

保全を含む系の信頼性†

—不完全修理の確率過程—

岡 田 昂 三*

1. 序言

一般に機器の運用に際し、経済的理由もしくは運用上の要求から機器の保全を行なう場合がある。この場合、機器単独の信頼性のみを考察しても運用上要求される結論を充分に得ることができず、保全による影響を合わせて考察する必要がある。

ここでは、保全要員、保全に使用する施設（測定器、工具、技術資料等）および補用部品等を総括して保全系と呼び、機器そのものと保全系とを合せた全体を系と呼ぶことにする。この関係を図示すると図1となる。

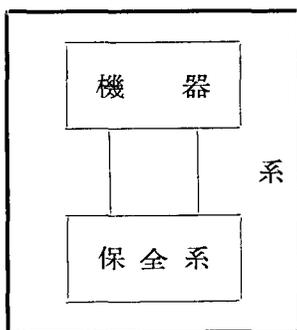


図1 系の構成

保全系が行なう作業は多種にわたり、系に及ぼす影響はきわめて複雑であると考えられるが、保全系が行なう故障修理（不完全修理）に着目し、系を一種の自復作用を有する機器とみなしてその信頼性を次に示すモデルのもとで考察する。

2. モデルの認定とその説明

モデルを下記の通り設定する。

仮定 a : 故障はすべて偶発故障¹⁾とする。

仮定 b : いずれの故障に対しても修理が成功する確率を P とする。

† 1968年4月18日受理

* K K 東京計器製造所

仮定 c : 1 回の修理毎に一定量 α だけ偶発故障率²⁾を高めるものとする。

仮定 d : 修理に要する時間は稼働時間に比し無視できるものとする。

仮定 a の説明

厳密にはデバッキング期間内での修理についても保全の影響を考察すべきであるが、運用中の機器は事前に製造工場等でデバッキングされている場合が多いので、ここではデバッキング完了後を対象とする。また PM 等の結果、摩耗故障が発生しないものとして考察の対象をすべて偶発故障とした。

仮定 b の説明

一般に、発生するすべての故障について修理が成功するとはいえず、修理作業で故障箇所を発見できない場合がある。また発見できても部品の入手が不能等の理由で Give up する可能性が存在する。ここでは、修理作業の結果、機器を動作状態に復元できる確率を考えこれを p とする。

仮定 c の説明

完全な修理が期待されるなら、修理成功後の故障率を故障発生前の故障率に復元できるものと考えられるが、一般に完全な修理が期待できない場合が多く、不完全修理に起因する劣化が起るものと考えられる。特に Field Maintenance にみるごとく人的、物的あるいは時間的制約を受けた条件下での修理には、種々の不完全さが忍びこむものと考えねばなるまい。

不完全修理の具体例とその結果を電子機器の場合について下記する。

- (1) 不完全な半田上げ作業：半田上げ箇所の機械的電氣的強度が低下する。
- (2) 半田上げ作業中その附近の部品を加熱する：加熱された部品の強度が低下する。
- (3) 真空管等の交換に伴う調整の不備：回路のストレス・レベルを上昇させる。
- (4) 正しい故障箇所を発見できず調整をずらして動作させる：回路のストレス・レベルを上昇させる。
- (5) 高圧碍子等にゴミ、手アカ等をつける：高圧回路の耐圧を低下させる。
- (6) 修理に使用した部品のロットが標準以下の強度の場合：部品の強度を低下させる。
- (7) カラーコードの読み違い等により正規部品を使用しない場合：回路のストレス・レベルを上昇させる。

上記の例にみる如く不完全修理の多くは、機器の機能を正常に修復できてもストレスを上昇させたり、回路素子等の強度を低下させたりするので、その結果故障率を上昇させるものと考えられる。特に PM の実施により摩耗故障を事前に防ぎながら長期間同一機器を使用する場合には、修理回数が多くなり不完全修理の影響を無視できないものと考えられる。

一般に、一回の修理でもち込まれる劣化の大きさは、確率分布するものとするのが妥当であ

- 1) 時間の経過に無関係にランダムに発生する故障をいう。
- 2) 偶発故障が微小時間 Δt 間に発生する確率が $\lambda \cdot \Delta t$ で表わされる時の λ を意味する。

ろうが、ここでは解析の容易さを考え、修理が1回成功した場合その結果一定量 α だけ偶発故障率を高めるものとした。

仮定 d の説明

修理に要する時間は発生する故障箇所の違い等で変動し、確率分布するものと考えられるが、稼働時間に比し小さい場合が多いので解析の容易さを考え合せ、ここでは無視できるものとした。

3. 系の状態の定義および状態推移図

今、系のとり得る状態を考えると、仮定 d により系が修理中である状態を考える必要がないので、次に示す二つの状態 $\{P\}$ 、 $\{Q\}$ に大別できる。

状態 $\{P\}$: 系中の機器が動作中である状態。

状態 $\{Q\}$: 系中の機器が修理不能となった状態。

さらに、状態推移図を作成するために状態 $\{P\}$ 、 $\{Q\}$ を細分化して下記に示す状態 $\{P_n\}$ 、 $\{Q_n\}$ を定義する。

状態 $\{P_n\}$: n 回の修理歴をもった機器が動作中である状態。 ($n=0, 1, 2, \dots$)

状態 $\{Q_n\}$: n 回めの故障修理が失敗して修理不能となった状態。 ($n=1, 2, \dots$)

また、本モデルの仮定により、微小時間 Δt 間に状態 $\{P_n\}$ から状態 $\{P_{n+1}\}$ へ推移する確率と状態 $\{P_n\}$ から状態 $\{Q_{n+1}\}$ へ推移する確率はそれぞれ

$$\{P_n\} \rightarrow \{P_{n+1}\} : (\lambda_0 + n\alpha)p\Delta t, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\{P_n\} \rightarrow \{Q_{n+1}\} : (\lambda_0 + n\alpha)(1-p)\Delta t, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

となる。ここで λ_0 は使用開始時 ($t=0$) での偶発故障率である。

従って本モデルの状態推移図を図 2 で示すことができる。

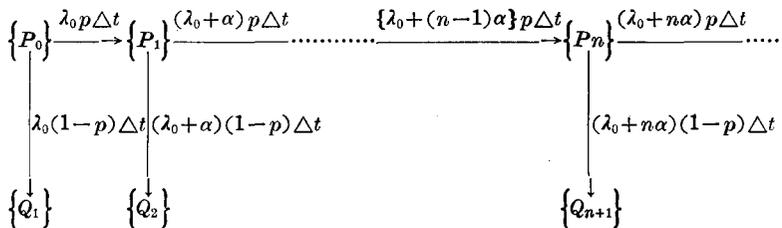


図 2 状態推移図

4. 状態方程式と状態確率³⁾

図 2 に従い故障発生のおとど状態が推移するが、故障は時系列内で起る確率事象なので、下記に

3) ある特定の状態をとる確率を意味し、ここでは $P_n(t)$ 、 $Q_n(t)$ をさす。

定義する確率が存在する.

$P(t)$: 時刻 t で状態 $\{P\}$ である確率,

$Q(t)$: " " $\{Q\}$ " " ,

$P_n(t)$: " " $\{P_n\}$ " " , $n=0, 1, \dots$

$Q_n(t)$: " " $\{Q_n\}$ " " , $n=1, 2, \dots$

ただしこれらの確率は, $0 \leq t$ の範囲で定義され, 系の初期条件すなわち $t=0$ での状態は $\{P_0\}$ であるものとする. 以上の定義より次式が成立する.

$$(1) P_0(0)=1,$$

$$(2a) P_n(0)=0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$(2b) Q_n(0)=0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$(3a) P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t),$$

$$(3b) Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t),$$

$$(4) P(t) + Q(t) = 1,$$

$$(5a) P(0) = 1,$$

$$(5b) Q(0) = 0,$$

今 $P_n(t+\Delta t)$ および $Q_n(t+\Delta t)$ を考え, Δt を 0 に近づけることにより下記に示す状態方程式を得る.

$$(6a) \begin{cases} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ \end{cases}$$

$$(6b) \begin{cases} P_n'(t) = -(\lambda_0 + n\alpha)P_n(t) + p\{\lambda_0 + (n-1)\alpha\}P_{n-1}(t), \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$(6c) \begin{cases} Q_n'(t) = (1-p)\{\lambda_0 + (n-1)\alpha\}P_{n-1}(t), \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

ただし $P_n'(t)$ および $Q_n'(t)$ はそれぞれ $P_n(t)$ および $Q_n(t)$ の t についての微分とする.

ここで初期条件, 式 (1) および (2a, b) を考慮して, Laplace 変換を行ない次式を得る.

$$(7a) \begin{cases} f_0(s) = \frac{1}{s + \lambda_0}, \\ \end{cases}$$

$$(7b) \begin{cases} f_n(s) = p \frac{\lambda_0 + (n-1)\alpha}{s + \lambda_0 + n\alpha} f_{n-1}(s), \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$(7c) \begin{cases} g_n(s) = (1-p) \frac{\lambda_0 + (n-1)\alpha}{s} f_{n-1}(s), \quad n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{ただし } f_n(s) = \mathcal{L}\{P_n(t)\}, \quad n=0, 1, \dots$$

$$g_n(s) = \mathcal{L}\{Q_n(t)\}, \quad n=1, 2, \dots$$

である.

さて次に $P_n(t)$ を算出する. 先ず $n=0$ の場合の $P_0(t)$ は式 (7a) よりただちに次式となる.

$$(8a) P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad (\alpha \geq 0)$$

次に $n=1, 2, \dots$ で $\alpha>0$ の場合, 式 (7a, b) より $f_n(s)$ は次式で示される.

$$f_n(s) = \frac{p^n}{n!} \frac{\lambda_0}{\alpha} \left(\frac{\lambda_0}{\alpha} + 1 \right) \cdots \left(\frac{\lambda_0}{\alpha} + n - 1 \right) \left\{ \frac{\binom{n}{0}}{s + \lambda_0} - \frac{\binom{n}{1}}{s + \lambda_0 + \alpha} + \frac{\binom{n}{2}}{s + \lambda_0 + 2\alpha} - \cdots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{s + \lambda_0 + nd} \right\}, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

これを逆変換し, $0 < \exp(-\alpha t) < 1$ を考慮することにより, 次式を得る.

$$(8b) \quad P_n(t) = \frac{p^n}{n! \alpha^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda_0 + i\alpha) e^{-\lambda_0 t} (1 - e^{-\alpha t})^n, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

また $\alpha=0$ の場合, 式 (7a, b) より $f_n(s)$ は次式で示される.

$$f_n(s) = \frac{(p\lambda_0)^n}{(s + \lambda_0)^{n+1}}, \quad \alpha = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

従って $P_n(t)$ は次式で示される.

$$(8c) \quad P_n(t) = \frac{(p\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}, \quad \alpha = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

以上の結果をまとめると状態確率 $P_n(t)$ は次式で示される.

$$(8) \quad P_n(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_0 t} & \alpha \geq 0, \quad n = 0 \\ \frac{p^n}{n! \alpha^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda_0 + i\alpha) e^{-\lambda_0 t} (1 - e^{-\alpha t})^n, & \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ \frac{(p\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}, & \alpha = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

なお, 式 (8c) において $p=1$ と置くと, 確率変数 n についての平均 $\lambda_0 t$ の Poisson 分布を示し, 式 (8b) も一種の確率分布を示している.

また $Q_n(t)$ についても式 (7a, b, c) より求められるが省略する.

5. Availability

運用上, 機器の信頼度とは別に系の信頼度にあたる Availability を必要とする場合が多い. これを時刻 0 で状態 $\{P_0\}$ の系が時刻 t の時状態 $\{P\}$ である確率と定義すると, 本モデルでは $P(t)$ となり下記の如く算出できる.

$\alpha > 0$ の場合の $P(t)$ は式 (3a) および式 (8a, b) より次式となる.

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t), \\ = e^{-\lambda_0 t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n! \alpha^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda_0 + i\alpha) (1 - e^{-\alpha t})^n \right\}, \quad \alpha > 0$$

このべき級数は $|p\{1 - \exp(-\alpha t)\}| < 1$ を考慮し次式となる.

$$(9a) \quad P(t) = e^{-\lambda_0 t} (1 - p + p e^{-\alpha t})^{-\lambda_0/\alpha}, \quad \alpha > 0$$

次に $\alpha=0$ の場合の $P(t)$ は式 (3a) および (8c) より次式となる。

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t),$$

$$= e^{-\lambda_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\lambda_0 t)^n}{n!}$$

(9b) $= e^{-\lambda_0(1-p)t}, \quad \alpha=0$

以上をまとめると、求める Availability $P(t)$ は次式で示される。

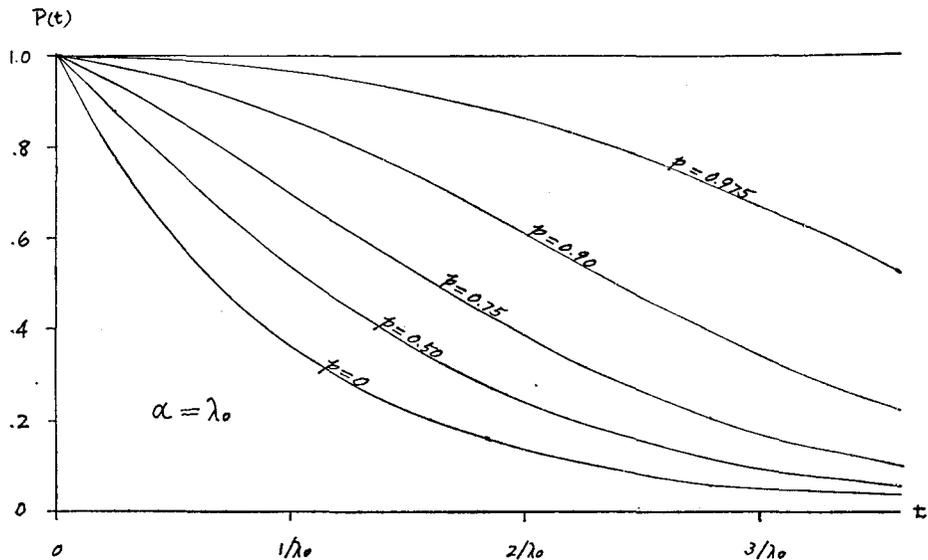


図3 Availability

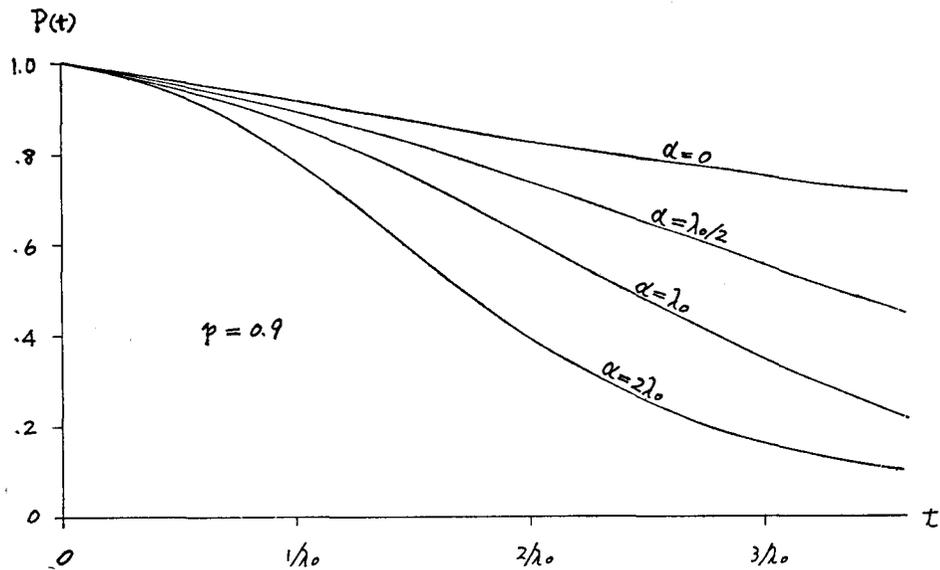


図4 Availability

$$(9) \quad P(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_0 t}(1-p+pe^{-\alpha t})^{-\lambda_0/\alpha}, & \alpha > 0 \\ e^{-\lambda_0(1-p)t}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

上式において $\exp(-\lambda_0 t)$ は機器自体の信頼度（本モデルでは $P_0(t)$ ）なので

$$(1-p+pe^{-\alpha t})^{-\lambda_0/\alpha} \geq 1,$$

が整備系の Availability に及ぼす影響（効果）を示しているといえる。式 (9b) で示される劣化の無い場合には

$$\exp(\lambda_0 p t) \geq 1,$$

が整備系の効果を示している。この場合系の故障率が $\lambda_0(1-p)$ であると考えられる事もできる。 p または α をパラメーターに選び $P(t)$ を図示すると図3および図4となる。

6. 系の故障率

本モデルでは、系に自復作用があるので機器の故障とは別に、系の故障率を考える事ができる。すなわち、状態 $\{P\}$ から $\{Q\}$ への推移を系の故障発生と考え、時刻 t で状態 $\{P\}$ の系が引続く微小時間 Δt に状態 $\{P\}$ から $\{Q\}$ へ推移する確率が $\lambda^*(t) \cdot \Delta t$ で表わされるとき、この $\lambda^*(t)$ を系の（瞬間）故障率と定義する。

時刻0で状態 $\{P_0\}$ にあった系が時刻 t から引続く微小時間 Δt に状態 $\{Q\}$ へ推移する確率は

$$P(t) - P(t + \Delta t)$$

であり、 $\lambda^*(t)$ の定義で述べた確率 $\lambda^*(t) \cdot \Delta t$ はこの条件（時刻 t で状態 $\{P\}$ であるという条件）つき確率なので次式が成立する。

$$\lambda^*(t) \cdot \Delta t = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{P(t)},$$

これを $\Delta t \rightarrow 0$ とし微分記号で表現して次式を得る。

$$(10) \quad \lambda^*(t) = -\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt},$$

これに式 (9) を代入して求める系の故障率 $\lambda^*(t)$ は次式で与えられる。

$$(11) \quad \lambda^*(t) = \begin{cases} \lambda_0 \frac{1-p}{1-p+pe^{-\alpha t}} & \alpha > 0 \\ \lambda_0(1-p) & \alpha = 0 \end{cases}$$

上式から $t=0$ および $t \rightarrow \infty$ での系の故障率 $\lambda^*(0)$ および $\lambda^*(\infty)$ はそれぞれ次式で示される。

$$(12) \quad \lambda^*(0) = \lambda_0(1-p), \quad \alpha \geq 0$$

$$(13) \quad \lambda^*(\infty) = \begin{cases} \lambda_0, & \alpha > 0 \\ \lambda_0(1-p), & \alpha = 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0, t > 0$ の一般の場合

$$(1-p) < \frac{1-p}{1-p+pe^{-\alpha t}} < 1,$$

が系の故障率に及ぼす保全系の効果を示していると考えられ、この値が小さいほど効果が大きいとみることができよう。これは時間 t の関数であり、時間の経過とともに効果が減小し、式(13)にみるごとく、 $t \rightarrow \infty$ で効果がなくなると考えられる。この時でも系の故障率が λ_0 を越えないのは、極端に劣化が進む機器は途中で修理が失敗し、死滅するためと考えられる。

なお、式(10)が成立するので、この系の故障率 $\lambda^*(t)$ は Availability $P(t)$ に対応する故障率であることを附記しておく。

今、 α をパラメーターに選び式(11)を図示すると図5となる。

7. 結 言

(1) 以上のごとく比較的簡単なモデルを設定し、保全を含む系の故障率と Availability を時間の関数として誘導した。

(2) この他に任意の時刻までの累積故障回数や機器の故障率等を必要に応じて誘導すること

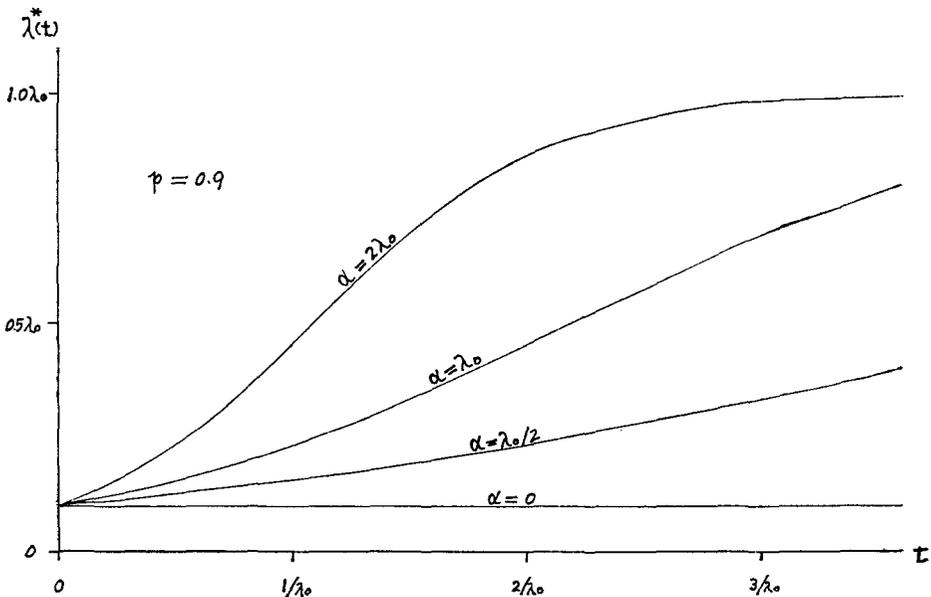


図5 系の故障率 $\lambda^*(t)$

は容易である。

(3) 本モデルの設定にあたり解析の容易さを考慮して修理時間を無視し、また修理の都度増加する劣化量 α を一定と仮定したが、これらの点について拡張の余地があると思われる。

(4) 実際の応用に際し、摩耗故障との結合影響を考える必要があると思われる。

(5) 本モデルの Applicability について、実測データによる検討を必要とするが、十分な

データーを入手できなかった。

終りに、本研究にあたり御指導をいただいた東京計器川崎義人技術本部長ならびに早大生産研究所高橋磐郎先生に深甚なる謝意を表するとともに終始御激励をいただいた東京計器特機部松為啓進部長ならびに瀬谷浩課長に深く謝意を表する。

参 考 文 献

1. I. Bazousky, "Reliability Theory and Practice", Prentice Hall Inc.
2. 城憲三, "応用数学解析", 日刊工業新聞社
3. 川崎義人, "修理系の確率模型(系のデバッキング過程)" 電気通信学会「信頼性・品質管理研究会」資料
4. 小林幹雄, "数学要項集", 共立全書
5. M. Boll, "万能数値表", 白水社
6. 宮脇一男, 長岡崇雄, 毛利悦造, "待ち合せ理論とその応用", 日刊工業新聞社
7. 同編集委員会, "信頼性管理便覧", 日刊工業新聞社