

## TSS のラウンドロビン方式に対する系内ジョブ数の解析†

塚 本 克 治\*  
中 村 義 作\*

### 1. ま え が き

電子計算機の効率的な使用と、要求にたいするオンライン (on line), リアルタイム (real time) 処理を目的として、多数の利用者が計算機を同時に共同利用するタイムシェアリング方式 (Time Sharing System, 略して TSS) が開発されている<sup>1)</sup>。ここに、オンラインとは計算機と利用者が通信回線で直結されていることを、リアルタイムとは利用者の要求を十分速く処理することを指す。TSS における処理方式の1つの特徴は、処理時間の長い要求は多少待たせても、処理時間の短い要求はなるべく待たせないようにするということである。通常、先着順処理 (First-come First-served) では、処理時間の短い要求も処理時間の長い要求と同じように待たされるから、あまり好ましくない。かといって、処理時間の短い順に処理する方式<sup>2)</sup> (Shortest Job First-served) では、事前に各要求の処理時間を知っておく必要があり、これも現実にはそくさない。このため、TSS では個々の要求を必ずしも1回で処理せず、処理時間の長いものは数回に分けて処理するようにする。以下では、TSS の基本的処理方式の1つであるラウンドロビン (Round Robin) 方式について、処理の仕方を簡単に説明する<sup>3)</sup>。

まず、TSS の用語にしたがって、個々の要求をジョブ (job) と呼ぶ。処理を要求して系に到着したジョブは、主記憶装置内のリスト (List) に登録され、すでに登録されている他のジョブの処理がひとわり済むまで順番を待つ。処理の順番がくると、最高  $q$  時間を限度として処理がなされる。もし、この間に処理が終了すれば、ジョブは系から退去する。しかし、処理が終了しなければ、再びリストに登録され直され、そのときまでに登録されている他のジョブの処理がひとわり済むまで再度順番を待つ。よって、

$$(k-1)q < x \leq kq, \quad k \text{ は正整数}$$

とするとき、 $x$  時間の処理を要求するジョブは  $k$  回に分けて処理される。ここに、1回の処理に割当てられた時間はクワンタム (quantum) と呼ばれる。さて、ジョブの処理を行なうには、各クワンタムごとに若干の準備時間を必要とする。これは、直前のクワンタムで処理されたジョ

† 1968年11月14日秋季研究発表会講演

\* 日本電信電話公社電気通信研究所

ブと今回のクワンタムで処理されるジョブとの入替え (swap) に必要な各種の時間でスワップ時間 (swap time) と呼ばれる。スワップ時間は  $\tau_1$  で表わされ、一般に確率変数となる。もし、クワンタムの終了時に他のジョブが1つもリストに登録されていなければ、同じジョブが引続いて処理されることになる。しかし、この場合にもクワンタムごとに若干の準備時間を必要とし、 $\tau_1$  と区別するため  $\tau_2$  で表わされる。 $\tau_2$  も確率変数で、 $\tau_1$  と同様、スワップ時間と呼ばれる。よって、新しいクワンタムの処理が開始されるときは、つねにスワップ時間を必要とする。

ラウンドロビン方式にたいする従来の解析では、スワップ時間  $\tau_1$  と  $\tau_2$  が同じ確率分布にしたがうとしていたが、この論文では別の確率分布にしたがうとして解析する。 $\tau_1, \tau_2$  の平均をそれぞれ  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$  とするとき、現実のラウンドロビン方式では

$$0 < \bar{\tau}_2 < \bar{\tau}_1$$

がほとんど確実に成立する。よって、この論文のモデルは現実により近づいたといえる。

## 2. 待ち行列モデルと記号の説明

ラウンドロビン方式におけるジョブの処理の様相は、つぎの待ち行列モデルで記述される (図1参照)。

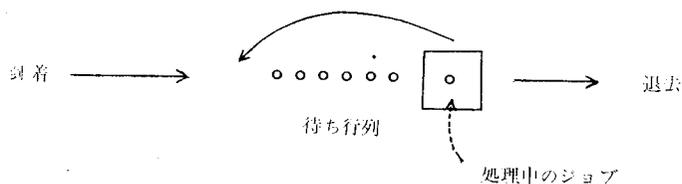


図1 ラウンドロビン方式の待ち行列モデル

- [1] ジョブの系への到着は、平均  $\lambda$  のポアソン到着である。
- [2] ジョブの要求する処理時間は、平均  $\mu^{-1}$  の指数分布に従う。
- [3] 到着したジョブは、系に他のジョブが存在しなければ、スワップ時間  $\tau_1$  を経たのち直ちに処理が開始される。系に他のジョブが存在すれば、待ち行列の最後尾について処理の順番を待つ。
- [4] 待ち行列にならんでいるジョブは、それぞれスワップ時間  $\tau_1$  を経たのち、先頭から順次に処理される。ただし、各ジョブの1回の処理に割当てられる時間は  $q$  で、その時間内に処理が終了した場合だけ、ジョブは系から退去する。
- [5]  $q$  時間以内に処理が終了しなければ、待ち行列の最後尾について再び処理の順番を待つ。そして、(4)と(5)の操作はジョブの処理が終了するまで繰返される。ただし、クワンタムの終了時に他にジョブが存在しなければ、スワップ時間  $\tau_2$  を経たのち同じジョブが引続いて処理される。この場合も、1回の処理は  $q$  時間を限度とする。

[6] ジョブの処理の再開は、前回の処理の中断時点から始められる (resume rule).

[7] クワントム時間  $q$  は一定であるが、スワップ時間  $\tau_1, \tau_2$  はそれぞれ任意分布

$$(1) \quad T_i(x) = \eta_i(x) \exp\left\{-\int_0^x \eta_i(y) dy\right\}, \quad i=1, 2$$

に従う。また、これらの平均は存在すると仮定する。

$$(2) \quad \bar{\tau}_i = \int_0^{\infty} x T_i(x) dx < \infty, \quad i=1, 2$$

[8] ジョブが存在するかぎり、系は処理中かスワップ中かのいずれかである。

うえの記述から明らかなように、

$$T_1(x) = \delta(x), \quad q \rightarrow \infty$$

とすると、この待ち行列モデルは通常の  $M/M/1$  系に帰着される。ただし、 $\delta(x)$  は Dirac のデルタ関数を表わす。いま、対象とする系において、任意時点における系の状態を  $S(t)$  で表わす。 $S(t)$  がとりうる状態はつぎのいずれかである。

$E$ : 系内にジョブが存在しない。

$S_1^i(n, x)$ : 系内のジョブ数は  $n (> 0)$ , 先頭のジョブはスワップ中で、スワップが開始されてから  $x (0 \leq x \leq \tau_i)$  時間を経過。ただし、 $i$  は 1 または 2 で、それぞれスワップ時間が  $\tau_1$  または  $\tau_2$  であることを示す。

$S_2(n, x)$ : 系内のジョブ数は  $n (> 0)$ , 先頭のジョブは処理中で、クワントムが開始されてから  $x (0 \leq x \leq q)$  時間を経過。

簡単な考察から明らかなように、これらの状態間の推移は図 2 のように表わされる。事象  $A$  が生起する確率を  $P_r\{A\}$  で表わし、つぎの各確率を定義する。

$$(3) \quad p(0, t) = P_r\{S(t) \in E\}$$

$$(4) \quad p_1^i(n, x, t) dx = P_r\{S(t) \in S_1^i(n, y) | y \in (x, x+dx)\}, \quad i=1, 2$$

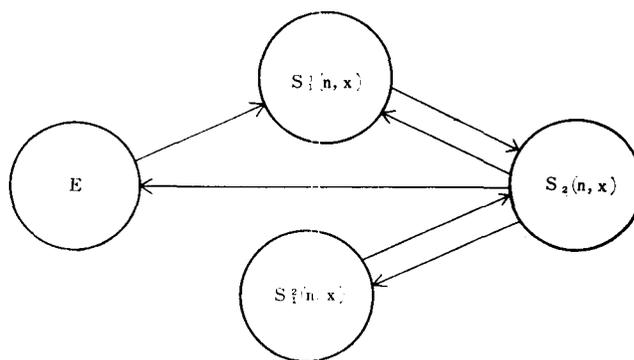


図 2 状態の推移

$$(5) \quad p_2(n, x, t) dx = P_r \{S(t) \in S_2(n, y) | y \in (x, x+dx)\}$$

### 3. 状態方程式

時刻  $t$  の状態  $S(t)$  から、微小時間  $\Delta t$  後の状態  $S(t+\Delta t)$  への推移を考えれば、

$$(6) \quad p(0, t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)p(0, t) + \mu\Delta t \int_0^{q-0} p_2(1, x, t) dx + 0(\Delta t)$$

$$(7) \quad p_1^i(n, x+\Delta t, t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t) \{1-\eta_i(x)\Delta t\} p_1^i(n, x, t) \\ + (1-\delta_{1n}) \lambda\Delta t \{1-\eta_i(x)\Delta t\} p_1^i(n-1, x, t) \\ + 0(\Delta t), \quad i=1, 2$$

$$(8) \quad p_2(n, x+\Delta t, t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t) (1-\mu\Delta t) p_2(n, x, t) \\ + (1-\delta_{1n}) \lambda\Delta t (1-\mu\Delta t) p_2(n-1, x, t) + 0(\Delta t)$$

をうる。ここに、 $\delta_{1n}$  は Kronecker のデルタで、

$$\delta_{1n} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

である。式(6)~(8)で  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとれば、

$$(9) \quad \frac{d}{dt} p(0, t) = -\lambda p(0, t) + \mu \int_0^{q-0} p_2(1, x, t) dx$$

$$(10) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) p_1^i(n, x, t) = -\{\lambda + \eta_i(x)\} p_1^i(n, x, t) \\ + (1-\delta_{1n}) \lambda p_1^i(n-1, x, t), \quad i=1, 2$$

$$(11) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) p_2(n, x, t) = -(\lambda + \mu) p_2(n, x, t) \\ + (1-\delta_{1n}) \lambda p_2(n-1, x, t)$$

をうる。境界条件は、図2の推移を考えれば明らかのように、

$$(12) \quad p_1^1(n, 0, t) = (1-\delta_{1n}) p_2(n, q, t) \\ + \mu \int_0^{q-0} p_2(n+1, x, t) dx + \delta_{1n} \lambda p(0, t)$$

$$(13) \quad p_1^2(n, 0, t) = \delta_{1n} p_2(1, q, t)$$

$$(14) \quad p_2(n, 0, t) = \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^2 \eta_i(x) p_1^i(n, x, t) \right] dx$$

となる。

いま、統計的平衡状態の存在を仮定し、

$$(15) \quad p(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t)$$

$$(16) \quad p_1^i(n, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1^i(n, x, t), \quad i=1, 2$$

$$(17) \quad p_2(n, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(n, x, t)$$

とおく. すると, 式(10), (11)はそれぞれ

$$(18) \quad dp_1^i(n, x)/dx = -\{\lambda + \eta_i(x)\} p_1^i(n, x) \\ + (1 - \delta_{1n}) \lambda p_1^i(n-1, x), \quad i=1, 2$$

$$(19) \quad dp_2(n, x)/dx = -(\lambda + \mu) p_2(n, x) + (1 - \delta_{1n}) \lambda p_2(n-1, x)$$

となり, また式(12)~(14), (9)はそれぞれ

$$(20) \quad p_1^1(n, 0) = (1 - \delta_{1n}) p_2(n, q) + \mu \int_0^{q-0} p_2(n+1, x) dx + \delta_{1n} \lambda p(0)$$

$$(21) \quad p_1^2(n, 0) = \delta_{1n} p_2(1, q)$$

$$(22) \quad p_2(n, 0) = \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^2 \gamma_i(x) p_1^i(n, x) \right] dx$$

$$(23) \quad \lambda p(0) = \mu \int_0^{q-0} p_2(1, x) dx$$

となる. よって,  $p_1^i(n, x)$  および  $p_2(n, x)$  にたいする母関数をそれぞれ

$$(24) \quad P_1^i(z, x) = \sum_{n=1}^\infty p_1^i(n, x) z^{n-1}$$

$$(25) \quad P_2(z, x) = \sum_{n=1}^\infty p_2(n, x) z^{n-1}$$

で定義すれば, 式(18)~(23)から

$$(26) \quad \partial P_1^i(z, x)/\partial x = -\{\lambda(1-z) + \eta_i(x)\} P_1^i(z, x), \quad i=1, 2$$

$$(27) \quad \partial P_2(z, x)/\partial x = -\{\lambda(1-z) + \mu\} P_2(z, x)$$

$$(28) \quad P_1^1(z, 0) = P_2(z, q) - P_2(0, q) \\ + \left(\frac{\mu}{z}\right) \int_0^{q-0} \{P_2(z, x) - P_2(0, x)\} dx + \lambda p(0)$$

$$(29) \quad P_1^2(z, 0) = P_1^2(0, 0) = P_2(0, q)$$

$$(30) \quad P_2(z, 0) = \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^2 \gamma_i(x) P_1^i(z, x) \right] dx$$

$$(31) \quad \lambda p(0) = \mu \int_0^{q-0} P_2(0, x) dx$$

をうる. 式(28)~(31)は式(26), (27)の連立微分方程式にたいする境界条件を与える.

## 4. 平衡状態における解

式(26), (27)の一般解は直ちに求められて

$$(32) \quad P_1^i(z, x) = K_1^i(z) \exp\left[-\lambda(1-z)x - \int_0^x \eta_i(y) dy\right], \quad i=1, 2$$

$$(33) \quad P_2(z, x) = K_2(z) \exp[-\{\lambda(1-z) + \mu\}x]$$

となる。よって、境界条件から  $K_1^i(z)$ ,  $K_2(z)$  を求めれば、解はえられる。式(32), (33)を式(28)~(31)に代入して整理すれば、

$$(34) \quad K_1^1(z) = K_2(z) \exp[-\{\lambda(1-z) + \mu\}q] - K_2(0) \exp[-(\lambda + \mu)q] \\ + \frac{\mu K_2(z) [1 - \exp(-\{\lambda(1-z) + \mu\}q)]}{z\{\lambda(1-z) + \mu\}} \\ - \frac{\mu K_2(0) [1 - \exp\{-(\lambda + \mu)q\}]}{z(\lambda + \mu)} + \lambda p(0)$$

$$(35) \quad K_1^2(z) = K_1^2(0) = K_2(0) \exp[-(\lambda + \mu)q]$$

$$(36) \quad K_2(z) = \sum_{i=1}^2 K_1^i(z) T_i^*\{\lambda(1-z)\}$$

$$(37) \quad \lambda p(0) = \mu K_2(0) [1 - \exp\{-(\lambda + \mu)q\}] / (\lambda + \mu)$$

をうる。ただし、 $T_i^*(s)$  は  $T_i(x)$  のラプラス変換で、

$$T_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_i(x) dx$$

とした。

式(35)を式(37)に代入したのち

$$(38) \quad \alpha = \frac{\lambda(\lambda + \mu) \exp\{-(\lambda + \mu)q\}}{\mu[1 - \exp\{-(\lambda + \mu)q\}]}$$

とおけば、

$$(39) \quad K_1^2(z) = K_1^2(0) = \alpha p(0)$$

をうる。つぎに、記述を簡単にするため、

$$(40) \quad k(z) = \lambda(1-z) + \mu$$

$$(41) \quad k_1^i(z) = 1 - T_i^*\{\lambda(1-z)\} \exp\{-k(z)q\}, \quad i=1, 2$$

$$(42) \quad k_2^i(z) = -\mu T_i^*\{\lambda(1-z)\} [1 - \exp\{-k(z)q\}], \quad i=1, 2$$

とおく. 式(34)に式(36)を代入したのち, 式(35), (37), (39)を用いれば

$$(43) \quad K_1^1(z) = \frac{-\alpha\{zk(z)k_1^2(z) + k_2^2(z)\} + \lambda(z-1)k(z)}{zk(z)k_1^1(z) + k_2^1(z)} p(0)$$

をうる. 式(43), (39), (36)から明らかなように,  $p(0)$  が求められれば  $K_1^1(z)$ ,  $K_1^2(z)$ ,  $K_2(z)$  は完全に決定される.

$p(0)$  を求めるため, まず  $K_1^1(1)$  を計算する. 式(40)~(42)よりえられる関係

$$k(1) = \mu$$

$$k_1^i(1) = 1 - \exp(-\mu q), \quad i=1, 2$$

$$k_2^i(1) = -\mu\{1 - \exp(-\mu q)\}, \quad i=1, 2$$

に注意すれば, 式(43)の右辺の分母, 分子はともに  $z=1$  を零点にもつ. よって, L'Hospital の定理を援用し,

$$(44) \quad \lim_{z \rightarrow 1} dT_i^* \{\lambda(1-z)\} / dz = \lambda \tau_i, \quad i=1, 2$$

に注意しながら若干の計算をすれば

$$(45) \quad K_1^1(1) = \lim_{z \rightarrow 1} K_1^1(z) = \frac{-\alpha\{(\mu-\lambda)\{1 - \exp(-\mu q)\} - \mu\lambda\tau_2\} + \mu\lambda}{(\mu-\lambda)\{1 - \exp(-\mu q)\} - \mu\lambda\tau_1} p(0)$$

をうる. いま,

$$(46) \quad P_1^i(z) = \int_0^\infty P_1^i(z, x) dx, \quad i=1, 2$$

$$(47) \quad P_2(z) = \int_0^q P_2(z, x) dx$$

とおけば, 確率の条件より

$$(48) \quad p(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{i=1}^2 P_1^i(z) + P_2(z) \right] = 1$$

である. 式(48)の左辺を計算するため, 式(32), (33)から  $P_1^i(z)$ ,  $P_2(z)$  を求めれば

$$(49) \quad P_1^i(z) = K_1^i(z) [1 - T_i^* \{\lambda(1-z)\}] / \lambda(1-z), \quad i=1, 2$$

$$(50) \quad P_2(z) = K_2(z) [1 - \exp\{-k(z)q\}] / k(z)$$

をうる. ここで,

$$\lim_{z \rightarrow 1} [1 - T_i^* \{\lambda(1-z)\}] / \lambda(1-z) = \tau_i, \quad i=1, 2$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} [1 - \exp\{-k(z)q\}]/k(z) = \{1 - \exp(-\mu q)\}/\mu$$

に注意すれば,

$$(51) \quad \lim_{z \rightarrow 1} P_1^i(z) = \tau_i \{\lim_{z \rightarrow 1} K_1^i(z)\}, \quad i=1, 2$$

$$(52) \quad \lim_{z \rightarrow 1} P_2(z) = \{1 - \exp(-\mu q)\} \{\lim_{z \rightarrow 1} K_2(z)\}/\mu$$

をうる。また, 式(36), (39)から

$$(53) \quad \lim_{z \rightarrow 1} K_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K_1^1(z) + \alpha p(0)$$

となるので, 式(51)~(53)を式(48)に代入したのち式(39), (45)に注意すれば,  $p(0)$  にたいする所要の結果として

$$(54) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p(0)} = 1 - \frac{\alpha[(\mu - \lambda)\{1 - \exp(-\mu q)\} - \mu\lambda\tau_2] - \mu\lambda}{(\mu - \lambda)\{1 - \exp(-\mu q)\} - \mu\lambda\tau_1} \\ \cdot [\tau_1 + \{1 - \exp(-\mu q)\}/\mu] \\ + \alpha[\tau_2 + \{1 - \exp(-\mu q)\}/\mu] \end{aligned}$$

をうる。

$p(0)$  が求められると, 式(43)から  $K_1^1(z)$ , 式(39)から  $K_1^2(z)$  がえられ, これらをさらに式(36)に代入して  $K_2(z)$  がえられる。よって, 式(32), (33)で与えられる  $P_1^i(z, x)$ ,  $P_2(z, x)$  は完全に決定される。ただし, これらを具体的に表示すると複雑になる。なお, 任意時点の系内ジョブ数にたいする確率母関数  $P(z)$  は

$$(55) \quad P(z) = p(0) + \sum_{i=1}^2 z P_1^i(z) + z P_2(z)$$

で与えられる。

また, スワップ時間の平均  $\tau_1, \tau_2$  が等しい場合, すなわち

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

のときは,  $p(0)$  は

$$(56) \quad p(0) = 1 - (\lambda/\mu) - \lambda\tau/\{1 - \exp(-\mu q)\}$$

ときわめて簡単になる。とくに,  $\tau=0$  ならば,

$$(57) \quad P(z) = \frac{1 - (\lambda/\mu)}{1 - (\lambda/\mu)z}$$

となり, 通常の  $M/M/1$  系に一致する。

## 5. 系内ジョブ数の平均

任意時点における系内ジョブ数の平均  $\bar{L}$  は, 式(55)から

$$(58) \quad \bar{L} = \lim_{z \rightarrow 1} dP(z)/dz$$

と表わされる。以下では、この計算を進める。まず、式(55)を用いると、

$$(59) \quad \begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^2 P_1^i(1) + P_2(1) + \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^2 dP_1^i(z)/dz + dP_2(z)/dz \right\} \\ &= 1 - p(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^2 dP_1^i(z)/dz + dP_2(z)/dz \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、 $dP_1^i(z)/dz$ ,  $dP_2(z)/dz$  の  $z=1$  における値を求めればよい。簡単のため、

$$E[\tau_i^2] = \int_0^x x^2 T_i(x) dx = \lim_{s \rightarrow 0} d^2 T_i^*(s)/ds^2, \quad i=1, 2$$

とおく。すると、式(49), (50), (39)から

$$(60) \quad \lim_{z \rightarrow 1} dP_1^1(z)/dz = \tau_1 \{ \lim_{z \rightarrow 1} dK_1^1(z)/dz \} + (\lambda/2) E[\tau_1^2] K_1^1(1)$$

$$(61) \quad \lim_{z \rightarrow 1} dP_1^2(z)/dz = (\lambda/2) E[\tau_2^2] \alpha p(0)$$

$$(62) \quad \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} dP_2(z)/dz &= \{ [1 - \exp(-\mu q)] / \mu \} [ \lim_{z \rightarrow 1} dK_2(z)/dz ] \\ &\quad + \lambda \{ [1 - \exp(-\mu q) - \mu q \exp(-\mu q)] / \mu^2 \} K_2(1) \end{aligned}$$

をうる。

式(60)~(62)において、 $K_1^1(1)$  は式(45)で与えられ、また  $K_2(1)$  は式(36), (39)から

$$(63) \quad K_2(1) = K_1^1(1) + \alpha p(0)$$

となる。さらに、式(36)から

$$(64) \quad \lim_{z \rightarrow 1} dK_2(z)/dz = \{ \lim_{z \rightarrow 1} dK_1^1(z)/dz \} + \lambda \tau_1 K_1^1(1) + \lambda \tau_2 \alpha p(0)$$

となるので、

$$\lim_{z \rightarrow 1} dK_1^1(z)/dz$$

を求めれば、式(60)~(62)はすべて定まる。いま、

$$(65) \quad G_i(z) = zk(z)k_1^i(z) + k_2^i(z), \quad i=1, 2$$

とおく。式(43)を  $z$  について微分すれば、

$$(66) \quad \begin{aligned} \frac{dK_1^1(z)}{dz} &= \frac{p(0)}{\{G_1(z)\}^2} \left[ -\frac{d}{dz} \{ -\alpha G_2(z) + \lambda(z-1)k(z) \} G_1(z) \right. \\ &\quad \left. - \{ -\alpha G_2(z) + \lambda(z-1)k(z) \} \frac{dG_1(z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

となるが、 $G_i(1)=0$  のため L'Hospital の定理を援用する。若干の計算を行なえば、

$$(67) \quad \lim_{z \rightarrow 1} dK_1^1(z)/dz = p(0) [ \{ -\alpha G_2''(1) - 2\lambda^2 \} G_1'(1) ]$$

$$-G''_1(1) \{-\alpha G'_2(1) + \mu\lambda\} / 2\{G'_1(1)\}^2$$

となる。一方,

$$G'_i(1) = (\mu - \lambda) \{1 - \exp(-\mu q)\} - \mu\lambda\tau_i, \quad i=1, 2$$

$$G''_i(1) = -\mu\lambda^2 E[\tau_i^2] - 2\lambda\{1 - \exp(-\mu q)\} + (\mu - \lambda)(\tau_i + q)\exp(-\mu q), \quad i=1, 2$$

と計算されるので、式(60)~(62)は完全に求まり、これから  $\bar{L}$  も与えられる。しかし、 $\bar{L}$  を具体的に表示すると複雑な形となるので、以下にその数値例を示す。

表 1, 2 はスワップ時間をそれぞれ一定分布, 指数分布に従うと仮定した場合の計算結果で、 $p(0)$  と  $\bar{L}$  の値が種々のパラメータにたいして与えられている。パラメータには、平均スワップ時間  $\tau_1$  と  $\tau_2$  の比  $\tau_1/\tau_2$ , 平均スワップ時間  $\tau_1$  と平均処理時間  $1/\mu$  との比  $\tau_1\mu$ , 平均到着率  $\lambda$  の 3 つをとり,

$$\begin{cases} \tau_1/\tau_2 = 0, 1/100, 1/10, 1/5, 1 \\ \tau_1\mu = 1/100, 1/10, 1/5 \\ \lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 \end{cases}$$

の各組合せを計算した。これらの表から明らかなように  $\tau_1\mu$  と  $\lambda$  の小さいところでは、 $p(0)$  と  $\bar{L}$  はスワップ時間の分布形と  $\tau_2/\tau_1$  の値にそれほど影響されない。また、 $\lambda$  が大きくなっても、固定の  $\tau_1\mu$  にたいしてはほぼ同じ値がえられている。そして、同じ値のパラメータにたいしては、スワップ時間が一定分布に従う場合より指数分布に従う場合の方が  $\bar{L}$  は大きくになっている。

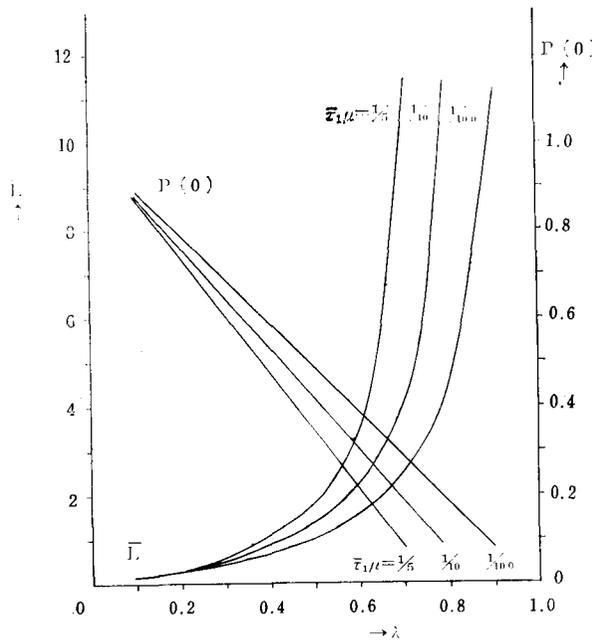


図3  $p(0)$  と  $\bar{L}$  (スワップ時間が一定分布に従う場合) :  $\tau_2/\tau_1 = 1/5$

表 1 系内ジョブ数の平均 (一定分布の場合)

$\bar{r}_2/\bar{r}_1$	$\bar{r}_1\mu$		$\lambda$								
			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.798	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.59
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.662	0.547	0.430	0.313	0.194	0.076	—
		$\bar{L}$	0.12	0.29	0.51	0.82	1.31	2.17	4.07	11.93	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.878	0.752	0.623	0.491	0.357	0.221	0.083	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.02	1.76	3.43	10.66	—	—
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.793	0.696	1.595	1.493	3.391	10.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.59
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.662	0.547	0.430	0.313	0.194	0.076	—
		$\bar{L}$	0.12	0.29	0.51	0.82	1.31	2.17	4.07	11.94	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.878	0.752	0.623	0.491	0.357	0.221	0.083	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.02	1.76	3.43	10.66	—	—
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.798	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.59
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.661	0.546	0.429	0.312	0.194	0.075	—
		$\bar{L}$	0.13	0.29	0.51	0.82	1.31	2.17	4.07	11.95	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.877	0.751	0.621	0.490	0.356	0.220	0.032	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.02	1.77	3.43	10.67	—	—
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.797	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.888	0.775	0.660	0.545	0.428	0.311	0.193	0.075	—
		$\bar{L}$	0.13	0.29	0.51	0.83	1.31	2.17	4.07	11.95	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.876	0.749	0.620	0.488	0.354	0.219	0.082	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.03	1.77	3.44	10.67	—	—
1	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.898	0.780	0.695	0.594	0.492	0.391	0.289	0.187	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.884	0.768	0.653	0.537	0.421	0.305	0.189	0.734	—
		$\bar{L}$	0.13	0.30	0.52	0.84	1.33	2.19	4.09	11.97	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.868	0.737	0.605	0.473	0.342	0.210	0.079	—	—
		$\bar{L}$	0.15	0.35	0.63	1.06	1.81	3.48	10.71	—	—

表 2 系内ジョブ数の平均 (指数分布の場合)

$\bar{\tau}_2/\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_1\mu$		$\lambda$								
			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.798	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.662	0.547	0.430	0.313	0.194	0.076	—
		$\bar{L}$	0.12	0.29	0.51	0.82	1.31	2.17	4.08	12.01	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.878	0.752	0.623	0.491	0.357	0.221	0.083	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.03	1.78	3.48	10.85	—	—
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.798	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.662	0.547	0.430	0.313	0.194	0.076	—
		$\bar{L}$	0.12	0.29	0.51	0.82	1.31	2.18	4.09	12.01	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.878	0.752	0.623	0.491	0.357	0.221	0.083	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.60	1.03	1.78	3.48	10.85	—	—
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.798	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.889	0.776	0.661	0.546	0.429	0.312	0.194	0.075	—
		$\bar{L}$	0.13	0.29	0.51	0.83	1.32	2.18	4.09	12.01	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.877	0.751	0.621	0.490	0.356	0.220	0.082	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.61	1.03	1.79	3.49	10.86	—	—
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.899	0.797	0.696	0.595	0.493	0.391	0.290	0.188	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.31	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.883	0.775	0.660	0.545	0.428	0.311	0.193	0.075	—
		$\bar{L}$	0.13	0.29	0.51	0.83	1.32	2.18	4.09	12.02	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.876	0.749	0.620	0.488	0.354	0.219	0.082	—	—
		$\bar{L}$	0.14	0.33	0.61	1.04	1.79	3.49	10.86	—	—
1	$\frac{1}{100}$	$P(0)$	0.898	0.780	0.695	0.594	0.492	0.391	0.289	0.187	0.086
		$\bar{L}$	0.11	0.25	0.44	0.68	1.03	1.55	2.45	4.32	10.60
	$\frac{1}{10}$	$P(0)$	0.884	0.768	0.653	0.537	0.421	0.305	0.189	0.734	—
		$\bar{L}$	0.13	0.30	0.52	0.84	1.34	2.20	4.11	12.04	—
	$\frac{1}{5}$	$P(0)$	0.868	0.737	0.605	0.473	0.342	0.210	0.079	—	—
		$\bar{L}$	0.15	0.35	0.63	1.07	1.83	3.53	10.91	—	—

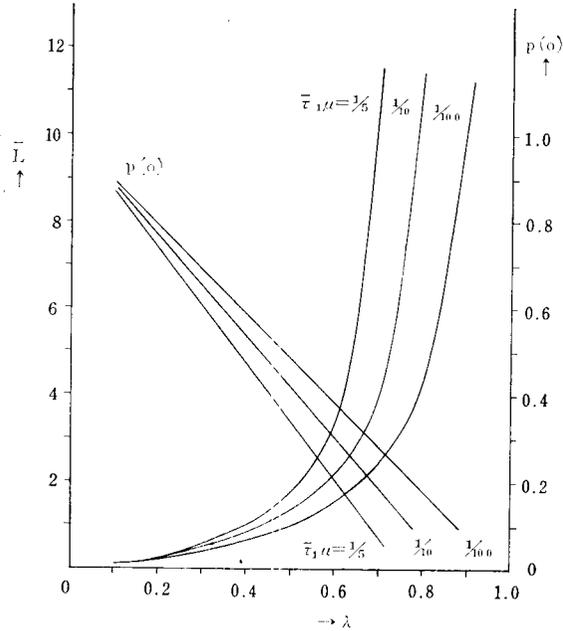


図4  $p(0)$  と  $\bar{L}$  (スワップ時間が指数分布に従う場合 :  $\bar{\tau}_2/\bar{\tau}_1 = 1/10$ )

参考までに、 $\bar{\tau}_1/\bar{\tau}_2 = 1/10$  の場合を図示すると、図 3, 4 のようになる。

## 6. む す び

いくつかのクワンタムにわたって同一のジョブを引続いて処理する場合とその他の場合でスワップ時間の確率分布が異なるラウンドロビン方式を取上げ、任意時点の系内ジョブ数にたいする種々の解析を行なった。ラウンドロビン方式にたいする従来の解析では、スワップ時間はすべて同一の確率分布に従うとしているものが多いから、より現実的なモデルの解析がなされたものと思われる。ラウンドロビン方式の解析としては、さらに待ち時分布にたいする考察が要求されるが、これは機会を改めてご報告したい。

この研究を進めるに当っては、広島大学福田教授の論文<sup>4)</sup>をいろいろ参照した。紙上、厚く感謝します。

## 参 考 文 献

1. Martin, J., Programming Real-time Computer Systems, Prentice-Hall, Englewood, 1965.
2. Phipps, T.E., Jr., "Machine Repair as a Waiting Line Problem," J. Oper. Res. Soc. Amer., 4 (1956, 76-86).
3. 中村, 村尾, 塚本, "ラウンドロビン方式の待ち時間分析に対する解析" 電子通信学会雑誌, 52-C (1969, 48-55).
4. 福田治郎, "TSS に関する待ち行列について" 日本 OR 学会春季研究発表会 (1968).