文献抄録

Thomopoulos, Nick T., "Line Balancing-Sequencing for Mixed-Model Assembly," *Management Science*, **14,** 2 (1967), B-59-75.

〔応用的／生産／順序づけ問題〕

自動車工業等においては，一本のラインで数種の製品を連続的に生産する混合ライン（mixed-model assembly line）が用いられているが，本論文はそのようなラインの設計の基本的な問題であるライン・バランシングと順序づけの2つの問題を取り扱っている．

まず，ラインバランシングについては，1シフト中の各品目の生産量を考慮して，各要素作業についての1シフト中の総作業時間を算出し，それを1品目ラインにおける要素作業時間のように考えて各作業者に配分することによって，混合ラインの良好なバランスが効率良く求められることを示している．本論文では，作業の配分に Kilbridge と Wester の発見的方法が用いられている．

本論文の主題である品目の順序づけについては，まず，ステーションを作業者の移動の可能性により4種，すなわち，Closed Station, Open Station, Closed-to-the Right and Open-to-the Left Station, Closed-to-the Left and Open-to-the Right Station に分離している．ここで，Open は作業者の移動範囲について制約のないこと，Closed は移動範囲について制約があって範囲外で作業の遂行の不可能なことを意味している．

つぎに，移動範囲の制約のために生じる4種の損失である Idleness, Work Deficiency, Utility Work, Work Congestion をあげている，Idleness は品物の到着待ちの損失，Work Deficiency は所定のステーションからラインの前方に出て作業を行なうことによる損失，Utility Work は所定のステーション内で作業ができないため補助作業員を用いることによる損失，Work Congestion は所定のステーションの後方で作業を行なうことによる損失である．

著者はそれぞれの損失に応じて種々の費用を定め，1シフト中における全ラインの総損失費用を最小にする計算手順を提出している．それは，まず，すべての品目を1個流した場合の損失費用をそれぞれ算出し，それを最小にする品目を sequence の最初の品目として選ぶことから始まる．つぎに，同様の手順で sequence の2番目の品目を選出し，以下同様にその手順を1シフト中の全生産量の順序づけが終了するまで繰返して用いる．

著者は，実際の自動車工業で見られる要素作業206，品目数6，1シフト中の生産量100台の問題を上述の方法を用いて解き，バランシング及び順序づけの結果を示している．上述の順序づけ法は最適解を保証するものではないため，モンテカルロ法によって，500種の sequence を作成し，統計的推定法を用いて，上述の方法で求めた解が最適解に極めて近いことを明らかにしている．

また，1シフト中の生産量をより小さなグループに等分して，各グループ毎に順序づけを行なうことによって総損失費用を削減することができ，この例題では10台～20台の場合，それが最小になることも示している．

本論文は事例が中心になっているが，詳細な分析と計算手順に興味のある読者は，本論文の原著である「A Sequencing Procedure for Multi-Model Assembly Lines, Doctoral Thesis, Industrial Engineering Department, Illinois Institute of Technology, January 1966.」を読むことをするめる．

（黒田充）

Farbey, B. A., A. H. Landk, and J. D. Murchland, "The Cascade Algorithm for Finding all Shortest Distances in a Directed Graph," *Management Science*, **14,** 1 (1967), 19-28.

〔グラフ理論／最短距離問題／理論的〕

n個の点を持つ方向付線グラフで，枝 $i \to j$ の距離 dij が与えられたとき，(k, l) のすべての組合せについて，k から l 迄の最短距離を求める問題を考える．

この問題は，特別な演算規則による行列算を用いると，簡単に解けて，

$$S=D+D^2+\cdots\cdots+D^n$$

で定義されるSの要素 s_{kl} が，$k \to l$ の最短距離を与える．ここで，Dは d_{ij} を要素とする行列で，行列要素の演算は，a＋bの代りに min(a, b)，a×bの代りにa＋b，を用いる．この方法によれ

ば，行列積を n−1 回計算する必要がある．Cascade algorithm は，行列積２回分の計算量で，Ｓを与える計算法である．

Cascade algorithm を Algol 風に書くと，

forward process：

for i := 1 step 1 until n do
for j := 1 step 1 until n do
for k := 1 step 1 until n do
  if $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$ then
    $d_{ij} := d_{ik} + d_{kj}$;

backward process：

for i := n step −1 until 1 do
for j := n step −1 until 1 do
for k := 1 step 1 until n do
  if $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$ then
    $d_{ij} := d_{ik} + d_{kj}$;

となる．ｋのループは，距離行列（d_{ij}）のグラフで，ｉからｊへの最短距離が２ステップであるとき，d_{ij} の値を最短距離に書替えるためのもので，この操作を，forward process では i, j の小さい方らか，backward procoss では i, j の大きい方から，順に行なうわけである．

Cascade algorithm の証明のために，２つの Lemma を用いる．ここで，forward process の終った時点での d_{ij} の値を d^1_{ij}, backward process の終った時点での d_{ij} の値を d^2_{ij}, $i \to j$ の最短距離を s_{ij} と書くことにする．

Lemma 1.

ｉからｊへの最短経路の上で，ｊ以外の任意の点ｕに対して，最短経路のｕからｊ迄の部分に，$d^1_{uv} = s_{uv}$ である点 v, が存在する．そしてｖは，ｕより大きな番号か，ｕに続く点のうちで最大の番号か，である．

Lemma 2.

ｉからｊへの最短経路の上で，最大の番号を持つ点をｕとすると，$d^2_{uj} = s_{uj}$.

上の２つの Lemma から $d^2_{ij} = s_{ij}$ が証明される．

しかし，この問題については，行列積１回分の計算量でＳを与える方法［１］が考えられていて，考え方もその方が簡明である．

［１］ Floyd, R. W., “Algorithm 97 : Shortest Path,” CACM, 5, 1962, P. 345. （前田英次郎）

Farbey, B. A., A. H. Landk, and J. D. Murchland, “The Extension of the Cascade Algorithm to Large Graphs, *Management Science*, **14**, 1 (1967), 29-33.

〔グラフ理論／最短距離問題／理論的〕

距離行列Ｄが大きすぎて，一度に全部を扱えない場合に，Cascade algorithm を拡張したものである．

先ずＤを

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 11 & 12 & \cdots & 1K & \cdots & 1L & 1B \\ \hline 21 & 22 & & 2K & & 2L & 2B \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \hline K1 & K2 & & KK & & KL & KB \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \hline L1 & L2 & & LK & & LL & LB \\ \hline B1 & B2 & & BK & & BL & BB \\ \hline \end{array}$$

と分割し，［ＫＫ］,［ＫＢ］,［ＢＫ］（Ｋ＝１…，Ｌ）と［ＢＢ］,以外の部分は要素が全て∞であるようにする．

この場合の Cascade algorithm は次のようになる．

(1) $D_K = \begin{bmatrix} [KK] & [KB] \\ [BK] & [BB] \end{bmatrix}$ （Ｋ＝１，…，Ｌ）

について，forward process を行なう．Ｋ回目は，［ＢＢ］はＫ−１回目の forward process で得られた結果を用いる．

(2) $D_K = \begin{bmatrix} [KK] & [KB] \\ [BK] & [BB] \end{bmatrix}$ （Ｋ＝１，…，Ｌ）

について，backward process を行なう．Ｋ＝１以外では，［ＢＢ］は変化しないので，改めて計算しなくてよい．

(3) ［ＰＱ］を求めるには，［ＰＢ］［ＢＱ］を計算すればよい．但し，この行列積は，和を最小値，積を和，と置直して行なう．（前田英次郎）

Zangwill, W. I., “the Convex Simplex Method,” *Management Science*, **14**, 3 (1967), 221-238.

〔非線型計画／単体法の拡張／理論的〕

この論文には，

$$\min f(x)$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqq o \end{cases}$$

, f：凸関数，$\in C^1$, $A: m \times n$, $x: n \times 1$, $b: m \times 1$, なる非線形計画問題を解くためのアルゴリズムが提示されている．この方法の特徴は，ＬＰのための

Simplex Method (略して LSM) のタブロー形式の計算方法をそのまま上のような Convex programming の問題に拡張した点にある(そのため Convex simplex method, 略して CSM と呼んでいる). また今迄の NLP のアルゴリズムのタイプでは large-step gradient method に入るといってよい. なお $f(x)$ が線形のときはに LSM 一致する.

シンプレックス法の基底変数は, この方法でもそのまま使われているが, 基底外変数でも当然正値をとっている場合があり得ることになる.

まず各変数のシンプレックス判定基準に対応するものは,

$$C(x)=\nabla f(x)-T'\nabla f(x)_B$$

となる. ここで T は現在のタブローの係数行列, $\nabla f(x)_B$ は基底変数の傾斜ベクトル (gradient) である. 第 k 段階の解 x^k が与えられているときの $C(x)$ を $\{C_i^k\}(i=1,\cdots,n)$ で表わす. そのとき(イ) $C_{s1}^k=min\{C_i^k\}<0$ なる変数 x_{s1} を増大させること (ロ) $C_{s2}^k\cdot x_{s2}^{ok}=max\{C_i^k\cdot x_i^k\}>0$ なる x_{s2} を減少させること, は共に f の値を現在の $f(x^k)$ より減らさせ得る. また $C_{s1}^k=C_{s2}^k x_{s2}^k=0$ のときは x^k が最適解になっていることが証明される (Kuhn-Tucker の定理の直接の応用). したがって値を変えるための "候補" 変数 x_s の判定は,

$|C_{s1}^k|\geqq C_{s2}^k\ x_{s2}^k \rightarrow x_s=x_{s1}$ を増大

$|C_{s1}^k|<C_{s2}^k\ x_{s2}^k \rightarrow x_s=x_{s2}$ を減少

ということになる.

これら増大, 減少の幅は普通の NLP のそれと同様に変数の非負性の条件から決まる点を Z^k とすれば, $\min\limits_{0\leqq\lambda\leqq1} f(\lambda x^k+(1-\lambda)Z^k) = f(x^{k+1})$ として求められる (もし $Z^k=\infty$ ならば, その ray の上に任意点を Z^k として $\min\limits_{\lambda\geqq0} f(x^k+\lambda(z^k-x^k))=f(x^{k+1})$ で求められる).

基底の変更, タブローの変換は次のようになる: Case A. x_s: 増大, $Z^k<\infty$ のとき. (イ) $x^{k+1}\neq Z^{k+}$ ならば基底もタブローも変更なし, (ロ) $x^{k+1}=Z^k$ ならば x_s を新しく基底に入れるための消去演算を行ないタブローも変換される. Case B. x_s: 増大, $Z^k=\infty$のとき, (イ) $x^{k+1}=\infty$ ならば, $f(x^{k+1})=-\infty$ で終了 (ロ) $x^{k+1}<\infty$ ならば, タブロー, 基底の変更なし. Case C. x_s: 減少のとき (イ) $x^{k+1}\neq Z^k$, または $x^{k+1}=Z^k$ かつ $x_s^{k+1}=0$ ならば, タブロー, 基底に変更なし. (ロ) $x^{k+1}=Z^k$ かつ $x_s^{k+1}>0$ ならば, x_s を基底変数にするための消去演算を行ない, タブローは変換される.

以上がこの CSM の主もな計算手順であるが, Anti-Cycling の仮定のもとで, 無限系列 $\{x^k\}$ の収束点が最適解になることが証明されている.

この論文の著者はこの CSM の特徴として, LSM のためのいろいろな変形した方法が, そのまま CSM にも応用可能である点をあげ, たとえば輸送問題 (費用関数が非線形) を例にして CSM で解いている. (青沼竜雄)

Weingartner, H. M., "Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems" (1963)

資本を投下する時, そのプロジェクトがお互に独立であったり, 従属関係にあるとか, 市場が完全市場である場合, 不完全市場である場合又は投資期間が one-period の場合や multi-periods である等々の際に最適投資政策を決める論文は数多く出されている. しかるに線型計画法を使って豊富な例題を上げつつ予算の段階から総合的にまとめられたのは本書が最初と思われる. 著者はM・I・Tの教授で, 本書によりフォード財団基金の62年の Award Winner となっている. この本の目的は二つあって, 一つは総合報告, 一つは著者自身の研究の紹介にあり, 前者については Lorie & Savage の Three Problems in Rationing Capital (Journal of Business, XXVIII, No. 4 (Cctober, 1955)) やその他の投資政策理論, 証券投資理論と Gomory その他の整数線型計画理論とを一つの Capital Budget の問題として融合させて理論的にも実際的にも完成されたものとしてまとめあげている. 後者については著者の広い知識と経験から数理計画法で投資問題を解く際の注意や理論を補い展開している. 理論倒れをさけて実際的にも考慮してあり, 投資に伴なう不確定性への解決方法もきわめて合理的である. 以上からいってこの本は Budget Control について, 又はキャッシュ・フローの最適政策決定について Senstitive に広い視野のもとに書かれているから研究者, 学生, 実際家にとって格好の本であろう.

1. 序 (1～5ページ) はじめの一章には経営における Capital Budgets の最近の発展とその理論的背景, 本書の研究の目的, 不確定性への一般的注意が述べられている.

2. Lorie—Savage の問題 (6～15) には Three Problems in Rationing Capital をもとにしてプロジェクトが互に独立で①単一期間の場合②長期問題の場合, 又はプロジェクトが互いに独立でない場

合，特別な条件をもった期間がある場合について述べられている．

3. Lorie—Savage の問題に対する線型計画法による接近（16〜35）にはまず基本的モデル，Lorie—Savage モデルの LP 解，プロジェクトに柔軟性がある場合，そのモデルと双対法の関係，プロジェクトの排反性と偶然性について，必ず選ぶプロジェクトが含まれてる時，そのモデルを LP で解く時プロジェクトの柔軟性の最大数，不確定性を含んだプロジェクトの数値計算例が示されている．

4. Lorie—Savage の問題に対する整数線型計画法による解法と不連続の意味（44〜53）にはそのモデルを整数線型計画化した解法に特別な工夫をしなかった時の失敗例があり，有界法も示されている．

5. 整数型線型計画法のアルゴリズムと双対変数の導入（57〜112）には Gomory の方法で双対法を使う方法その整数解の特異性，特異性の限界，非集中化についてのべている．

6. Budget Control を使う際の注意（115〜112）には実際の経営における Capital Budget Control について論じている．

7. 関連した問題に応用されたプログラム手法（123〜138）には遅れのある場合，利子率が変化する時，複合予算，パラメトリックな方法について述べている．

8. Capital Budgeting の改良した定式化（139〜157）には Basic Horizon モデルの双対変数法化，不確定性の影響，データの集め方が述べてある．

9. 不完全市場での Capital Budgeting プログラム手法の適用（158〜178）には借入金に制約がある時，Horizon の選び方と分離の意味，資金供給，利率に傾斜をつける場合，更に完全又は不完全市場でプロジェクトが独立，又は従属関係にある時の計算法が示されている．

10. むすび及び文献（191〜200）以上が内容である．本書は最近 Budget Control の総合プログラムが要求されている折からすぐに実践面で役立つ本であると思う．（田口新治）

Marshall, K. T., Some Inequalities in Queuing. (*Opns. Res.* 1968 vol. 16 no. 3 pp. 651〜668)

〔待合せ理論／理論的／不等式〕

待ち合わせ理論に於いてシステムのおおよその様子をつかむための一つの方法として，待ち時間等の平均，分散を不等式で評価しようとする試みがある，これは先ず平均待ち時間について，Kingman(1962) が彼自身の heavy traffic（その後ロシアで盛んにやられている.）の論文からヒントを得て，始めている．

本論文では $GI/G/1$ の平均待ち時間，平均行列長さ（Little の結果を使う），output process について上，下からの bound を与えている．

先ず記号を導入する．（〜は次の分布をもつの意）

T_n ＝到着時間間隔$\sim A(x)$ $E(T_n)=a$

S_n ＝サービス時間$\sim B(x)$

$U_n=S_n-T_n$ $\sim K(x)$

W_n＝待ち時間 $\sim W(x)$

I ＝空き時間 $\sim H(x)$

τ_n ＝departure 間隔

一般の $GI/G/1$ に対して

$$W_{n+1}-X_n=W_n+U_n$$

ここで $X_n=\begin{cases}0 & W_n+U_n\geq 0 \text{ のとき}\\ I & W_n+U_n<0 \text{ のとき}\end{cases}$

系が定常状態に達しているものと考える．定理1. 2. $\rho<1$ なるすべて $GI/G/1$ queue に対して

$$E(W)=-\{E(U^2)/2E(U)\}-\{E(I^2)/2E(I)\}$$

$$var(W)=-\{E(U^3)/3E(U)\}+\{E(U^2)/2E(U)\}^2+\{E(I^3)/3E(I)\}-\{E(I^2)/2E(I)\}^2$$

$$var(\tau_n)=var(S_n)-(1-\rho)^2/2+a(1-\rho)\cdot E(I)/E(I)$$

定理 3. $\rho<1 \Leftrightarrow x=\int_{-x}^{\infty}(1-K(u))du$

の解 l が唯一つ存在する．

このとき，$l\leqq E(W)\leqq J$

が成立つ．$J=\{var(T_n)+var(S_n)\}/2a(1-\rho)$

系．$\rho<1$ のとき $var(S_n)\leqq var(\tau_n)\leqq var(T_n)+2\,var(S_n)-2\,la(1-\rho)$

上記の bound を $A(x)$ が次の特性をもつとき，もっとうまく評価できる．

定義 1. $A(x)$ が $\gamma-MRLA$

$\Leftrightarrow \int_t^{\infty}\{1-F(u)\}/\{1-F(t)\}\cdot du$ for all $t\geqq 0$.

定義 2. $A(x)$ が IFR

$\Leftrightarrow F'(t)/\{1-F(t)\uparrow$ for all $t\geqq 0$.

(1) すべての $a-MRLA/G/1$ queue に対し $\rho<1$ のとき $J-\frac{1}{2}a(1+\rho)\leqq E(W)\leqq J$

(2) すべての $IFR/G/1$ queue に対し $\rho<1$ のとき $J-2a(C_a{}^2+\rho)\leqq E(W)\leqq J$

（$C_a{}^2$ は T_n の変動係数とする.）

（江部雅夫）

Neuts, M. F., "Tow Markov chains, arising from examples of queues with state-dependent service time," *Sankhya*, Series A, **29**, 3 (1967)259-264)

〔待ち行列／サービス分布可変型／理論的〕

この論文は Welch(1964), Suzuki(1965), Harris (1966) 等の研究による，系の列の長さに応じてサービス時間分布が変わる場合を，2つの技巧的例を作って議論し，もっと一般な場合への研究の足がかりとしたい要求から書かれたものである．

M/G/1型を取り扱う．

例 A： 客のサービス終了時直後の列の長さが正の偶数ならば2人同時にサービスされ，もし奇数ならば1人サービスされる．もし列の長さ0ならば，新しい客が到着してはじめてその客（1人）をサービスする．1人サービスする場合のサービス時間分布をA(・)，2人同時にサービスする場合をB(・)とする．この時，サービス終了時直後の列の長さはマルコフ連鎖を作り，transient, null-recurrent, positive-recurrent なるための必十条件を与え，positive-recurrent なるとき定常分布の母関数を求めている．

例 B： 客のサービス終了時直後で，列の長さが偶，奇数に拘らず1人ずつサービスする（空ならば待って到着した客をサービスする）が，サービス時間分布は偶，奇によって変わり奇ならばA(・)，偶ならばB(・)とする．

このとき例Aと同様の方法で，positive-recurrent なるための必十条件と定常分布の母関数を求めている．

この論文に拘らず最近上掲の論文の他に以下の型の研究がある．

M/M/1型：

(1)列の長さに応じて直ちにサービス率をかえる（藤沢武久）

(2)列の長さに応じて直ちにサービス率をかえるが，短かい方から長い方へ，長い方から短かい方へ変化するとき多少のずれがある (Gebhard (1967)).

M/G/1型：

(1)Gの平均が確率変数である (Harris (1967)).

GI/G/1型：

(1)待ち時間によってサービスが助長される（鈴木武次 (1965)).

現在のところ，列の長さ，サービス継続期間の始めの客と後続の客，待ち時間，系と独立な要因によってサービス時間分布が変わる場合が取り扱われている．これらを総括して一般に"サービス分布可変型待ち行列系"とよぶことができよう．(鈴木武次)

Pearce, C., "An imbedded chain approach to a queue with moving average input," *Opns. Res.*, **15**, 6 (1967) 1117-1130.

〔待ち行列／独立でない入力／理論的〕

GI/G/1 型の待ち行列系の一般化を目指している．即ち到着間隔が独立でなくて，相関をもつタイプのものを考えて，queue length の transient behavior を，continuous time の場合と，ある種の imbedded の場合とについて調べ，また busy period についても考察している．

いま，n 番目の客の到着時刻を A_n として，

(1) $A_{n+1}-A_n=f_0(U_{n+p})+f_1(U_{n+p-1})+\cdots+f_p(U_n) \quad (n\geqq 0)$

のような関係が満足されるとき，この待ち行列系への入力は，order $(p+1)$ の generalized moving average を構成するといい，order p の moving average input を G_p と書く．ただし，$\{U_n, n\geqq 0\}$ は同一の分布に従う独立な確率変数列であり，積分可能な関数 f_i には，到着間隔が非負であることを保証するために，たんに

$$\sum_i \inf f(U)\geqq 0$$

という制限だけが設けられている．

この論文では，特に

(2) $A_{n+1}-A_n=b_0\, U_{n+1}+b_1\, U_n \quad (n\geqq 0)$

のような場合，つまり G_2 入力をもつシステムを解析している．ここで b_i は共に正で，$b_0+b_1=1$ である．（ただし，これは話を簡便にするためのものであって，計算の労を惜しまなければ，(1)のような入力をもつ場合も，これから述べる方法で全く同様に解析することができる．）

そしてまず，$G_2/M/1$ の transient behavior について，Takaćs の線に従って議論を展開する．即ち，m 番目の客の到着時刻 A_m からの経過時間が b_1U_m である時刻を R_m とする．そうすると，(R_m, R_{m+1}) の長さは U_{m+1} であり，従って時間区間(R_m, R_{m+1}) は同一の分布に従う独立な確率変数になる．そこで $\{R_m\}$ をエポックとして，queue length を考察する．そのために

$p_{ik}^{(m)}=$ある interval (R_j, R_{j+m}) で，queue size が i から k へ移る確率の母関数

$$P_{\cdot k}(z, w) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} z^i w^m$$

をキチンと求めている．

次に，任意の時点での queue length の transient behavior を調べている．そのために，regenerative point の時点を $t=0$ として R_0 で示すことにして，

$p_{ik}(t)$＝時刻0で queue size が i であるとして，時刻 t での queue size が k となる確率

のラプラス変換をとり，これを $P_{ik}^*(s)$ とかく．そして，この母関数

$$P_{\cdot k}^*(s, z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} P_{ik}^*(s) \cdot z^i$$

がどのようにして求められるかを示している．つい busy period でについても調べ，また $G_2/M/1$ で集団到着（fixed size）をもつシステムでは，任意の時刻 t における queue size が j となる確率 $q_j(t)$ の極限分布 $\{q_j\}$ を調べ，

$q_0 = 1 -$traffic intensity

の成立を示している．

そして最後に，このような集団到着での待ち時間として，

{batch での s 番目の客の待ち時間分布}

が，どのような形で書けるかを示している

以上，手法はいずれもおきまりのものを用いているようであるが，この種の研究は，特にタンデム型の解析にある程度の示唆を与えるものであって，今後かなりの関心が寄せられるべきであると考える．

（牧野都治）

Beusch, J. U., "A general model of a single-channel queue : discrete and continuous time cases," *Opns. Res.*, **15**, 6 (1967) 1131-1144.

〔待ち行列／単一窓口の一般的模型／理論的〕

単一窓口の待ち行列系で，到着およびサービスが discrete な場合を PART I，continuous な場合を PART II で解析している．

PART I では，客が discrete time 0, 1, 2…にシステムに到着し，サービス時間も discrete であるとする．

$x(n)$＝[時刻 n に行列内にいるすべての客のサービス時間の合計（時刻 n に到着した客を含む)]
＋[{時刻 n にサービスをうけている客のサービス時間}－{その客が時刻 n までにサービス窓口で費した時間}]，

$y(n)$＝時刻 n に到着したすべての客のサービス時間の合計

として，まず $y(n)$ が $k<n$ なる $y(k)$ と独立でかつ，$x(n)$ と $y(n)$ とが独立ならば，

$$E[x] = \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2(1-\rho)},$$

$$E[x^2] = E[x]\{2E[x]+1-4\rho\}+2\rho^2+(E[y^3]-\rho)/3(1-\rho)$$

となることを導いている．（ただし，平均サービス時間＝1）としてある．

次に，時刻 $(n+1)$ に N 人の客が到着するものとして，その第1番の客，第2番の客，…，第 N 番の客のサービス時間を $s_1, s_2, \cdots, s_N$ として，このようなシステムでの平均待ち時間

$E[d]$ を計算し，

$$E[d] = E[x] - \rho + E(s)/2 + E[s]\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\, p_i/(1-\rho_0)\right]/2$$

となることを示している．ただし，$p_i \equiv P_r\{N(n)=i\}$ である．

また，客がシステム内に滞留することに対するコストとして，滞留時間（もちろん discrete）の x 倍の値をとることにして，これを用いることにより，Process の Transient Behavior や x の Autocorrelation Function, Expected First Passage Time などを調べている．

つづいて，平衡状態確率

$\pi_i \equiv P\{x(n)=i\}$

（$E[y]<1$ のとき，n と無関係）

の積率母関数 $\pi^T(z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$ が

$$\pi^T(z) = (1-\rho)P^T(z)\cdot(z-1)/[z-P^T(z)]$$

となることを示している．ただし $P^T(z)$ は

$P_i \equiv P_r\{y(n)=i\}$ （n に無関係とする．）

で定義されている P_i の積率母関数である．

PART II では，PART I で調べたのと同じようなことを，discrete time の場合について述べている．

（牧野都治）

Bhat, U. N., "Some explicit results for the queue GI/M/1 with group service," *Sankhyā*, Series A, **29**, 2 (1967), 109-206.

〔待ち行列／集団サービス／理論的〕

次の3つの仮定をみたす待ち行列を考える．

i) 客は時刻 $t_0(=0)$, t_1, t_2, ……に到着し，$\{t_n - t_{n-1}\}(n=1, 2, \cdots)$ は互いに独立な確率変数列で，共通の分布 $A(t)$ に従う．

ii) サービスは容量 $G_n(n=1, 2, \cdots)$ の batch で行なわれ，$\{G_n\}$ は互いに独立な確率変数列で

共通の分布 $P_r(G_n=r)=b_r(r=1, 2, \cdots)$ に従い，各 batch のサービス所要時間は平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布に従う．

iii) サービスは系内の客の数が 0 とならない限り続けられる．待っている客の数が容量より少なかった場合には，サービス開始後に到着した客でも容量に達するまでは batch に受け入れるが，そのためにサービス時間が変わるようなことはない．

この論文の目的は，この待ち行列について，主として busy period, busy cycle の分布を，場合を分けて考えるという直接的な方法で explicit に求めようとするものである．

$Q(t)=$ (時刻における系内の客の数，ただし $Q(t_n)=Q(t_n-0)$),

$T_i=$ ($Q(0)=i$ の場合の $\inf\{t>0 | Q(t)=0\}$，すなわち busy period)

${}^*G_{ij}^{(n)}(t)=P_r\{Q(t_n)=j, t_n\leq t, T_i>t | Q(0)=i\}$,

$G_{ij}^{(n)}(t)=P_r\{Q(t+0)=j, t_n\leq t<t_{n+1}, T_i>t | Q(0)=i\}$

とおく．

まず $Q(0)=0$ の場合について $d^*G_{0j}^{(n)}(t)$ が求められ，次いで

$$G_{0j}^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-j+1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\lambda b_{n-j+1}{}^{(k)}$$

$$\cdot\int_0^t [t-(1-\frac{j-1}{n})\tau](1-A(t-\tau))\,dA_n(\tau)$$

が求められる．ここに $\{b_r{}^{(k)}\}$ は $\{b_r\}$ の k—fold convolution で，$b_r{}^{(k)}=0\ (r\neq 0)$, $b_0{}^{(0)}=1$ とする．その結果 busy period T_0 と，その間にサービスを受ける客の数との結合分布が次のように求められる．

$g^{(n)}(t)\,dt=\sum_{\gamma=1}^{n} G_{0\gamma}{}^{(n-1)}(t)\lambda dt\sum_{k=\gamma}^{\infty} b_k$ (原論文では $\sum_{\gamma=1}^{n-1}$ となっているがこれは誤まり)．

$Q(0)=i$ の場合については，上の結果を用いて $d^*G_{ij}^{(n)}(t)$, $G_{ij}^{(n)}(t)$ が順次求められるが，原論文の式にはいずれも多少の誤りがある．busy period T_i とその間にサービスを受ける客の数との待合分布 $g_i^{(n)}(t)dt$ も同様に求められる．

最後に busy cycle とその間にサービスを受ける客の数との結合分布 $R_i^{(n)}(t)=P_r\{Q(t_n)=0, t_n\leq t, T_i>t_{n-1}\}$ について，$dR_i^{(n)}(t)$ が求められる．

全体に細かい誤りが多いのが気になる．

(神田寿人)

Powell, B. A., and Avi—Itzhak, B., "Queuing systems with enforced idle time," *Opns. Res.*, **15**, 6 (1967) 1145-1156.

〔待ち行列／サービスが定刻開始／理論的〕

この論文は，時間を長さ 1 ごとに区切り，窓口は，それらの時間間隔の始点である，時刻 1, 2, 3, ……でのめサービスを開始できるという待ち行列を論じている．この場合，客が待っていて窓口があいていても，定められた時刻まではサービスが始められないので，ここに enforced idle time が生じる．

最初 $GI/M/N$ 型の場合が考察される．ただし，この論文でいう GI の意味は，以下の仮定からわかるように，普通に使われている意味とはかなり異なることに注意すべきである．上記以外の仮定および記号は次の通りである．①窓口は N 個で，共通の待ち行列を作る．②時間間隔 $(i-1, i)$ の間に到着する客の数を k_i $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ とし，これらは互いに独立で，同一の一般分布に従う．③サービス時間は互いに独立で，パラメータ μ の指数分布に従う．④時刻 $i-1$ における系内の客の数を X_i $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ とする．このとき $E(k_i)<N(1-e^{-\mu})$ ならば，X_i の定常分布が存在し，その母関数 $G(x, z)=\lim_{n\to\infty} G(x_i, z)$ が一応求められる．ただし，結果を explicit に出すには，方程式

$$z^N-G(k, z)\,(e^{-\mu}z+1-e^{-\mu})^N=0$$

の単位円内の N 個の根を求めるという問題が残される．ここに $G(k, z)$ は k_i の分布の母関数である．付録として，そのための多少のヒントが挙げられている．

次に $GI/D/N$ 型が考察される．仮定としては，サービス時間が定数 s であることの他はすべて前と同じである．a より "小さくない最小の" 整数を $[a]$ とする．$E(k_i)[s]<1$ のとき X_i の定常分布が存在し，$G(x, z)$ が求められるが，前と同様に超越方程式の根を決定する問題が残される．

以上いずれの場合においても，特に $N=1$ とした場合については $G(x, z)$ および $\lim_{i\to\infty} E(x_i)$ が explicit に得られ，更に到着を指数型とした場合については，enforced idle time のない場合との比較がなされている．

最後に $GI/G/1$ 型が考察される．$N=1$ とし，サービス時間 S は互いに独立で共通の一般分布に従うとする他は仮定は前と同じである．$E(k)\ E([S])<1$ のとき，busy period (始点で窓口が busy であるような時間間隔の連続したものをいう) の長さの

分布，および X_t の定常分布の母関数が求められるが，前者については超越方程式の根を決定する問題が残される． （神田寿人）

新　刊　紹　介

≪本号よりオペレーションズ・リサーチに関連した新刊書をごく手短かに紹介することにいたします．≫

タイル／ブート／クルック 関根智明訳，ＯＲと計量経済学，好学社．

計量経済学とＯＲで取り扱われる一般的な方法と成果を述べている．数学や確率論を駆使してモデルを組み立て解を得るようなことはせず，簡単ではあるが具体的な例をあげて問題点と解法，および，その解の意味づけを丁寧に解説している．計量経済学やＯＲの専門家を対象とするものではなく，こうした分野に興味のある人々を対象とした入門書である． （福川忠昭）

Hollingdale, S. H., Digital Simulation in Operational Research, English Univ. Press. 1967. 392p

N.A.T.O. の後援で1965年10月ハンブルグにて非公式に開かれた会議での発表論文集である．これらの論文はシミュレーションに関する巾広い問題を取り扱っている．シミュレーションに関する理論と方法の全般的議論，擬似乱数，スケジューリング，シミュレーション言語，アプリケーション（ＯＲ．企業，陸海空三軍，人工衛星）等について書かれている．アプリケーションが全体の３分の２を占めているが，一つ一つの論文は要約程度である．シミュレーションを手掛けている各研究分野の専門家を対象としている． （福川忠昭）

Journal of the Operations Research Society of Japan

（日本オペレーション・リサーチ学会　欧文機関誌）

Volume 11, Number 2 (December 1968)

Contents