって，(6)(7) の方程式体系は，

$$\frac{dx}{dt}=\{\sigma_1\lambda(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_1\theta_1\}(S_1x+S_2y), \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt}=\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_2\theta_2\}(S_1x+S_2y), \tag{9}$$

のように書き改められる．ただし，

$$0\leqq\theta_1,\quad 0\leqq\theta_2,\quad \theta_1+\theta_2\leqq\theta. \tag{10}$$

の制約がつけ加っている．

---

2)　地域間の民間資本交流があることの結果としてそれによる利子所得交流が起こり，各地域の生産所得はその分配所得に必ずしも等しくならない．この点を実際的に考慮する上では，一定の所得漏出率 ρ_{ik} (i 地域から k 地域へ）を考え，各地域の平均貯蓄性向を改めて

$$\{S_1(1-\rho_{12})+S_2\rho_{12}\} \text{ および } \{S_2(1-\rho_{21})+S_1\rho_{21}\}$$

の意味で定義し直すことが適当であろう．

2. 有限時間視野の下での最適成長

本節でのわれわれの目標は，$t=0$ における初期条件の組 (x_0, y_0) から出発して，(8) (9) (10) の制約の下で終期時点 $t=T$ における国民所得を最大化することである．その定式化は，

> (8) (9) (10) の制約下で，
>
> $$\left[\{x(T)+y(T)\}=\int_0^T\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)dt+(x_0+y_0)\right]$$
>
> を政策変数 $\theta_1(t)$ および $\theta_2(t)$ $(0\leqq t\leqq T)$ に関し最大化する．

にほかならない．

この問題もまた最大原理の手法によって組織的に解くことが可能である。特に [4] 第1章の定理7が直接に適用されうる ([4] pp. 68-69). まずはじめに，この問題についてのハミルトニアンが下記のように構成される．

$$H=-\psi_0\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)+\psi_1\frac{dx}{dt}+\psi_2\frac{dy}{dt}, \tag{11}$$

ここで，ψ_0, ψ_1 および ψ_2 はその動きが次式で示される補助変数群である．

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_0}{dt}\equiv 0\\[2ex] \dfrac{d\psi_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{d\psi_2}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}\end{cases} \tag{12}$$

$t=T$ においては，終期時点の横断面条件より ([4] p. 69), $\psi_0(T)=-1$ (したがって, $\psi_0(t)\equiv-1$) かつ$\psi_1(T)=\psi_2(T)=0$ である。前半の条件より，$\phi_1=1+\psi_1, \phi_2=1+\psi_2$ という新しい補助変数を用いて，(11), (12) は次のように書き変えられる．

$$\begin{aligned}H=[&\{\sigma_1\lambda\phi_1+\sigma_2(1-\lambda)\phi_2\}\\ &+\{(\delta_1-\sigma_1\lambda))\phi_1-\sigma_2(1-\lambda)\phi_2\}\theta_1\\ &+\{-\sigma_1\lambda\phi_1+(\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\phi_2\}\theta_2](S_1x+S_2y).\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\phi_1}{dt}=-S_1[\{\sigma_1\lambda(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_1\theta_1\}\phi_1+\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_2\theta_2\}\phi_2]\\[2ex] \dfrac{d\phi_2}{dt}=-S_2[\{\sigma_1\lambda(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_1\theta_1\}\phi_1+\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_2\theta_2\}\phi_2].\end{cases} \tag{14}$$

ここで，(14) の中の2方程式は互いに従属であり，したがって ϕ_1 と ϕ_2 とは互いに一次従属で

あることがわかる.

(13)(14) の体系に最適過程理論の最大原理 ([4] pp. 17-21, 66-69) を適用する前に，われわれは諸パラメーター相互間の量的関係について次の仮定を置き，問題の具体的な解を求めることとしたい.

(15) $$\delta_1<\delta_2<\sigma_2<\sigma_1.$$

(16) $$S_1\delta_1<S_1\sigma_1<S_2\delta_2<S_2\sigma_2.$$

(17) $$S_1\sigma_1\lambda+S_2\sigma_2(1-\lambda)<S_2\delta_2.$$

もちろん，これらの仮定はかなり恣意的なものであり，また問題の最終解は仮定の変更によって大きな影響を受ける．それにも関わらず，上述の仮定の組合せは，きわめて興味深い結果をもたらすという理由で特に選ばれたのである.

(13) の中の θ_i の乗数を P_i $(i=1,2)$ と示そう．最大原理によれば

(I) $P_i<0$ であれば $\theta_i=0$ $(i=1,2)$

(II) $P_i<0<P_j$ あるいは $0<P_i<P_j$ であれば，$\theta_i=0$ かつ $\theta_j=\theta$ $(i,j=1,2$ かつ $i\neq j)$

が導かれる．ここで,

$$P_1=(\delta_1-\sigma_1\lambda)\phi_1-\sigma_2(1-\lambda)\phi_2$$

$$P_2=-\sigma_1\lambda\phi_1+\{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}\phi_2$$

である.

$t=T$ の時点においては，$\phi_1(T)=\phi_2(T)=1$ より

$$P_1(T)=\delta_1-\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}<0$$

$$P_2(T)=\delta_2-\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}<0$$

であり，したがって (I) により

$$\theta_1(T)=\theta_2(T)=0$$

となる．この事実より，T の左近傍においては,

(18) $$\begin{cases}\dfrac{d\phi_1}{dt}=-S_1\sigma_1\lambda\phi_1-S_1\sigma_2(1-\lambda)\phi_2\\[2ex]\dfrac{d\phi_2}{dt}=-S_2\sigma_1\phi_1-S_2\sigma_2(1-\lambda)\phi_2\end{cases}$$

が成立する．(18) を $\phi_1(t),\phi_2(t)$ について解くことにより，P_1,P_2 について次の表現が得られる.

(19) $$P_1=\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}\left(\frac{S_1\delta_1}{g}-1\right)\{e^{g(T-t)}-1\}+[\delta_1-\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}],\quad (t\leqq T)$$

(20) $$P_2=\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}\left(\frac{S_2\delta_2}{g}-1\right)\{e^{g(T-t)}-1\}+[\delta_2-\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}].\quad (t\leqq T)$$

ここで,

(21) $$g=S_1\sigma_1\lambda+S_2\sigma_2(1-\lambda)\ .$$

(16)(17) の仮定より,

(22) $$t \leqq T \text{ において } \begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt}>0 \\ \dfrac{dP_2}{dt}<0 \end{cases}$$

であることが明らかである．これらの定性は，(18) の体系が続く限り P_1 は T の左側で常に負であるが，P_2 は T が十分に大きければ非負であった可能性のあることを示している．(われわれは時間を逆に辿っていることに注意せよ．図 1，2 を参照.)

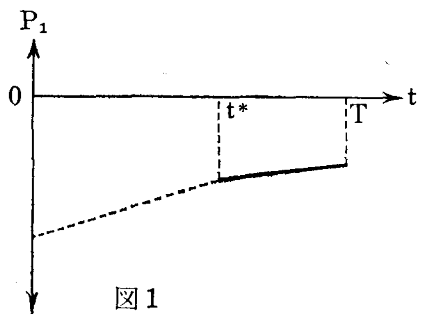


図1

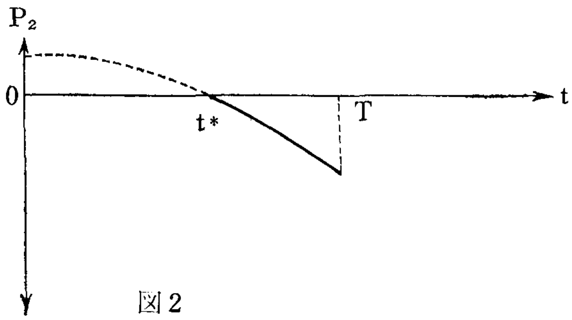


図2

実際，P_2 は $t=t^*>0$ においてゼロとなる．t^* は

(23) $$g(T-t^*)=\log\left[1+\frac{\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}-\delta_2}{\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}\,((S_2\delta_2/g)-1)}\right]$$

の解であって，時間を逆行して考える時，$\theta_2=0$ から $\theta_2>0$ への転換時点となっている．以上より，われわれは $T>t^*>0$ を仮定する時,

(24) $$t^*<t\leqq T \text{ において } \begin{cases} \theta_1(t)=0 \\ \theta_2(t)=0 \end{cases}$$

と結論することができる．

$t=t^*$ において $P_1(t^*)$ は依然負であるから θ_1 はなおゼロであるが，θ_2 の値については明らかでない．しかしながら，われわれは θ_2 の値に関わらず

$$\left(\frac{dP_2}{dt}\right)^-_{t=t^*}<0$$

であることを示すことができる（附録Aを見よ.)．したがって，$P_2(t)$ は t^* の左近傍において明らかに正である．かくてこの局面では，$\theta_1=0, \theta_2=\theta$ が最適解となる．

この局面での微分方程式は,

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt} = -S_1\sigma_1\lambda(1-\theta)\phi_1 - S_1\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}\phi_2 \\ \dfrac{d\phi_2}{dt} = -S_2\sigma_1\lambda(1-\theta)\phi_1 - S_2\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}\phi_2 \qquad t \leqq t^* \end{cases}$$

となり，その解より P_1, P_2 に関し，

$$(26)\qquad P_1 = \frac{1}{S_1}(S_1\delta_1 - g)\left[\phi_1^* - \frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}\right] \cdot \{e^{g'(t^*-t)}-1\} + k_1$$

$$(27)\qquad P_2 = \frac{1}{S_1}(S_2\delta_2 - g)\left[\phi_1^* - \frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}\right] \cdot \{e^{g'(t^*-t)}-1\} + k_2$$

の表現が得られる．ここで，$\phi_1^*=\phi_1(t^*)$, $g'=S_2\delta_2\theta+g(1-\theta)$ であり k_1, k_2 は適当な定数項である．

これに加えて，

$$(28)\qquad \phi_1^* - \frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'} > 0.$$

であることが証明されるから(附録Bを見よ)，明らかに，

$$(29)\qquad 0 \leqq t \leqq t^* \text{ において } \begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} > 0 \\ \dfrac{dP_2}{dt} < 0 \end{cases}$$

であり，したがって

$$(30)\qquad 0 \leqq t \leqq t^* \text{ において } \begin{cases} \theta_1(t) = 0 \\ \theta_2(t) = \theta \end{cases}$$

である．(図 3, 4 および p. 5 の (I)(II) 参照.)

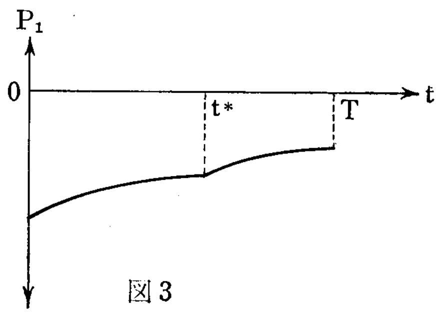


図3

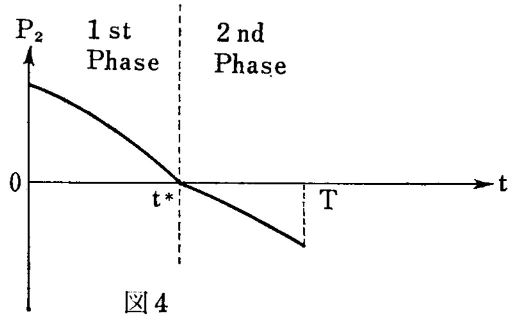


図4

(24) (30) を併せ考えることによって，われわれは始めに樹てた問題への解を以下のようにまとめることができる．ただし，$T>t^*>0$ を仮定してある．

a) t^* を (23) の解とするとき，$0 \leqq t \leqq t^*$ の時間間隔において，両地域に θ の税率を賦課し，

その税収による公共投資を第 2 地域に集中せよ．第 2 地域においてこの公共投資は結合成長率 $g=S_1\sigma_1\lambda+S_2\sigma_2(1-\lambda)$ よりも高い $S_2\delta_2$ という成長率をもたらす．

b)　時間間隔 $t^*<t\leqq T$ においては課税も公共投資も行わない．したがって，民間部門の行動のみが経済成長の経路を定める．

3.　変数 Pi の経済的解釈

t^* と T との間にある特定時点を $\hat{t}$ としよう．$\theta_1=\theta_2=0$ という b)-政策の下では，T 時点での国民所得は，$x_{\hat{t}}=x(\hat{t})$ および $y_{\hat{t}}=y(\hat{t})$ を中間的的初期条件とするとき，

$$Z_T=\frac{\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}(S_1x_{\hat{t}}+S_2y_{\hat{t}})}{g}\{e^{g(T-\hat{t})}-1\}+(x_{\hat{t}}+y_{\hat{t}}) \tag{31}$$

のように示される．((8)(9) の体系で $\theta_1=\theta_2=0$ と置けばよい.）$x_{\hat{t}}$ および $y_{\hat{t}}$ の値の変化が最終目標値に及ぼす影響は，

$$\Delta Z_T=\frac{\{\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda)\}}{g}\{e^{g(T-\hat{t})}-1\}(S_1\Delta x_{\hat{t}}+S_2\Delta y_{\hat{t}})+(\Delta x_{\hat{t}}+\Delta y_{\hat{t}}) \tag{32}$$

のようになる．

ここで，τ をその右端が時点 $\hat{t}$ であるような微小時間区間とし，$\bar{x}=x(\hat{t}-\tau)$ および $\bar{y}=y(\hat{t}-\tau)$ はある固定された値をとるものとしよう．(8)(9) より

$$x_{\hat{t}}-\bar{x}\fallingdotseq\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\bar{x}}\cdot\tau=\{\sigma_1\lambda(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_1\theta_1\}(S_1\bar{x}+S_2\bar{y})\cdot\tau. \tag{33}$$

$$y_{\hat{t}}-\bar{y}\fallingdotseq\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=\bar{y}}\cdot\tau=\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta_1-\theta_2)+\delta_2\theta_2\}(S_1\bar{x}+S_2\bar{y})\cdot\tau \tag{34}$$

であることが示される．したがって τ-期間中の θ_2 の値の変化が，$x_{\hat{t}}$ および $y_{\hat{t}}$ に及ぼす影響は，

$$\Delta x_{\hat{t}}\fallingdotseq\frac{\partial x_{\hat{t}}}{\partial\theta_2}\cdot\Delta\theta_2=-\sigma_1\lambda(S_1\bar{x}+S_2\bar{y})\cdot\tau\cdot\Delta\theta_2 \tag{35}$$

$$\Delta y_{\hat{t}}\fallingdotseq\frac{\partial y_{\hat{t}}}{\partial\theta_2}\cdot\Delta\theta_2=\{-\sigma_2(1-\lambda)+\delta_2\}(S_1\bar{x}+S_2\bar{y})\cdot\tau\cdot\Delta\theta_2 \tag{36}$$

と表わされる．

(35)(36) を (32) に代入すれば，τ-期間中の θ_2 の変化が最終目標値 Z_T に及ぼす影響の近似値が，

$$\Delta Z_T(\Delta\theta_2)\fallingdotseq\Big[(\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda))\left(\frac{S_2\delta_2}{g}-1\right)\{e^{g(T-\hat{t})}-1\}+\{\delta_2-(\sigma_1\lambda+\sigma_2(1-\lambda))\}\Big](S_1\bar{x}+S_2\bar{y})\cdot\tau\cdot\Delta\theta_2 \tag{37}$$

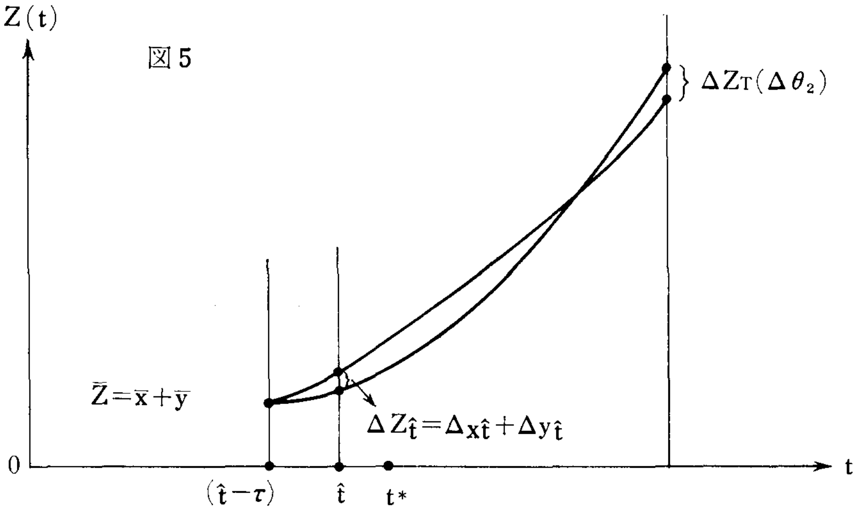
のように求められる．(37) の右辺は正の値をとる被乗数を別とすれば，(20) とまったく同じ形

を持っている．しあがって (20) の P_2 の符号は (37) の $\Delta Z_T(\Delta\theta_2)$ の符号に対応しているわけでいる．

かくてわれわれは，$t^*\leqq\hat{t}\leqq T$ である $\hat{t}$ 時点における P_2 につにて次の解釈を与えることができる．すなわち，$P_2(\hat{t})$ は t に先行する微小な時間区間 τ においての，ひとつの政策変数 θ_2 の微小増加が，$\hat{t}$ から T までの $\theta_1=\theta_2=0$ 政策の採用を所与とし，また $x(\hat{t}-\tau)=\bar{x}, y(\hat{t}-\tau)=\bar{y}$ を所与とした場合，最大化されるべき最終目標値 Z_T にどれだけの限界変化を及ぼすかの程度を示しているのである．

したがって，もし $P_2(\hat{t})$ が正であるならば，θ_2 はゼロ水準からその上限まで（この場合，$P_1(\hat{t})<0$ を前提すれば $\theta_2=\theta$)，少くとも $\hat{t}-\tau\leqq t\leqq\hat{t}$ の微小区間中は増大されるべきである．($P_2(t)$ の値は θ_2 から独立であることに注意）一方もしそれが負であるならば，θ_2 は同じ τ-期間中ゼロに止められるべきである．

(33)—(37) を観察するとき，Z_T の限界変化は２つの成分から成り立つことが知られる．その第１成分は $t=\hat{t}$ から $t=T$ に至る成長勾配の変化であり，第２成分は $t=\hat{t}$ における中間的初期条件 $x_{\hat{t}}, y_{\hat{t}}$ の値の変化である．θ_2 変数について言えば，(37) (15) (17) から知られるように，第１成分は正，第２成分は負である．T から t までの距離が十分大きければ，第１成分は第２成分を凌駕し，$P_2(t)$ は負から正に転ずる．これが政策転換時点 $t=t^*$ である．以上の議論の直観的理解のために，図５を参照して戴きたい．



まったく同様の議論を，(19) の P_1 の解釈に適用することによって，それが $\Delta Z_T(\Delta\theta_1)$ の指標となることが知られる．一方，(26) (27) の P_1 および P_2 も同様に説明しうるが，この場合それらの解釈はきわめて錯雑したものとなるであろう．また以上の議論が，ダイナミック・プログラミングの最適原理と呼ばれるもの，すなわち「ひとつの最適過程の任意の部分は，それ自身

ひとつの最適過程である.」という命題と密接な関連を持っていることが，容易に知られらる([4] p. 16 または [1] p. 83).

4. 結　　論

以上の諸節における議論から，われわれの樹てた地域間資源配分の問題について，次のような興味深い命題が導かれた.

第1に，仮定 (15)(16)(17) と照し合わせるとき，計画期間の初期においては，特定1地域への公共投資の集中が，それが生産力において同じ地域の民間投資に劣るにも関わらず，正当化されるということである。その根拠は，中央政府は公共資金の地域間流動を，市場機構外において直接に制御し，それによる公共投資をより大きな成長潜在力を持つ地域へと集中できるからである.

第2に，(23) から知られらように，第2局面の長さ $(T-t^*)$ は，$T>T-t^*$ (すなわち $t^*>0$) である限り，計画視野の長さ T から独立であるということである。したがって，第2局面の相対的重要度は T が大きくなるにつれて漸減する．これは線形構造を持つダイナミック・プログラミング問題において常に観察されるところである[3]．したがってもし T が非常に大きいのであれば，公共投資はほとんど恒常的に第2地域へ集中されることになる.

第3に，結果される最適解の形は，$S_i, \sigma_i, \delta_i (i=1,2)$ および λ 等のパラメーターの相対的な大きさにきわめて敏感であるということである．したがって，たとえば社会的間接資本の投下等によって，σ_i あるいは δ_i の値に変化がもたらされるならば，われわれはまったく違った形の最適解を持つことになるかも知れないのである.

5. 附　　録

A.　　$\left(\dfrac{dP_2}{dt}\right)^-_{t=t^*}<0$　　の証明.

$\phi_1(t^*)=\phi_1{}^*$ かつ $\phi_2(t^*)=\phi_2{}^*$ とせよ．(18) と $\phi_1(T)=\phi_2(T)=1$ より，また ϕ_1, ϕ_2 の時間的連続性によって，

$$\phi_2{}^* = \frac{1}{S_1}\{S_2\phi_1{}^*+(S_1-S_2)\}$$

を，さらに P_2 の定義より

$$P_2(t^*)=-\sigma_1\lambda\phi_1{}^*+\{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}\phi_2{}^*=0$$

が得られる．これら2方程式を $\phi_1{}^*, \phi_2{}^*$ について解くことから

3) 拙稿 [8] 参照.

(A1) $$\phi_1{}^* = \frac{(S_2-S_1)\{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}}{S_2\delta_2-g}$$

(A2) $$\phi_2{}^* = \frac{(S_2-S_1)\sigma_1\lambda}{S_2\delta_2-g}$$

を得る．

一方 $t=t^*$ において，

(A3) $$\left(\frac{dP_2}{dt}\right)^- = -\sigma_1\lambda\left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)^- + \{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}\left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)^-$$
$$=\left[-\sigma_1\lambda + \frac{S_2}{S_1}\{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}\right]\left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)^-$$
$$=-(S_2\delta_2-g)\cdot[\sigma_1\lambda(1-\theta_2)\phi_1{}^* + \{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta_2)+\delta_2\theta_2\}\phi_2{}^*]$$

と計算される．ここで $\left(\frac{dP_2}{dt}\right)^-$, $\left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)^-$, $\left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)^-$ は P_2, ϕ_1, ϕ_2 の左方時間微係数を示す．

(A1)(A2) を (A3) に代入することによって，

$$\left(\frac{dP_2}{dt}\right)^-_{t=t^*} = -\sigma_1\lambda(S_2-S_1)[(1-\theta_2)\{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)\}+(1-\theta_2)\sigma_2(1-\lambda)+\delta_2\theta_2]$$
$$=-\sigma_1\lambda(S_2-S_1)\delta_2$$

と計算され，仮定 (15)(16) から θ_2 の値に関わりなく $\left(\frac{dP_2}{dt}\right)^-_{t=t^*}<0$ であることが知られる．

B. (25) の解と (28) の証明．

両式と ϕ_1, ϕ_2 の t^* における連続性から，

(B1) $t \leqq t^*$ について $$\phi_2 = \frac{1}{S_1}\{S_2\phi_1+(S_1-S_2)\}$$

が得られる．このとき (25) の第1方程式は，

(B2) $$\frac{d\phi_1}{dt} = -[S_1\sigma_1\lambda(1-\theta)+S_2\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}]\phi_1$$
$$-(S_1-S_2)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}$$

となり，その解は，

(B3) $$\phi_1 = \left[\phi_1{}^* - \frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}\right]\{e^{g'(t^*-t)}-1\}+\phi_1{}^*$$

となる．ここで

$$g' = S_2\delta_2\theta + \{S_1\sigma_1\lambda + S_2\sigma_2(1-\lambda)\}(1-\theta)$$

である．

P_1 は再び

(B4) $$P_1 = \frac{1}{S_1}\{(S_1\delta_1-g)\phi_1-(S_1-S_2)\sigma_2(1-\lambda)\}$$

と表わされ，(B3) を用いることによって，

(B5)
$$P_1=\frac{1}{S_1}\left[(S_1\delta_1-g)\left[\phi_1{}^*-\frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}\right]\cdot\{e^{g'(t^*-t)}-1\}\right.$$
$$\left.+\{(S_1\delta_1-g)\phi_1{}^*-(S_1-S_2)\sigma_2(1-\lambda)\}\right]$$

と計算される.

P_2 についても同様にして,

(B6)
$$P_2=\frac{1}{S_1}\left[(S_2\delta_2-g)\left[\phi_1{}^*-\frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}\right]\{e^{g'(t^*-t)}-1\}\right.$$
$$\left.+\{(S_2\delta_2-g)\phi_1{}^*+(S_1-S_2)(\delta_2-\sigma_2(1-\lambda))\}\right]$$

が求められる. (A1) を想起することによって,

$$\phi_1{}^*-\frac{(S_2-S_1)\{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta\}}{g'}$$
$$=(S_2-S_1)\left\{\frac{\delta_2-\sigma_2(1-\lambda)}{S_2\delta_2-g}-\frac{\sigma_2(1-\lambda)(1-\theta)+\delta_2\theta}{S_2\delta_2\theta+g(1-\theta)}\right\}$$
$$=\frac{(S_2-S_1)\delta_2S_1\sigma_1\lambda}{(S_2\delta_2-g)\{S_2\delta_2\theta+g(1-\theta)\}}>0.$$

引 用 文 献

[1] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

[2] Dorfman, R., "Regional Allocation of Investment: Comment," *Q.J.E.*, Vol. LXXVII, Feb. 1963.

[3] Intriligator, M.D., "Regional Allocation of Investment: Comment," *Q.J.E.*, Vol. LXXVIII, Nov. 1964.

[4] Pontryagin, L.S. et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[5] Rahman, Md. A., "Regional Allocation of Investiment," *Q.J.E.* Vol. LXXVII, Feb. 1963.

[6] Rahman, Md. A., "Regional Allocation of Investment: Continuous Version," *Q.J.E.*, Vol. LXXX, Feb. 1966.

[7] Roxin, E., "The Existence of Optimal Controls," *Michigan Mathematical Journal*, Vol. 9, 1962.

[8] 坂下 昇「地域投資配分と経済成長」『経済研究』(岩波書店) 第16巻第2号, Apr. 1965.

[9] Sakashita, N., "Regional Allocation of Investment with Alternative Target Functions," (mimeographed, Jan. 1966, 今野源八郎教授還暦記念論文集中に和文で採録予定).

[10] Sakashita, N., "Regional Allocation of Public Investment," *Papers of the Regional Science Association*, Vol. 19, 1967.

[11] Takayama, A., "Regional Allocation of Investment: A Further Analysis," *Q.J.E.* Vol. LXXXI, May 1967.

(*Q.J.E.* = *The Quarterly Journal of Economics*)