

フロー・ダイアグラムにおける CPM†

古 林 隆*

§ 1. ま え が き

従来の CPM (Critical Path Method) では、作業の前後関係の表現に、フロー・ダイアグラム——作業を結合点で、それらの前後関係を矢印で示すダイアグラム——を用いないで、アロー・ダイアグラム——作業の開始または終了 (の時刻) を結合点で、作業を矢印で示すダイアグラム——を用いている。

しかし、実際問題ではフロー・ダイアグラム、あるいはその一步前の作業リストが与えられることが多い。これらを等価なアロー・ダイアグラムに変換することは可能である¹⁾が、ダミー作業の追加などかなり煩雑であるし、一意的には変換されないので、フロー・ダイアグラム上で直接 CPM を考察することが望まれる。ここではその 1 つの解法を示す。適用の際、ダミー作業を 1 つ追加しなければならないが、アロー・ダイアグラムへの変換の手間を考えれば、はるかに有利である。

§ 2. 問題の定式化

プロジェクトの作業の総数を n とし、先行作業をもたない作業を J_1, J_2, \dots, J_p とする。作業 J_i ($i=1, 2, \dots, n$) の標準所要時間, 特急所要時間, 費用勾配 (作業の所要時間を単位時間短縮するための費用) をそれぞれ D_i, d_i, c_i とする。次に、後続作業をもたないすべての作業に後続するダミー作業 J_{n+1} を付加し、

$$A \equiv \{(i, j) \mid \text{作業 } J_i \text{ は作業 } J_j \text{ の直前作業である}\}$$

と定義すれば、CPM で扱う問題は次のように定式化される。

D| λ 条件

$$(D1) \quad v_j - v_i - t_i \geq 0, \quad (i, j) \in A,$$

$$(D2) \quad D_i \geq t_i \geq d_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(D3) \quad v_{n+1} - v_i \leq \lambda \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

のもとで

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i t_i$$

を最大にせよ。

† 1967年3月30日受理

* 東京大学工学部

ここで, v_i および t_i ($1 \leq i \leq n$) はそれぞれ作業 J_i の開始時刻および所要時間であり, v_{n+1} はプロジェクト全体の終了時刻である.

倉田 [5] の形式に従って, $D|\lambda$ の双対問題 $P|\lambda$, $D|\lambda$ の解 $\{v_i, t_i\}$ に対する制限問題 $RP|\lambda$, $P|\lambda$ の解 $\{f_{ij}, g_i, h_i, \mu_i\}$ に対する制限問題 $RP^*|\mu$ を考えよう.

$P|\lambda$ 条件

$$(P1) f_{ij} \geq 0, (i, j) \in A,$$

$$(P2) g_i, h_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(P3) \mu_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(P4) f_{i.} - \mu_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(P5) f_{i.} - f_{.i} = 0 \quad (i=p+1, p+2, \dots, n),$$

$$(P6) \sum_{i=1}^p \mu_i - f_{.(n+1)} = 0,$$

$$(P7) f_{i.} + g_i - h_i = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

のもとで

$$T(\lambda) = \lambda \sum_{i=1}^p \mu_i + \sum_{i=1}^n (D_i g_i - d_i h_i)$$

を最小にせよ.

ただし

$$f_{i.} \equiv \sum_{j: (i,j) \in A} f_{ij}, \quad f_{.j} \equiv \sum_{i: (i,j) \in A} f_{ij}$$

である.

$RP|\lambda$ 条件

$$(PR1) f_{ij} \geq 0, (i, j) \in A,$$

$$(PR2) g_i, h_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(RP3) \mu_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP4) f_{i.} - \mu_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP5) f_{i.} - f_{.i} = 0 \quad (i=p+1, p+2, \dots, n),$$

$$(RP6) \sum_{i=1}^p \mu_i - f_{.(n+1)} = 0,$$

$$(RP7) f_{i.} + g_i - h_i = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(RP8) (i, j) \notin A, v_j - v_i - t_i > 0 \text{ ならば } f_{ij} = 0,$$

$$(RP9) t_i < D_i \text{ ならば } g_i = 0,$$

$$(RP10) t_i > d_i \text{ ならば } h_i = 0,$$

$$(RP11) \quad i \leq p, \quad v_{n+1} - v_i < \lambda \quad \text{ならば} \quad \mu_i = 0,$$

のもとで

$$\mu = \sum_{i=1}^p \mu_i$$

を最大にせよ.

$RP^*|\mu$ 条件

$$(RP^*1) \quad v_j - v_i - t_i \geq 0, \quad (i, j) \in A,$$

$$(RP^*2) \quad D_i \geq t_i \geq d_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(RP^*3) \quad v_{n+1} - v_i - \lambda^* \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP^*4) \quad (i, j) \in A, \quad f_{ij} > 0 \quad \text{ならば} \quad v_j - v_i - t_i = 0,$$

$$(RP^*5) \quad g_i > 0 \quad \text{ならば} \quad t_i = D_i,$$

$$(RP^*6) \quad h_i > 0 \quad \text{ならば} \quad t_i = d_i,$$

$$(QP^*7) \quad \mu_i > 0 \quad \text{ならば} \quad v_{n+1} - v_i - \lambda^* = 0,$$

のもとで λ^* を最小にせよ.

これらの問題の解およびパラメーターの間には次の定理が成立する.

定理 1. $P|\lambda$ の解に基づく $RP^*|\mu$ の解を

$$\{v_i, t_i, \lambda^*\} \quad \text{とすると,} \quad \{v_i, t_i\} \quad \text{は} \quad D|\lambda = \lambda^*$$

の解である.

定理 2. $D|\lambda$ の解に基づく $RP|\lambda$ の解

$$\{f_{ij}, g_i, h_i, \mu_i\} \quad \text{は} \quad P|\lambda$$

の解である.

証明は文献 [5] を参照されたい.

次に, $RP|\lambda$ および $RP^*|\mu$ とそれぞれ同値で, g_i, h_i を含まない問題 $RP'|\lambda$ および $RP^*|\mu$ を考える.

$RP'|\lambda$ 条件

$$(RP'1) \quad f_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A,$$

$$(RP'2) \quad \mu_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP'3) \quad f_{i.} - \mu_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP'4) \quad f_{i.} - f_{.i} = 0 \quad (i=p+1, p+2, \dots, n),$$

$$(RP'5) \sum_{i=1}^p \mu_i - f_{\cdot(n+1)} = 0,$$

$$(RP'6) (i, j) \in A, v_j - v_i - t_i > 0 \text{ ならば } f_{ij} = 0,$$

$$(RP'7) t_i < D_i \text{ ならば } f_i \geq c_i,$$

$$(RP'8) t_i > d_i \text{ ならば } f_i \leq c_i,$$

$$(RP'9) i \leq p, v_{n+1} - v_i < \lambda \text{ ならば } \mu_i = 0,$$

のもとで

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$$

を最大にせよ.

$RP^*|\mu$ 条件

$$(RP^{*1}) v_j - v_i - t_i \geq 0, (i, j) \in A,$$

$$(RP^{*2}) D_i \geq t_i \geq d_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(RP^{*3}) v_{n+1} - v_i - \lambda^* \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

$$(RP^{*4}) (i, j) \in A, f_{ij} > 0 \text{ ならば}$$

$$v_j - v_i - t_i = 0,$$

$$(RP^{*5}) f_i < c_i \text{ ならば } t_i = D_i,$$

$$(RP^{*6}) f_i > c_i \text{ ならば } t_i = d_i,$$

$$(RP^{*7}) \mu_i > 0 \text{ ならば } v_{n+1} - v_i - \lambda^* = 0,$$

のもとで λ^* を最小にせよ.

$RP'|\lambda$ の解を $\{f'_{ij}, \mu_i\}$ とし,

$$f_{ij} = f'_{ij}, (i, j) \in A,$$

$$g_i = \max\{c_i - f_i, 0\} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$h_i = \max\{f_i - c_i, 0\} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$\mu_i = \mu_i' \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

とおくと, $\{f'_{ij}, g_i, h_i, \mu_i\}$ は $RP|\lambda$ の解である. §3の解法では, $RP|\lambda, RP^*|\mu$ のかわりに, $RP'|\lambda, RP^*|\mu$ を解いている.

§ 3. 解 法

$D|\lambda$ および $P|\lambda$ からあきらかなように, フロー・ダイアグラムにおける CPM も, 輸送問

題形の線形計画の一種である。

したがって、従来のプライマル・デュアル法〔1〕,〔3〕,〔4〕,〔5〕を適用することができる。ここでは伊理の①行列法〔2〕による手順を示す。

〔手順1〕

$$\mu=0,$$

$$\theta_{ij} = \begin{cases} D_i, & (i, j) \in A \text{ の時,} \\ 0, & i=j \text{ の時,} \\ -\infty, & \text{その他の時,} \end{cases}$$

とおく。

〔手順2〕 ($RP^* | \mu$ の解法)

$$v_i = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq p \text{ の時,} \\ -\infty, & p < i \leq n+1 \text{ の時,} \end{cases}$$

とおいて、 $m=1, 2, \dots$ の順に

$$v_j = \max \left\{ \max_{i < j}^m (v_i + \theta_{ij}), \max_{i \geq j}^{m-1} (v_i + \theta_{ij}) \right\},$$

$$(j=1, 2, \dots, n+1),$$

を求め、すべての j に対して

$$v_j = v_j^m$$

ならば、

$$v_i = v_i^m \quad (i=1, 2, \dots, n+1),$$

$$t_i = \min \left\{ \min_{j: (i,j) \in A} (v_j - v_i), D_i \right\}$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

$$\lambda = v_{n+1},$$

とおく。

〔手順3〕 ($RP' | \lambda$ の解法)

$$3.1 \quad l(i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq p \text{ の時,} \\ -2, & p < i \leq n+1 \text{ の時,} \end{cases}$$

$$\varepsilon(i) = \infty, \quad 1 \leq i \leq p \text{ の時,}$$

とおく。

$$3.2 \quad (*) \quad \begin{cases} l(i) > -2, \\ l(j) = -2, \\ v_j = v_i + \theta_{ij}, \end{cases}$$

を満足する (i, j) を探す。

存在すれば $m(j)=i$ とおき、次の各場合にわけて $l(j)$, $\varepsilon(j)$ を求める。

i) $\theta_{ij}=d_i$ の時

$$l(j)=0, \varepsilon(j)=\varepsilon(i)$$

ii) $\theta_{ij}=D_i > d_i$ の時

$$l(j)=0, \varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), c_i - f_i\}$$

iii) $\theta_{ij}=-d_j > -D_j$ の時

$$l(j)=-1, \varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), f_j - c_j, f_{ji}\}$$

iv) $\theta_{ij}=-D_j$ の時

$$l(j)=-1, \varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), f_{ji}\}$$

v) $\theta_{ij}=0$ で、 $(k, i) \in A$, $(k, j) \in A$, $f_{ki} > 0$ なる k が存在する時

$$l(j)=k, \varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), f_{ki}\}$$

条件(*)を満足する (i, j) が存在しなくなるまで同じ操作をくりかえす。

その結果 $l(n+1) > -2$ ならば 3.3 に進む。 $l(n+1) = -2$ ならば手順2にもどる。

3.3

3.3.1 $\varepsilon(n+1) = \infty$ ならば終了。 $\varepsilon(n+1) < \infty$ ならば μ に $\varepsilon(n+1)$ を加え $j=n+1$ とおく。

3.3.2 $l(j)=0$ ならば $f_{m(j), j}$ に $\varepsilon(n+1)$ を加える。

$l(j)=-1$ ならば $f_{j, m(j)}$ から $\varepsilon(n+1)$ を減ずる。

$l(j) > 0$ ならば $f_{l(j), j}$ に $\varepsilon(n+1)$ を加え、 $f_{l(j), m(j)}$ から $\varepsilon(n+1)$ を減ずる。

3.3.3 $m(j) > p$ ならば j を $m(j)$ におきかえて、3.3.2 にもどる。

$m(j) \leq p$ ならば新しい $\{f_{ij}\}$ に対する行列 (θ_{ij}) を次式より求めて、3.1 にもどる。

$$\theta_{ij} = \begin{cases} d_i, & (i, j) \in A \text{ かつ } f_i \geq c_i \text{ の時,} \\ D_i, & (i, j) \in A \text{ かつ } f_i < c_i \text{ の時,} \\ -d_j, & (j, i) \in A, f_{ji} > 0 \text{ かつ } f_j > c_j \text{ の時,} \\ -D_j, & (j, i) \in A, f_{ji} > 0 \text{ かつ } f_j \leq c_j \text{ の時,} \\ 0, & (k, i) \in A, (k, j) \in A \text{ かつ } f_{ki} > 0 \text{ なる } k \text{ が存在する時,} \\ & \text{または } i=j \text{ の時,} \\ -\infty, & \text{その他の時,} \end{cases}$$

§ 4. 例 題

各作業の直前作業、標準所要時間 D_i 、特急所要時間 d_i 、費用勾配 c_i が表1で与えられてい

るプロジェクトを考えよう。

表1 作業リスト

作業番号 i	直前作業番号	標準所要時間 D_i	特急所要時間 d_i	費用勾配 c_i
1	—	3(日)	1(日)	5(万円/日)
2	—	7	4	5
3	1	5	4	4
4	1	8	7	3
5	2,3	4	2	7

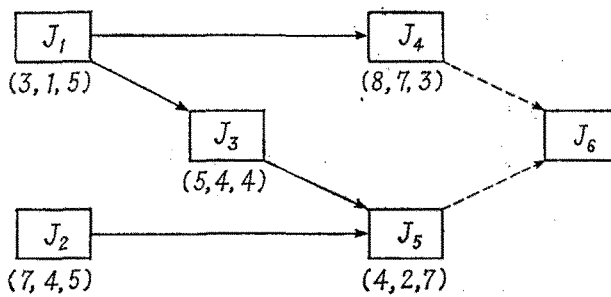


図1 プロジェクトのフロー・ダイテグラム表示
()内の数値は前から順に D_i, d_i, c_i を示す

まず、図1のようにダミー作業 J_6 を付加する。

〔手順1〕

$\mu=0$ とおく。

$\{\theta_{ij}\}$ は表2の ④₁ 欄のようになる。ここで空欄は $-\infty$ を意味する。

〔手順2〕

$\{v_i, t_i\}$ を求めると、 V_1, T_1 欄のようになる。

このとき $\lambda=12$ で、 $S(\lambda)=122$ である。

日程計画を図示すると、図2(a)となる。作業に対応するブロックの横の長さは所要時間、縦の長さは費用勾配を表わしている。したがって、ブロックの面積の総和は $S(\lambda)$ に比例する。

〔手順3〕

ラベル $l(i), m(i), e(i)$ を L_1 欄に示す。

新しいフロー $\{f_{ij}\}$ 、およびそれに対する ④ 行列は ④₂ 欄のようになる。欄中「 α/β 」は左側が θ_{ij} を、右側が f_{ij} を示し、 $f_{ij}=0$ の場合は「 $\alpha/0$ 」のかわりに単に「 α 」と記してある。行列 ④₂ に対するラベルは L_2 に示してあり、 $l(6)=-2$ であるから、手順2にもどる。

以下、手順2、3をくりかえすと、表2の結果をえる。

図2の(b), (c), (c)は、それぞれ $\lambda=11, 10, 8$ に対する日程計画を表わしている。

表 2 図1のプロジェクトのCPMの計算

i	\oplus_1						$c_i - f_i$	V_1			T_1	L_1			
	θ_{ij}/f_{ij}							v_i	v_i	v_i		t_i	$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$
	j=1	2	3	4	5	6									
1	0		3	3			5	0	0	0	3	0	—	∞	
2		0			7		5	0	0	0	7	0	—	∞	
3			0			5	4	$-\infty$	3	3	5	0	1	5	
4				0		8	3	$-\infty$	3	3	8	0	1	5	
5					0	4	7	$-\infty$	8	8	4	0	3	4	
6						0	—	$-\infty$	12	12	—	0	5	4	

$\lambda=12, S(\lambda)=122 \quad \mu=4$

i	\oplus_2						$c_i = f_i$	v_i	L_2			V_2			T_2	L_1			
	θ_{ij}/f_{ij}								$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$	v_i	v_i	v_i		t_i	$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$
	j=1	2	3	4	5	6													
1	0		3/4	3			1	0	0	—	∞	0	0	0	3	0	—	∞	
2		0			7		5	0	0	—	∞	0	0	0	7	0	—	∞	
3	-3		0	0	4/4		0	3	0	1	1	$-\infty$	3	3	4	0	1	1	
4				0		8	3	3	0	1	1	$-\infty$	3	3	8	0	1	1	
5			-5		0	4/4	3	8	-2	—	—	$-\infty$	7	7	4	0	2	5	
6				-4	0		—	12	-2	—	—	$-\infty$	11	11	—	0	4	1	

$\lambda=11, S(\lambda)=118 \quad \mu=5$

i	\oplus_3						$c_i - f_i$	v_i	V_2			L_4		
	θ_{ij}/f_{ij}								$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$	$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$
	j=1	2	3	4	5	6								
1	0		1/4	1/1			0	0	0	—	∞	0	—	∞
2		0			7		5	0	0	—	∞	0	—	∞
3	-3		0	0	4/4		0	3	-2	—	—	-2	—	—
4	-3		0	0		8/1	2	3	-2	—	—	-2	—	—
5			-5		0	4/4	3	7	0	2	2	0	2	5
6				-8	-4	0	—	11	0	5	5	0	5	3

$\mu=8$

i	\oplus_4						$c_i - f_i$	v_i	L_5			V_3			T_3	L_6				
	θ_{ij}/f_{ij}								$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$	v_i	v_i	v_i		v_i	t_i	$l_{(i)}$	$m_{(i)}$	$\varepsilon_{(i)}$
	j=1	2	3	4	5	6														
1	0		1/4	1/1			0	0	0	—	∞	0	0	0	0	2	0	—	∞	
2		0			7/3		2	0	0	—	∞	0	0	0	0	7	0	—	∞	
3	-3		0	0	4/4		0	3	-2	—	—	$-\infty$	1	2	2	5	-1	5	2	
4	-3		0	0		8/1	2	3	-2	—	—	$-\infty$	1	2	2	8	1	3	2	
5			-7	-5		0	2/7	0	7	0	2	2	$-\infty$	7	7	7	3	0	2	2
6				-8	-4	0	—	11	-2	—	—	$-\infty$	9	10	10	—	0	4	2	

$\lambda=10, S(\lambda)=110 \quad \mu=10$

i	\mathbb{H}_5						V_3	L_7			V_4			T_4	L_8			
	θ_{ij}/f_{ij}						$c_i - f_i$	v_i	$l(i)$	$m(i)$	$\varepsilon(i)$	v_i^0	v_i^1	v_i^2	t_i	$l(i)$	$m(i)$	$\varepsilon(i)$
	j=1	2	3	4	5	6												
1	0	1/2	1/3				0	0	—	∞	0	0	0	1	0	—	∞	
2		0		6/5			0	0	—	∞	0	0	0	6	0	—	∞	
3	-3		0	0	5/2		2	2	-2	—	$-\infty$	1	1	5	0	1	∞	
4	-3		0	0	7/3		0	2	-2	—	$-\infty$	1	1	7	0	1	∞	
5		-7	-5		0	2/7	0	7	-2	—	$-\infty$	6	6	2	0	2	∞	
6				-8	-4	0	—	10	-2	—	$-\infty$	8	8	—	0	4	∞	

$\lambda=8, S(\lambda)=90 \quad \mu=\infty$

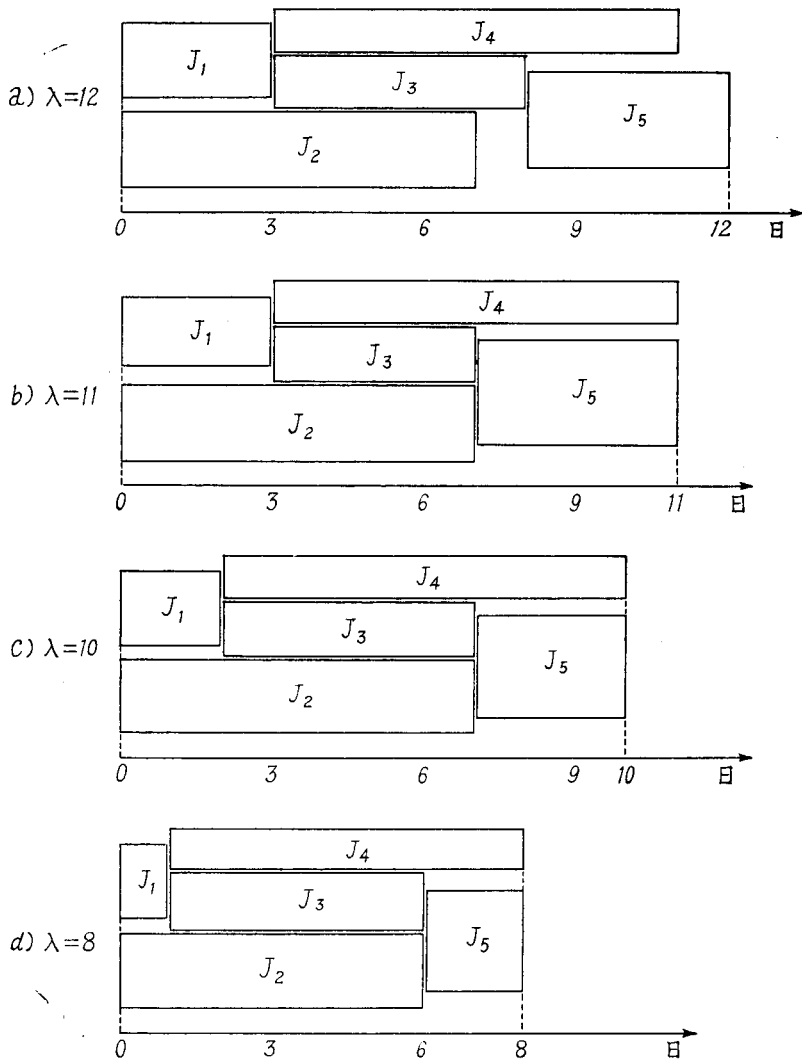


図2 図1のプロジェクトの日程計画

§ 5. む す び

この論文で示した解法は、アロー・ダイアグラム上で行なわれている従来のものと本質的に異なるものではなく、ただ、フロー・ダイアグラムで表示されているプロジェクトを、アロー・ダイアグラムに変換する手間を省いたものである。すでに、PERTにおいて、フロー・ダイアグラムのまま最早開始時刻（この論文の解法で求めた v_i は最早開始時刻を表わしている。）、最遅終了時刻等を求める方法が提示されている⁹⁾が、これらとあわせて、現在アロー・ダイアグラムで行われている計算がすべてフロー・ダイアグラムで処理できるようになれば意義があると思われる。

参 考 文 献

1. Dantzig, G. B., Ford, L. R., Jr. and Fulkerson, D. R., "A Primal Dual Algorithm," *Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Study*, **38**, Princeton University Press, 1956.
2. Iri, M., "A New Method of Solving Transportation-Network Problems," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **9** (1960), 27—87.
3. Kelley, J. E., Jr., "Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis," *J. Oper. Res. Soc. America*, **9** (1961), 296—320.
4. Kelley, J. E., Jr., "Parametric Programming and the Primal-Dual Algorithm," *J. Oper. Res. Soc. America*, **7** (1959), 327—334.
5. Kurata, R. "Primal Dual Method of Parametric Programming and Iri's Theory on Network Flow Problems," *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **7** (1965), 104—144.
6. Levy, F. K., Thompson, G. L. and Wiest, J. D., "Introduction to the Critical-Path-Method," *Industrial Scheduling*, Chapter 20, Prentice-Hall, 1963.
7. 関根智明, PERT・CPM 入門, 日科枝連, 1965.