

道路交通における信号制御の解析†

— 一 交 差 点 の 場 合 —

梅 沢 千 鶴 子*
高 橋 昭*

1. ま え が き

比較的混んだ幹線道路または都市の主要道路などの交通信号を系統的に制御するとき、信号位相を適当に与えれば、より効率のよい車の交通規制が実現できるであろう。本研究では、交通信号制御に関する解析の基礎段階として、一交差点の主要道路方向についてある数学モデルを設定し、上り、下りともに高々二つのプラトーン（車群）が進入してくる場合（図1）の一信号周期

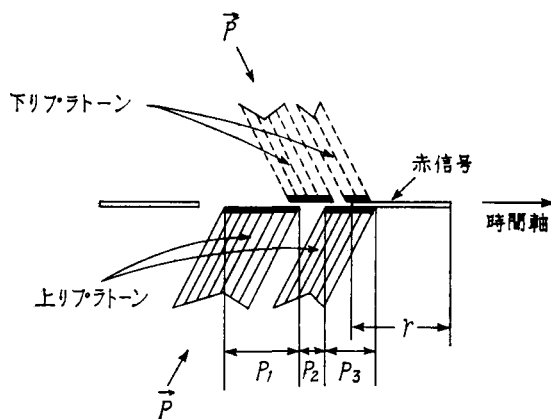


図1 一交差点における主要道路方向プラトーンの仮想的到着時間関係

あたり総待時間を最小にするような、最適信号位相の決定法を明らかにしようとした。以下はこれについての報告である。この特別な場合として、上り、下りともにプラトーンが一つの場合は、方法論にとどまらず、最適信号位相が求められたので、付記する。なお、ここでいう信号位相とは従来の意味でのオフセットとは異なり、第1プラトーンの前頭車が交差点に達した時刻から、“つき”の赤信号の開始時刻までの時間を意味している。

解析するにあたっては、以下の仮定を設ける。

1. 車は停止するか、一定速度で走行しているかのいずれかである。
2. 各車は互に等間隔（同一プラトーン内で）、等速で走行する。

† 1967年6月23日受理

* 工業技術院機械試験所

3. 信号は青信号と赤信号とから成る.

さらに解析を容易にするために, 考察範囲をつぎのように限定した.

- a 車の流れは信号と同じ周期性をもつこと.
- b プラトーンは一信号周期内高々二つであること.

よって以下は一信号周期内の考察である. また, 使用するおもな記号は下記のとおりである. ただし, 信号の一周期を時間の単位にとっている.

p_1 : 第1プラトーン(任意に着目したプラトーン)の同一地点を通過するのに要する時間幅

p_3 : 第1プラトーンの前頭車から一信号周期経過前に現われるもう一つのプラトーンの間隔

p_2 : 第2プラトーンが存在するならば, 第1プラトーンの前頭車から第2プラトーンの前頭車までの時間間隔. 第2プラトーンが存在しないならば, 零とみなす.

$\vec{p} \equiv (p_1, p_2, p_3)$: 一信号周期内のプラトーンを表わすベクトル.

x : 信号位相. 第1プラトーンの前頭車が交差点に到着した時刻から, つぎの赤信号の開始時までの時間.

$w(x, \vec{p}), w_i(x, \vec{p})$: 一方向の一信号周期内の総待時間関数. ただし, i は分類パターン(後述)の番号である.

(注: 上記の各記号は任意の一方向に対するものであるが, その方向を便宜上上りとみなすときは, 右肩に'をつけて下りの場合を表わすものとする.)

r : 赤信号時間

θ : 上りと下りの信号位相の差 (図3参照)

$W(\cdot)$: 上りと下りの総待時間の和.

x^0 : 最適信号位相

なお, 前述の限定条件と記号の定義によりつぎの諸関係が成り立っている. 下りに対しても同様である.

$$0 < r < 1$$

$$0 \leq x, \theta < 1$$

$$0 < p_1$$

$$0 \leq p_2, p_3$$

$$p_1 + p_3 \leq 1 - r$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i < 1$$

2. 一方向における時間関係の分類と総待時間

以上の仮定と条件のもとで主要道路の一方向, ここでは上りについて, 交差点にプラトーンが二つ任意に進んできた場合の総待時間がどうなるかを調べてみよう. 一信号周期内だけ考えれ

ば十分であることはもちろんである。図1は、上り、下りそれぞれ任意の二つのプラトーンが仮に赤信号を無視したときに交差点に現われるであろう信号に対する仮想的時間関係を示したものであったが、下りについての考察は上りと同様なので省略する。そこで上りについて、プラトーン・ベクトルと信号について起こりうるすべての時間関係を、便宜上信号位相順にずらしながら分類配列したのが図2である。すなわち、横軸に時間をとり、一周期の幅をもった補助平行線を

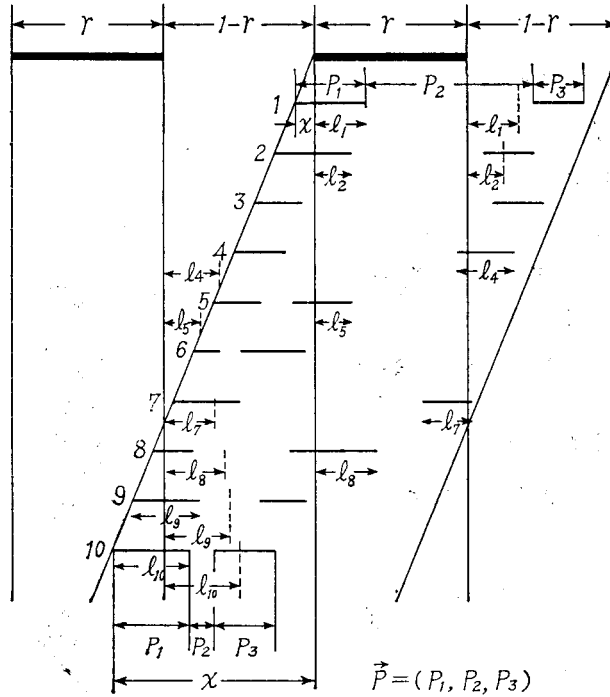


図2 プラトーンと信号の時間関係の分類パターン

右上から左下に斜めに描いて、その周期内に着目交差点へプラトーンが二つ現われるすべての時間関係を表現した。その結果、10通りの分類パターンが得られた。図では分類パターン1と10に対して信号位相とプラトーン・ベクトルの成分が例示されている。総待時間関数を導き出す前に、この分類パターンの分類基準について述べよう。第1プラトーンの前頭車が青信号中に交差点に到着し、後部の車が赤信号にかかり信号待ちして通過していくとき、つぎの青信号中に到着する第2プラトーンに影響を及ぼさない場合を分類パターン1とし、影響を及ぼす場合を2とする。第1プラトーン、第2プラトーンともに青信号中に到着するもののうち、それぞれのプラトーンが異なる青信号中に到着する場合を3、同一の青信号中に到着する場合を6とする。第1プラトーンが青信号中に到着し、前周期の第2プラトーンの影響を受けない場合で、かつ、その周期の第2プラトーンの前頭車について、赤信号中に到着する場合を4、青信号中に到着し後部の車が赤信号にかかる場合を5とする。第1プラトーンの前頭車は任意の時刻に到着してよいが、前周期の第2プラトーンの影響を受け、かつ、その周期の第2プラトーンの前頭車について、赤

信号中に到着する場合を7, 青信号中に到着し後部の車が赤信号にかかる場合を8とする. 第1プラトーンの前頭車が赤信号中に到着し, かつ, 第2プラトーンが青信号中に到着する場合のうち, 第1プラトーンが第2プラトーンに影響を及ぼさない場合を9とし, 影響を及ぼす場合を10とする. 前述の分類基準によって各分類パターンの成立条件を列挙すると下記のようになる.

1. $x < 1-r, p_1-x > 0,$
 $p_1+p_2-x > p_1+r-x$
2. $x < 1-r, p_1-x > 0,$
 $p_1+p_2-x \leq p_1+r-x$
3. $x < 1-r, p_1-x \leq 0,$
 $p_1+p_2-x > r$
4. $x < 1-r, p_1-x \leq 0,$
 $0 < p_1+p_2-x \leq r, p_3 < 1-r-x$
5. $x < 1-r, p_1+p_2-x \leq 0,$
 $\sum_{i=1}^3 p_i-x > 0, \sum_{i=1}^3 p_i-x < 1-r-x$
6. $x < 1-r, \sum_{i=1}^3 p_i-x \leq 0$
7. $p_1-x \leq 0, 0 < p_1+p_2-x \leq r$
 $p_3 \geq 1-r-x$
8. $p_1+p_2-x \leq 0, \sum_{i=1}^3 p_i-x > 0,$
 $\sum_{i=1}^3 p_i-x \geq 1-r-x$
9. $1 > x \geq 1-r, \sum_{i=1}^3 p_i-x \leq 0,$
 $p_1 < p_1+p_2-\{x-(1-r)\}$
10. $1 > x \geq 1-r, \sum_{i=1}^3 p_i-x \leq 0,$
 $p_1 \geq p_1+p_2-\{x-(1-r)\}$

まえがきの終わりに述べた諸関係を考慮しながら以上の条件をまとめると, 結局つぎのようになる.

1. $0 \leq x < p_1, p_2 > r$
2. $0 \leq x < p_1, p_2 \leq r$
3. $p_1 \leq x < p_1+p_2-r$
4. $\max(p_1, p_1+p_2-r) \leq x < \min(p_1+p_2, 1-r-p_3)$
5. $p_1+p_2 \leq x < \sum_{i=1}^3 p_i < 1-r$
6. $\sum_{i=1}^3 p_i \leq x < 1-r$

7. $1-r-p_3 \leq x < p_1+p_2$
8. $p_1+p_2 \leq x < \sum_{i=1}^3 p_i, \sum_{i=1}^3 p_i \geq 1-r$
9. $\max(1-r, \sum_{i=1}^3 p_i) \leq x < \min(1-r+p_3, 1)$
10. $1-r+p_2 \leq x < 1$

さて、つぎに上記の条件をみたす各分類パターンに対応する総待時間関数を求めるのであるが¹⁾、その導き方を2, 3の例について説明しよう。分類パターン1の場合、第1プラトーンの後部の赤信号にかかる車の台数 $l_1 = p_1 - x$ (仮定2により、 l_1 に比例するが、比例定数は無視してもさしつかえないので略して考える) だけが、各車とも赤信号時間 r だけ待たされるから、総待時間 w_1 は $r(p_1 - x)$ となる。分類パターン2の場合、第1プラトーンの後部の赤信号にかかる車 $l_2 = p_1 - x$ の各車が赤信号時間 r だけ待たされるからその待時間は $r(p_1 - x)$ であり、第2プラトーンのすべての車 p_3 に対しては、そのプラトーンの前頭車が交差点に到着した時点から第1プラトーンの後部の車が通過し終わる破線の時点までの時間幅、すなわち $\{p_1 + r - (p_1 + p_2)\}$ だけ一様に待たされるから、その待時間は $\{p_1 + r - (p_1 + p_2)\}p_3$ である。したがって、総待時間 w_2 は $r(p_1 - x) + \{p_1 + r - (p_1 + p_2)\}p_3 = -rx + r(p_1 + p_3) - p_2p_3$ である。分類パターン7の場合、第2プラトーンのすべての車 p_3 はその先頭車が交差点に到着した時点から赤信号が終わるまでの時間幅 $\{x + r - (p_1 + p_2)\}$ だけ待たされるから待時間は $\{x + r - (p_1 + p_2)\}p_3$ であり、他方第1プラトーンの前頭車は前周期の第2プラトーンの影響を受けてそれらが交差点を通過し終えるまで、すなわち破線の時点まで $\{p_3 - (1 - r - x)\}$ だけ待たされるから、第1プラトーン全体の待時間は $\{p_3 - (1 - r - x)\}p_1$ である。したがって総待時間 w_7 は $\{p_3 - (1 - r - x)\}p_1 + \{x + r - (p_1 + p_2)\}p_3 = (p_1 + p_3)x + r(p_1 + p_3) - (p_1 + p_2)p_3$ となる。その他の場合に対しても同じようにして導くと下記のようになり、すべて信号位相 x の一次式となっていることがわかる。

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -rx + rp_1 \\
 w_2 &= -rx + r(p_1 + p_3) - p_2p_3 \\
 w_3 &= 0 \\
 w_4 &= p_3x + p_3(r - p_1 - p_2) \\
 w_5 &= -rx + r \sum_{i=1}^3 p_i \\
 w_6 &= 0 \\
 w_7 &= (p_1 + p_3)x + r(p_1 + p_3) - (p_1 + p_2)p_3 \\
 w_8 &= -rx + r(p_1 + \sum_{i=1}^3 p_i) - p_1(1 - \sum_{i=1}^3 p_i)
 \end{aligned}$$

1) 車の流れに対し与えた周期性の条件下にも、流れの初期条件によっては一周期を越える渋滞車が起り得るが、最適信号位相を求める観点からすればどの車の待時間も一周期以下であるとしてさしつかえないので、この考え方で以下の総待時間関数は求められている

$$w_9 = p_1 x - p_1(1-r)$$

$$w_{10} = (p_1 + p_3)x - (p_1 + p_3)(1-r) - p_2 p_3$$

3. 信号位相の増加に対する一方向分類パターンの変化

信号位相 x を 0 から 1 まで連続的に変えると、当然プラトーンと信号の間の時間関係も変わっていく。すなわち、前述の分類パターンの変化のし方を前節の結果から x の大きさの順に調べると、つぎの 4 通りの場合があることがわかる。

(x の範囲), (分類パターンの番号)

1) $p_2 \leq r, \sum_{i=1}^3 p_i < 1-r$ の場合

$$[0, p_1) \quad , \quad 2$$

$$[p_1, p_1 + p_2) \quad , \quad 4$$

$$[p_1 + p_2, \sum_{i=1}^3 p_i) \quad , \quad 5$$

$$[\sum_{i=1}^3 p_i, 1-r) \quad , \quad 6$$

$$[1-r, 1-r + p_2), \quad 9$$

$$[1-r + p_2, 1) \quad , \quad 10$$

2) $p_2 \leq r, \sum_{i=1}^3 p_i \geq 1-r$ の場合

$$[0, p_1) \quad , \quad 2$$

$$[p_1, 1-r - p_3) \quad , \quad 4$$

$$[1-r - p_3, p_1 + p_2), \quad 7$$

$$[p_1 + p_2, \sum_{i=1}^3 p_i) \quad , \quad 8$$

$$[\sum_{i=1}^3 p_i, 1-r + p_2), \quad 9$$

$$[1-r + p_2, 1) \quad , \quad 10$$

3) $p_2 > r, \sum_{i=1}^3 p_i < 1-r$ の場合

$$[0, p_1) \quad , \quad 1$$

$$[p_1, p_1 + p_2 - r) \quad , \quad 3$$

$$[p_1 + p_2 - r, p_1 + p_2), \quad 4$$

$$[p_1 + p_2, \sum_{i=1}^3 p_i) \quad , \quad 5$$

$$[\sum_{i=1}^3 p_i, 1-r) \quad , \quad 6$$

$$[1-r, 1) \quad , \quad 9$$

4) $p_2 > r, \sum_{i=1}^3 p_i \geq 1-r$ の場合

$$[0, p_1) \quad , \quad 1$$

$$\begin{aligned}
 & [p_1, p_1+p_2-r), & 3 \\
 & [p_1+p_2-r, 1-r-p_3), & 4 \\
 & [1-r-p_3, p_1+p_2), & 7 \\
 & [p_1+p_2, \sum_{i=1}^3 p_i), & 8 \\
 & [\sum_{i=1}^3 p_i, 1), & 9
 \end{aligned}$$

4. 信号位相の最適化

以上、一方向について考察してきたが、上り、下り両方向についての総待時間の和 $W(x)$ を最小にするような、すべての信号位相を見出すことが目的である。ところで上りと下りの信号位相の差、すなわち上りの第1プラトーン先頭車が交差点に到着してから下りのそれがはじめて到着するまでの時間を θ とすれば、下りの信号位相 $x' \in [0, 1)$ はつぎの式で表わされる (図3参照)

$$x' \equiv x - \theta \pmod{1}$$

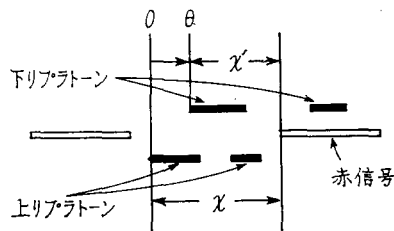


図3 上りと下りの信号位相のずれ

他方、上り、下りの総待時間をそれぞれ $w(x; \vec{p})$, $w(x'; \vec{p}')$ とすれば、これまでの考察は下りに対しても同様であるから、 $w'(x'; \vec{p}') = w(x'; \vec{p}')$ である。よって、結局、

$$\min_{x \in [0, 1)} W(x) = \min_{x \in [0, 1)} \{w(x; \vec{p}) + w(x'; \vec{p}')\}$$

からすべての最適信号位相 x^0 を求めることになる。信号位相の増加に対する分類パターンの変化、すなわち総待時間関数の変化のし方は、上りと下りそれぞれについて4通りの場合があるから、全部で16通りの場合が考えられる。さらに $\min_{x \in [0, 1)} W(x)$ の実行の際には、 x' を介して θ の値も下りの総待時間関数のどれを選ぶかに影響することを考慮しなければならない。いずれにせよ、最終的にはパラメータ間の相互関係によって、すべての最適信号位相 x^0 を上記の方法から求めることが可能である。特に、過去の調査または経験からパラメータの値が一部既知であればこれを実行することも容易であろう。しかし、上述の一般的な形ですべての最適信号位相を見出すことにはかなりの作業が伴い、必ずしも容易なことではない。そこで、一信号周期内に高々二つのプラトーンが到着する場合に対する最適信号位相の決定については、上述の方法を明らかにした段階にとどめ、特別な場合として、上り、下りのプラトーンがそれぞれ一つの場合、すなわ

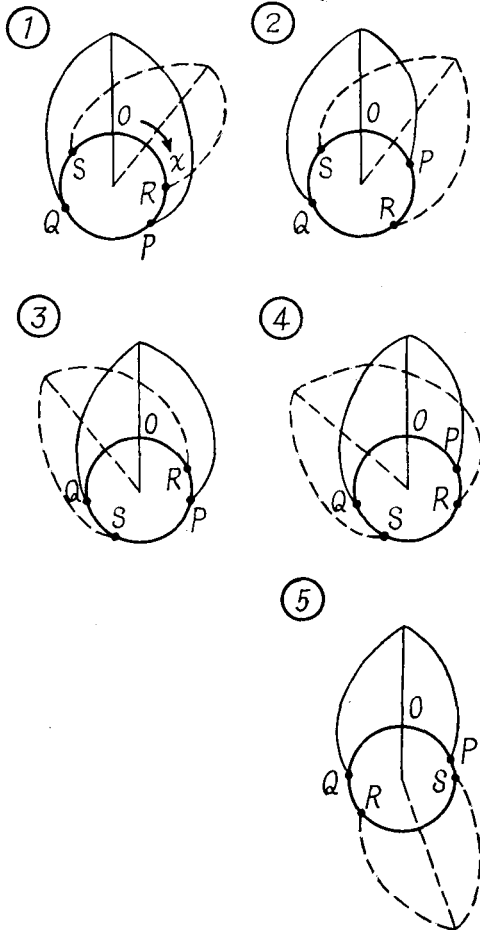
ち、 $\vec{p}=(p_1, 0, 0)$, $\vec{p}'=(p'_1, 0, 0)$ の場合の最適化問題を以下考察することにする。

5. 上り, 下りともにプラトーンが一つの場合の信号位相の最適化

この場合は $p_2=p_3=p'_2=p'_3=0$ であるから, 信号位相 x を 0 から 1 まで連続的に動かした場合, 3. で述べた分類パターンの変化の仕方として 1) の場合, および 2) において $\sum_{i=1}^3 p_i (=p_1) = 1-r$ が成り立つ場合だけが現われる。それらの場合を以下のようにまとめて表わすことができる。以後 p_1, p'_1 を単にそれぞれ p, p' ($0 < p, p' \leq 1-r$) と書くことにする。

x の増加に対する一方向分類パターンの変化

(x の範囲)	,	(分類パターンの番号)
$[0, p)$,	2
$[p, 1-r)$,	6
$[1-r, 1)$,	10



これら各分類パターンに対応する上りの総待時間は次式となる。

$$w_2 = -rx + rp$$

$$w_6 = 0$$

$$w_{10} = px - (1-r)p$$

下りについても同様である。

さて, 任意の定数 r, θ, p, p' に対し $W(x)$ を最小にする信号位相 x を求めるのに, 便宜上, $W(x)$ が 0 と正の各場合にわけて議論を進める。

5.1 $W(x)$ が零となる場合

$W(x)$ は区分的に x の一次式となることおよび x の考察範囲が一周区間 $[0, 1)$ であることから, 図 4 に示すように, 信号位相 x を右回転の向きをもつ長さ 1 の円周上に (その任意の点を原点として) 対応させ, その対応点から放射方向に上りおよび下りの総待時間をそれぞれ実線および破線で表わした。上りに対して, $x=p$ および $x=1-r$ に対応する円周上の位置を同順に P, Q で示した。下りに対しては, $x \equiv \theta + p' \pmod{1}$ および $x \equiv \theta - r$

図 4 信号位相と総待時間との関係
(上りと下りの総待時間の和が零となるような信号位相が存在する場合)

(mod 1) に対応するそれらを同順に R, S で示した. これら各点に逆に対応する x の値を, たとえば Q に対しては $x(Q)$, などと表わすことにする. $W(x)=0$ の場合は, 図4に示すように最適信号位相区間の表現が異なる場合として5通りの場合が考えられる. それらの各場合に対応する以下の条件を満足するならば, すべての最適信号位相 x^0 は右側に記した x の部分区間の任意の値であることが容易にわかる.

- ① $\left. \begin{array}{l} p \geq \theta + p' \\ \theta + 1 - r \geq 1 - r \end{array} \right\}$ ならば $[x(P), x(Q)]$
- ② $\left. \begin{array}{l} p \leq \theta + p' < 1 - r \\ 1 - r \leq \theta - r + 1 < p + 1 \end{array} \right\}$ ならば $[x(R), x(Q)]$
- ③ $\left. \begin{array}{l} p \leq \theta - r < 1 - r \\ 1 - r < \theta + p' \leq p + 1 \end{array} \right\}$ ならば $[x(P), x(S)]$
- ④ $\left. \begin{array}{l} \theta + p' - 1 \geq p \\ \theta - r \leq 1 - r \end{array} \right\}$ ならば $[x(R), x(S)]$
- ⑤ $\left. \begin{array}{l} p \leq \theta - r \\ \theta + p' \leq 1 - r \end{array} \right\}$ ならば $[x(P), x(S)] \cup [x(R), x(Q)]$

以上をまとめると最適信号位相の区間は以下ようになる.

- ① $\theta \leq p - p'$ ならば $[x(P), x(Q)]$

表1 一信号周期内プラトーンが一つのときの最適信号位相 ($W(x)=0$ の場合)
(ただし, 最適信号位相の欄内の()は1を法とする mod をとることを意味する)

パラメータ間の相互関係		θ の 区 間	最 適 信 号 位 相
$1 - r - p' \leq r + p$	$p' \leq p$	$[0, p - p']$	$[p, 1 - r]$
		$[p - p', 1 - r - p']$	$[(\theta + p'), 1 - r]$
		$[r + p, 1]$	$[p, (\theta - r)]$
	$p' > p$	$[0, 1 - r - p']$	$[(\theta + p'), 1 - r]$
		$[r + p, p - p' + 1]$	$[p, (\theta - r)]$
		$[p - p' + 1, 1]$	$[(\theta + p'), (\theta - r)]$
$1 - r - p' > r + p$	$p' \leq p$	$[0, p - p']$	$[p, 1 - r]$
		$[p - p', r + p]$	$[(\theta + p'), 1 - r]$
		$[r + p, 1 - r - p']$	$[p, (\theta - r)], [(\theta + p'), 1 - r]$
		$[1 - r - p', 1]$	$[p, (\theta - r)]$
	$p' > p$	$[0, r + p]$	$[(\theta + p'), 1 - r]$
		$[r + p, 1 - r - p']$	$[p, (\theta - r)], [(\theta + p'), 1 - r]$
		$[1 - r - p', p - p' + 1]$	$[p, (\theta - r)]$
		$[p - p' + 1, 1]$	$[(\theta + p'), (\theta - r)]$

- ② $p-p' \leq \theta \leq 1-r-p'$
かつ $\theta < r+p$ ならば $[x(R), x(Q)]$
- ③ $r+p \leq \theta \leq p-p'+1$
かつ $1-r-p' < \theta$ ならば $[x(p), x(S)]$
- ④ $p-p'+1 \leq \theta$ ならば $[x(R), x(S)]$
- ⑤ $r+p \leq \theta \leq 1-r-p'$ ならば $[x(P), x(S)] \cup [x(R), x(Q)]$

これをパラメータの相互関係によって分類したのが表1である。

5.2 $W(x)$ が正となる場合

これは上りの総待時間と下りのそれとが同時に0になるような信号位相が存在しない場合である。そのための条件は、5.1の①~⑤のいずれにも属さない場合であるから、

(1) $1-r-p' < \theta < r+p$

となる。簡単のため、 $p, p' < 1-r$ を満足する場合に限定して、以下の考察を進めることにす

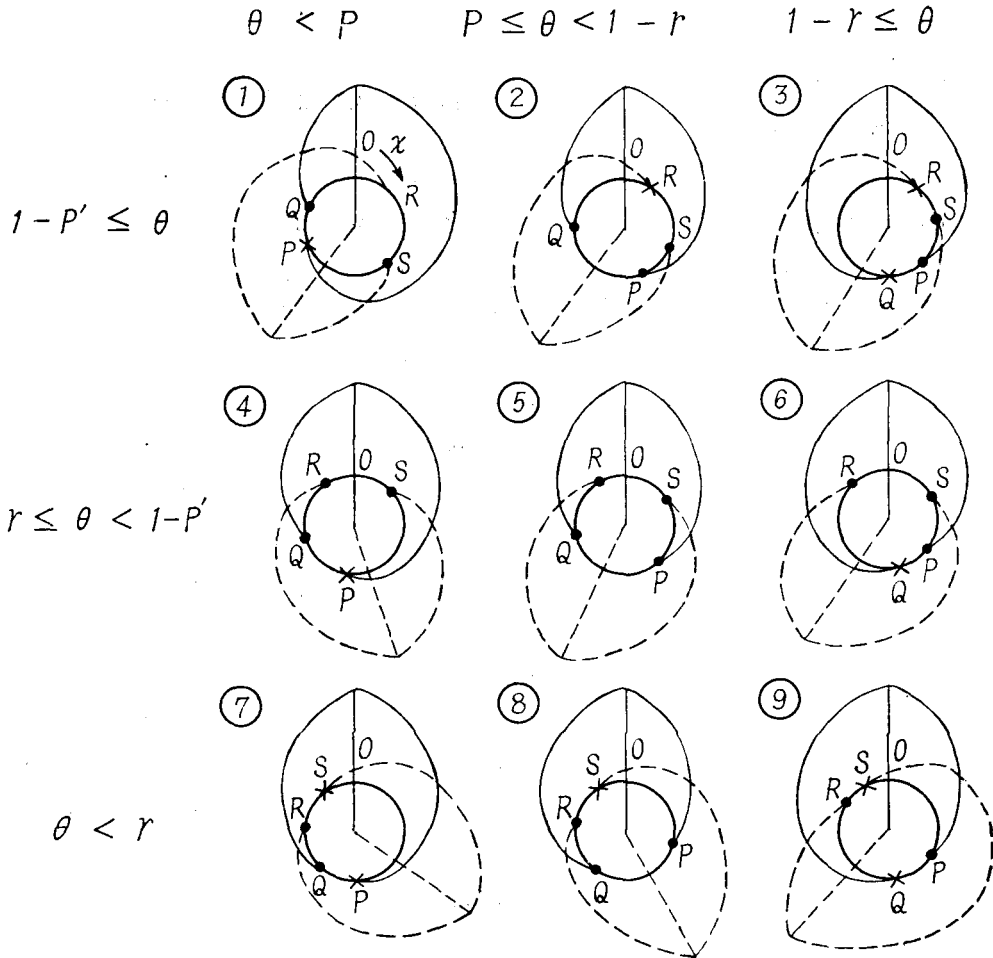


図5 信号位相と総待時間との関係
(上りと下りの総待時間の和が零となるような信号位相が存在しない場合)

る。そこで、 $W(x)$ の区間的単調性から対応円周上の点 P, Q, R, S の最適性を調べればよい。これらの点の相互関係によって $W(x) > 0$ の場合を分類すると図 5 に示した 9 通りの場合が考えられる。それら 4 点のうち最適信号位相に対応しえない点を \times 印で示し、他は \cdot 印で示した。これらは総待時間関数において、その区間的単調性および $r, p, p' > 0$ を考慮すれば明らかである。これらの予備的なチェックから、 P, Q, R, S それぞれが最適信号位相に対応する点となるための必要条件がつぎのように表わされる。

$$(2) \begin{cases} \theta \geq p & : P \\ \theta \leq 1-r & : Q \\ \theta + p' \leq 1 \text{ (または } \theta \leq 1-p') & : R \\ \theta + 1-r \geq 1 \text{ (または } \theta \geq r) & : S \end{cases}$$

P, Q, R, S における上りと下りの総待時間関数の和を $W(P), W(Q), W(R), W(S)$ で表わすと、これらの式は 5 に記された w_2, w_6, w_{10} の式およびそれらに対応する下りの式から求めることができ、下記のようになる。

$$\begin{aligned} W(P) &= r(\theta + p' - p) - (r + p')\varphi(\theta - p) \\ W(Q) &= r(\theta + p' - (1-r)) - (r + p')\varphi(\theta - (1-r)) \\ W(R) &= r(p + 1 - p' - \theta) - (r + p)\varphi(1 - p' - \theta) \\ W(S) &= r(p + r - \theta) - (r + p)\varphi(r - \theta) \end{aligned}$$

ただし、

$$\varphi(x) = \begin{cases} x(x > 0) \\ 0(x \leq 0) \end{cases}$$

とする。

さて、 P, Q, R, S の各点がそれぞれ最適信号位相となるための必要十分条件を求めよう。 P に対しては、 $W(P) \leq W(Q), W(R), W(S)$ が必要十分条件であるから、まず $W(P) \leq W(Q)$ より

$$(r + p')\{\varphi(\theta - p) - \varphi(\theta - (1-r))\} \geq r(1-r-p)$$

(2) の $\theta \geq p$ の条件を考慮して

$$\theta - h \geq \varphi(\theta - (1-r))$$

すなわち、

$$\theta \geq h, \quad h = \frac{p p' + r(1-r)}{r + p'}$$

となる。また、 $W(P) \leq W(R), W(S)$ より

$$\begin{cases} (r + p')\varphi(\theta - p) - (r + p)\varphi(1 - p' - \theta) \geq r(2\theta + 2p' - 2p - 1) \\ (r + p')\varphi(\theta - p) - (r + p)\varphi(r - \theta) \geq r(2\theta + p' - r - 2p) \end{cases}$$

(2) の $\theta \geq p$ の条件から

$$\begin{cases} (p'-r)(\theta-p)+r(1-2p') \geq (r+p)\varphi(1-p'-\theta) \\ (p'-r)(\theta-p-r) \geq (r+p)\varphi(r-\theta) \end{cases}$$

第2式より, まず条件

$$p' \leq r$$

が必要である. また, 上の二つの式は

$$1-p' \leq \theta \text{ ならば}$$

$$(p'-r)(\theta-p) \geq r \left(p' - \left\{ \begin{matrix} (1-p') \\ r \end{matrix} \right\} \right)$$

さらに, $p' < 1-r$ であるから

$$(p'-r)(\theta-p-r) \geq 0$$

に同等である. これと(1)から $p' \leq r$ は P が最適となるための十分条件でもある.

$$r \leq \theta < 1-p' \text{ ならば}$$

$$(p+p')\theta \geq (1-r)P + rp'$$

i. e.

$$\theta \geq f, \quad f = \frac{p'r + p(1-r)}{p+p'}$$

$$\theta < r \text{ ならば}$$

$$\begin{cases} \theta \geq f \\ \theta \geq f - \frac{p}{p+p'}(1-r-p') \end{cases}$$

i. e. $\theta \geq f$

ところで, $1-p' \leq \theta$ かつ $p' \leq r$ ならば, $\theta \geq f$ である.

結局, $W(P) \leq W(Q)$ の条件は $\theta \geq h$ に, また $W(P) \leq W(R)$, $W(S)$ の条件は $p' \leq r$ かつ $\theta \geq f$ に同等であることが条件(1), (2)のもとに導かれた. ところで, $\theta \geq h$ ならば(2)がみたされる. よって(1)の条件のもとに,

$$p' \leq r \text{ かつ } \theta \geq \max(f, h) = \begin{cases} f & \text{if } p' \leq r \\ h & \text{if } p' \geq r \end{cases}$$

が, P が最適信号位相となるための必要十分条件であることがわかる.

Q, R, S それぞれが最適信号位相点となるための必要十分条件は, P に対して求めたと同様な方法で導けばよい. その結果を下に記す.

(1)の条件のもとに

$$P: p' \leq r \text{ かつ } \theta \geq \begin{cases} f & \text{if } p' \leq r \\ h & \text{if } p' \geq r \end{cases}$$

$$Q: p' \geq r \text{ かつ } \theta \geq \begin{cases} g & \text{if } p' \leq r \\ i & \text{if } p' \geq r \end{cases}$$

$$R: p \leq r \text{ かつ } \theta \leq \begin{cases} f & \text{if } p' \leq r \\ g & \text{if } p' \geq r \end{cases}$$

$$S: p \geq r \text{ かつ } \theta \leq \begin{cases} h & \text{if } p' \leq r \\ i & \text{if } p' \geq r \end{cases}$$

ただし,

$$g = \frac{r^2 + p(1-p')}{r+p}, \quad i = \frac{1-p'+p}{2}$$

なお, ここで注意すべきことは, ある与えられたパラメータに対し, P と S あるいは Q と R が同時に最適点になる場合の最適信号位相は, 区間 $[x(S), x(P)]$, あるいは $[x(Q), x(R)]$ 内の任意の値であるということである. これは, 総待時間関数が x の一次式であることなどから明らかである. 上記の結果から, すべての最適信号位相をパラメータの相互関係によって調べ易い形に分類したのが表 2 である.

表 2 一信号周期内プラトーンが一つのときの最適信号位相 ($W(x) \neq 0$ の場合)
(ただし, 最適信号位相の欄内の () は 1 を法とする mod をとることを意味する)

パラメータ間の相互関係			θ の 区 間	最 適 信 号 位 相
1-r-p' < r+p	p < r	p' < r	[1-r-p', f]	($\theta+p'$)
			[f, r+p]	p
		p' = r	[1-r-p', f]	($\theta+p'$)
			[f, r+p]	[($\theta-r$), p]
		p' > r	[1-r-p', g]	($\theta+p'$)
			[g, r+p]	($\theta-r$)
	p = r	p' < r	[1-r-p', f]	[1-r, ($\theta+p'$)]
			[f, r+p]	p
		p' = r	[1-r-p', f]	[1-r, ($\theta+p'$)]
			[f, r+p]	[($\theta-r$), p]
		p' > r	[1-r-p', g]	[1-r, ($\theta+p'$)]
			[g, r+p]	($\theta-r$)
	p > r	p' < r	[1-r-p', h]	1-r
			[h, r+p]	p
		p' = r	[1-r-p', h]	1-r
[h, r+p]			[($\theta-r$), p]	
p' > r		[1-r-p', i]	1-r	
		[i, r+p]	($\theta-r$)	

ただし,

$$f = \frac{p'r + p(1-r)}{p+p'}, \quad g = \frac{r^2 + p(1-p')}{r+p}, \quad h = \frac{pp' + r(1-r)}{r+p}, \quad i = \frac{1-p'+p}{2}$$

6. ま と め

一交差点において、上りと下りのプラトーンが高々二つの場合、総待時間の和を最小にする最適信号位相の決定法が求められた。また特別な場合として、上り、下りともにプラトーンが一つの場合は、単に決定法にとどまらず、パラメータ（赤信号時間、上りと下りのプラトーン、上りと下りの信号位相のずれ）の相互関係によって分類されたおのおのの範囲でのすべての最適信号位相が得られた。

以上の解析は一交差点に対してはかなり一般的であると思われるが、二つ以上の交差点を含む道路区間に対してこの結果を適用する際には、かなり大胆な仮定を設けなければ、解析が困難になるのではないかと思う。また広域にわたる道路網に適用する場合も同様のことがいえる。いずれの場合に対しても、ここで得られた結果を拡張できるようにすることが今後に残された課題である。