経営科学 第11巻 第3・4号（1968年6月）

Hamaker の在庫量問題について†

小田中 敏男*

1. 緒言

この研究は在庫量管理問題の1つの型と考えられるハマッカーの行なった貯水容量決定問題と貯水池運用問題をある確率基準による在庫量管理の方法によって，理論的に再検討をしようとするのが目的である．

ハマッカーの行なった，オランダのフィリップス社アインドホーバン工場における水消費と貯水容量の分析方法は次のようである[1]．水供給装置に十分な貯水能力がないと，水こし器が常に稼動しているので，水の化学的清浄に好ましくない．よって貯蔵能力を大きくしてトラブルをなくすべきである．貯蔵能力をどの位の大きさにするのかを分析して決定するには，次の3つのファクターが問題となる．

1) 消費の見積りにおける過誤，
2) 生の水の供給によってコントロールされる離散的段階での大きさ，
3) 消費における期間の採択，

研究所へ引き渡す水の量は時間毎に観測されている．1日24時間の消費は前日の消費と同じであると仮定する．また便宜上1日は朝8時から始まるとする．平日の朝8時から夕方17時までの9時間を高消費期間とすると，昼（高消費期間）の平均消費は1765m^2/hour であり，夜の平均消費は1330m^3/hour である．これから1日の平均消費は 1493m^3/hour である．昼の過剰消費は2448m^3 で夜にはこれと等しい不足消費がある．

次に1時間当りの見込み供給量は

{(過去の24時間の平均使用量)－(過剰貯水量)÷24}

で，この値を50m^3/hour の単位でまとめる．よって1日の過剰貯水量は

{(1時間当り消費量)－(1時間当り見込み供給量)}×24

で，この値は明日の初期在庫量となる．このような方法で過剰貯水量を140日間観測すると，(－)2100m^3 と(＋)2700m^3 の間を上下するので，これに耐えうるために4800m^3 の貯水能力が必要となる．

以上の分析から2つの主な結果を得た．これから必要な貯蔵能力を決定する．

---

† 1967年4月13日受理
* 都立工業短期大学

① 昼間と夜間の使用量の差による周期的な変動

② 24時間についての見積り平均消費のランダムエラー

①から昼の過剰貯水量2500m^3 の貯蔵能力が要求される．②から4800m^3 の貯蔵能力が要求される．しかしこれら2つの数字の合計は実際に必要な能力以上に見積っていると考えられるので，各時々の貯蔵タンクの水の量を計算してみた．この数値実験の結果から，もし消費の予測にエラーが起ると，それが24時間にわたるので1日1回だけストックをチェックするシングルチェックより正午と真夜中に2回貯水量をチェックするダブルチェックの方が良いことが分る．

以上から3400m^3 の現有設備に3500m^3 のタンクを加えて6900m^3 に能力をあげることとなったとハマッカーは報告している．

このハマッカーの方法は次の3つの問題点がある．

1) 決定する基準で明確でない，

2) 最適政策の根拠が明らかにされていない，

3) 経済的な考察がない．

この問題1)，2)を解決するために2で述べる確率基準による在庫量管理の方法で考察してみた．

確率基準による在庫量管理は従来の在庫量管理のように費用を中心として考えることが不可能な場合でかつ周期的な在庫方式を採っている場合に用いられる．

確率基準としては，次のように考えた．全期間を通じて

① 在庫量が増大して管理上限Aを越える場合の確率，

② 在庫量が減少して管理下限B以下になる場合の確率．

これらの確率を最小にするような供給量を決定することである．離散的に考えて，ダイナミック・プログラミングの公式を使用して解くことができる．

発注と同時に供給されるものとして，我々の得られた供給量 z の最適政策は次のような発注方式である．

$$
\begin{aligned}
Z &= \bar{x} - c \qquad c < \bar{x} \quad \text{の場合} \\
&= c - \bar{x} \qquad c > \bar{x} \quad \text{の場合}
\end{aligned}
$$

ここに $\bar{x}$ はある最適在庫水準である．

そこで問題は在庫水準 $\bar{x}$ とその限界 A と限界 B とをいかに定めたらよいかということになる．そしてこれらの管理限界や最適水準と，各期の期首在庫量とによって，管理の操作方式が決定されるのである．

この確率基準の方法によって1)，2)の問題点はある程度解決され，ハマッカーの方法に理論的な根拠を与えることができた．

2. 確率基準による在庫量管理

2.1 調節限界A，Bの設定法

我々の理論によれば調節上限と調節下限とを先ず設定することが必要である．この段階では現象を全く確率的に考えることにする．

今 n 期間を1週期として，毎期毎期の状態変数 (state variable) としての初期在庫量，確率変数(random variable) としての需要量，制御関数 (control function) としての供給量をそれぞれ

$$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n\,;$$

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\cdots,\ Y_n\,;$$

$$Z_1,\ Z_2,\ \cdots\cdots,\ Z_n\,;$$

とする．初期状態変数を c とし，簡単のために在庫システムを表現する次の方程式が成立するとする．

$$X_{n+1}=X_n+Y_n-Z_n \qquad X_0=C \tag{2.1}$$

ここで，Z_n も Y_n もまったくランダムとしょう．しかしこの分布は指定はしない．ただ分布の平均値と標準偏差が明確でさえあればよい．即ち，入力 $\{Y_n\}$ は毎日平均すると m_1 でその変動状態が標準偏差 σ_1 によって規定され，また出力 $\{Z_n\}$ は毎日平均すると m_2 でその標準偏差は σ_2 に従っているとしよう．

n 期間にわたって

$$A\geq X_i\geq B, \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

が成立する事象を考えよう．

この事の実現する確率は

$$P=\mathrm{Prop}\{(\max_{1\leq i\leq n} X_i<A) \text{ and } (\min_{1\leq i\leq n} X_i>B)\} \tag{2.2}$$

に等しい．これは (2.1) 式より

$$P=\mathrm{Prob}\{(\max \sum_{i=1}^{n}(Z_i-Y_i)\leq A-C) \text{ and } \quad (\min \sum_{i=1}^{n}(Z_i-Y_i)\geq B-C)\}$$

と書き換えられる．

$Z_i-Y_i=Q_i$ とすれば仮定より

$$E(Q_i)=m=m_1-m_2$$

$$V(Q_i)=\sigma^2=\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2$$

である．ここで

$$\frac{Q_i-m}{\sigma}=P_i$$

という変数変換を行なうと

$E(P_i)=0,\ V(P_i)=1$ で

$$P=\mathrm{Prob}\{(\max \sum_{i=1}^{n} P_i\leq \frac{A-C-m}{\sigma}) \text{ and } (\min \sum_{i=1}^{n} P_i\geq \frac{B-C-m}{\sigma})\} \tag{2.4}$$

となる．ここに P_1, P_2, …, P_n, … は独立で同じ分布関数をもつ確率変数で平均値 0，分散 1 となる．

今 $S_n=P_1+P_2+\cdots+P_n$ とおき

$$P\mathrm{rob}\{(\max_{1\leq k\leq n} S_k\leq\sqrt{n}\,\alpha)\ \mathrm{and}\ (\min_{1\leq k\leq n} S_k\geq\sqrt{n}\,\beta)\}\tag{2.5}$$

を考えて，$n\to\infty$ の時の極限値 $\sigma(\alpha,\beta)$ を求めれば

$$\sigma(\alpha,\beta)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)}\left\{\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha-\beta}(\alpha-x_0)\times\exp\left(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}$$

となることが証明され，その数表が得られている．〔2〕

従って近似的に

$$\sqrt{n}\,\alpha=\frac{A-C-m}{\sigma},\quad \sqrt{n}\,\beta=\frac{B-C-m}{\sigma}\tag{2.6}$$

より

$$A=\alpha\sqrt{n}\,\sigma+C+m,\quad B=\beta\sqrt{n}\,\sigma+C+m$$

と示される．ここで購入量と需要量の平均値が等しい（つまり $m_1=m_2$）とすると $m=0$ となり，

$$A=\alpha\sqrt{n}\,\sigma+C,\quad B=\beta\sqrt{n}\,\sigma+C$$

となる．

2.2 最適政策の決定

ハマッカーの在庫管理過程の数量的モデルとして次のように考えるとする．離散的な時点 0，1，…，N に於て統計的需要を有する単一品目の在庫問題を考える．各時点に於ける初期在庫量がある調節限界 A, B を越える確率を最小による政策を決定することが問題である．ここで多くの在庫問題に於ては購入費用，在庫費用等が仮定せられるが，その推定は困難なことがある．そこでここでは之等の費用は各段階に於て完全に知られぬとし，各段階に於ける需要の統計的性質のみが知られているとする．ここで次の量を仮定しよう．

$x_n=n$ 段階における初期在庫量．ただし，段階における発注量，需要量に先立って知られるとする．　　$(n=k,\cdots,N)$

$y_n=n$ 段階における発注量　$(n=k,\cdots,N)$

$z_n=n$ 段階における需要量　$(n=k,\cdots,N)$

ここで y_n は x_n に依存し，z_n が観測せられる前に y_n は決定せられねばならぬとする．そのときこの在庫系に関して次の関係が成立する．

$$x_{n+1}=x_n+y_n-z_n,\qquad x_k=x,\tag{2.7}$$

更にハマッカーの在庫量問題については次の仮定が置かれる．

a）n 期における需要 z_n は過去の需要 $\{z_n\}$ の線形一次結合 $\sum_{m=k}^{n-1}a_m z_m$ に等しいと予測す

る．そして実際に観測される z_n はこれに誤差 w_n を伴うとする．すなわち $\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m + w_n$ である．

b) w_n は独立な同一分布をもつ非負な確率変数

c) 次の条件がその確率密度 $\varphi(w)$ に課せられている．

① $\varphi(w)>0,\ w\geq 0,\ \int_0^\infty \varphi(w)dw=1,\ \int_0^\infty w\varphi(w)dw=0,\ \int_0^\infty w^2\varphi(w)dw<\infty$ (2.8)

② $\int_y^{y+0} \varphi(w)dw \leq a<1,\ y\geq 0,\ \Delta=\alpha-\beta$

③ $\varphi'(w)$ がすべての w に対して連続であって，$\varphi(w)$は$[0,\infty)$ で単峰である．

④ $\varphi''(t)<0,\ [y, y+\Delta]$

d) $|y|<A$ とする．

問題は (2.7) 式の在庫系に対して

$$J=\mathrm{Prob}\{(\max_{k\leq i\leq N-1} x_i \geq A) \text{ or } (\min_{k\leq i\leq N-1} x_i \leq B)\} \tag{2.9}$$

を最小にする y_n を決定することである．

いま

$$f_n(x, z_k, \cdots, z_{n-1})=\min J \tag{1.10}$$

と定義する．　$N-1\geq n\geq k$ に対して関数列 $f_n(x, z_k, \cdots, z_{n-1})$ は

$$f_{n-1}(x, z_k, z_{k+1}, \cdots, z_{n-2})=1,\quad (x\geq A, x\leq B)$$

$$=0,\quad (A>x>B) \tag{2.11}$$

より出発し，一般に

$$f_n(x, z_k, \cdots, z_{n-1})=1,\qquad (x\geq A, x\leq B)$$

$$=\min_{|y|<A}\Bigg[\int_{x+y-\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m-B}^{\infty} \varphi(w)dw + \int_{-\infty}^{x+y-\sum a_m z_m-A} \varphi(w)dw$$

$$+\int_{x+y-\sum a_m z_m-A}^{x+y-\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m-A} f_{m+1}(x+y-\sum^{u-1} a_m z_m-w, z_k, \cdots, z_n)\varphi(w)dw\Bigg],$$

$$(A>x>B) \tag{2.12}$$

が成立する．

この関数方程式より明らかに最適解は次の形をとっている[3]．

$$y_n=\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m+\bar{x}_n-x,\quad (x\geq \bar{x}_n)$$

$$=\sum_{m=k}^{n-1} a_m z^m + x - \bar{x}_n, \quad (x<\bar{x}_n) \tag{2.13}$$

ここに $\bar{x}_n$ は各期の最適在庫水準で

$$\int_{x+y-\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m - A}^{x+y-\sum^{n-1} a_m z_m - B} (1-f_{n+1}(x+y-\sum^{n-1} a_m z_m - w, z_k, \cdots, z_n)\varphi'(w)dw=0 \tag{2.14}$$

の解として示される．これはハマッカー氏の政策が

{(過去の4時間の平均使用量)−(過剰貯水量)±24} としたのに相当する．すなわち

$$a_k=\cdots=a_{n-2}=0, \quad a_{n-1}=1$$

で，$\sum_{m=k}^{n-1} a_m z_m = z_{n-1}$ となっている特別の場合と考えられる．また，

(過去の24時間の平均使用量)$=z_{n-1}$,

(過剰貯水量)÷24$=\{(\bar{x}-c)$ or $(c-\bar{x}_n)\}$

となっている．

3. 議　　論

在庫の機能としては

1) 需要に対する変動を吸収する

2) 製造命（令発）注回数をできるだけ少くする

ことが必要である．よって過剰貯水量のバラッキが小さくて供給水準に変化がないのが良いと考えられる．

ハマッカー氏の予測は需要が前日と同一であると仮定しているので，誤差が大きく過剰貯水量のバラッキが大である．そこで需要はある確率分布に従う確率変数と仮定すると，誤差は比較的に小さく，従って過剰貯水量のバラッキが前より小となることが実験によりたしかめられる．

次に過剰貯水量が最適在庫水準から ±500m³/hour か ±1,000m³/hour 内に収まっている場合は供給量は 1,300m³/hour に定めておいて，±500m³/hour, ±1,000m³/hour の水準外に出た場合のみ政策の実施するとバラッキは更に減少することもわかる．この理由を考えてみよう．

発注費用 $c(y)$ を考えて

$$c(y)=cy+k(y),$$

$$k(t)=\begin{cases} k, & y>0 \\ 0, & y=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

であって，$\sum_{n=1}^{n} c(z_i) \leq m$ に関して

$$\mathrm{Prob}\{(\max_{k\leq n\leq N-1} x_n \geq A) \text{ or } (\min_{k\leq n\leq N-1} x_n \leq B)\} \tag{3.2}$$

なる確率を最小にするようにを選ぶという実際的な場合に対するモデルを解析しよう．ここでラグランジュ乗数を用いて，

$$J\{(y_n)\}=[\mathrm{Prob}\{(\max_{k\leq n\leq N-1} x_n\geq A)\ \mathrm{or}$$

$$(\min_{k\leq n\leq N-1} x_n\leq B)\}]\exp[-\lambda(m-\sum_{n=1}^{n} c(y_i))\qquad(3.3)$$

を最小にする新しい問題と考えよう．

$$\min J\{(y_n)\}=f_k(x)\qquad(3.4)$$

を定義すれば前と同様に

$$f_k(x)=e^{-\lambda m}\quad(c\geq A,\ c\leq B)$$

$$=\min_{y_k}\left[e^{-\lambda(m-c(y_k))}\left\{\int_{x+y-B}^{\infty}\phi(z)dz+\int_{-\infty}^{x+y-A}\varphi(z)dz+\int_{x+y-A}^{x+y-B}f_{k+1}(x+y-z)\varphi(z)dz\ \right\}\right],$$

$$(A>C>B)\qquad(3.5)$$

と書ける．ただし

$$f_{n-1}(x)=\min_{y_{N-1}}(e^{-\lambda(m-c(y_{N-1}))})=e^{-\lambda m},\quad(x\geq A,x\leq B)$$

$$=0\qquad(A>x>B)\qquad(3.5)$$

から出発する．

このとき $\varphi(z)$ に関する仮定のもとに最適在庫方程式の $(S-s)$ 方式と同様に次の定理が得られる．ただし便宜上ここでは $c=0$ と置く．

定理　最適政策は

$$y=|S-x|,\qquad(x<s_n,\ x>s_n')$$

$$=0\qquad(s_n<x<s_n')\qquad(3.6)$$

と書ける．ただし　$s_n<S_n<s_n'$　である．（図3参照）

この定理を使用することにより $(s\text{—}o)$ 方式が有利なことの理由が判明した．

以上ハマッカーの方法の問題であった

1)　決定する明確な基準がない，

2)　政策の採用の根拠が明らかでない，

の２つの問題点が我々の立場より解明された．残る１つの問題点

3)　経済性に対する考察

は確率基準と費用基準との間の関係を考察することによって解明されよう．今後の残された重要な問題と思われる．又ダブルチェクの数学的模型についても次の機会に述べたい．

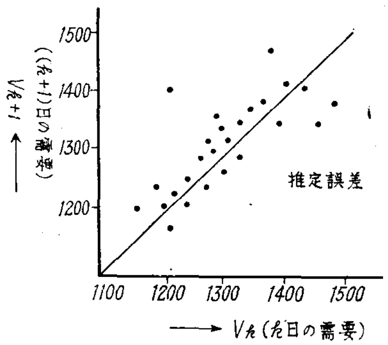

図 1

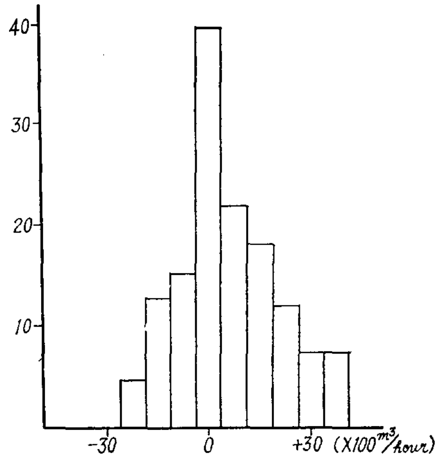

図 2 貯蔵過剰のヒストグラム

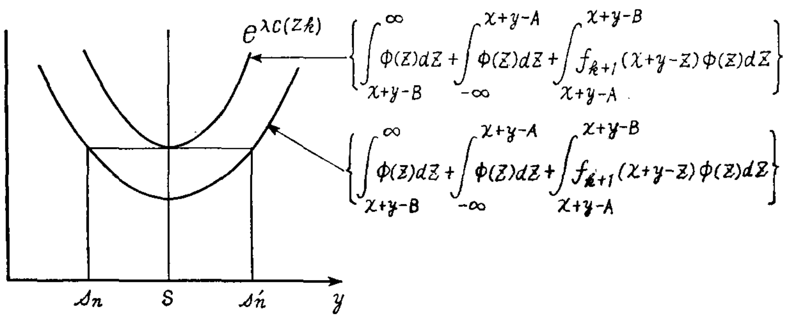

図 3

参 考 文 献

1) ハマッカー；「フィリップ社アインドホーバン工場における水消費と貯水容量の解析」経営科学，第4巻，第2号（1960年12月）

2) 小田中；ダイナミックプログラミングによる在庫管理，日刊工業新聞社（1963）.

3) T. Odanaka; On Study of Multi-stage Inventory Control. 東京工業大学学位論文（1967）.