経営科学 第11巻 第2号（1968年1月）

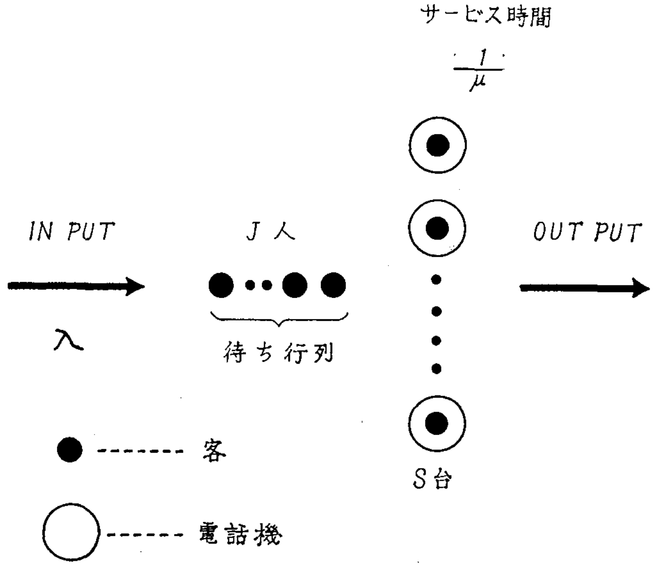
公衆電話の最適設置数に関する一考察†

佐 治 信 男*
初 田 崇*

主要ターミナル等の流動人口の多い場所にある公衆電話室の利益を最大にするには，電話機を何台置けばよいかについて考察したものである．

1. 待ち行列の長さに制限のある場合の平均動作率

第1図 電話室のモデル



第1図のように電話機数が S 台の電話室があって，客は J 人までは並んで待つものと仮定する．そこで J 人並んで待っているときに，この施設へサービスを受けに来た人は，並ばずにすぐあきらめて帰ってしまうことになる．この電話室に来る客は平均値が λ 人のポアソン分布で，サービス時間（電話機を占用している時間）は平均値 $1/\mu$ の指数分布に従うものとする．ここで

$$\rho=\lambda/\mu$$

とおく．この ρ はサービス時間 $1/\mu$ を単位にして考えた場合の客の到着の割合を表わす．この電話室に客が1人もいない確率を $P_0(S,J)$，1人いる確率を $P_1(S,J)$，・・・，電話機が全部

† 1967年8月30日受理，1966年度ＯＲ学会秋季研究発表会講演
* 日本電信電話公社

使われている確率を $P_S(S,J)$，全部使用中で更に J 人の客が並んで待っている確率を $P_{S+J}(S,J)$ とする．$P_0(S,J)$ 等の (S,J) はこれらの確率が，電話機数 S と，J人までは並んで待つと仮定した人員数 J との関数になっていることを表わしている．このとき待ち合せ理論[1]から次のようにして $P_0(S,J)$ を求めることができる．

(1) $$P_n(S,J)=\frac{\rho^n}{n!}P_0(S,J),\ 1\leqq n\leqq S$$

(2) $$P_n(S,J)=\frac{\rho^n}{S!\,S^{n-S}}P_0(S,J),\ S+1\leqq n\leqq S+J$$

また

$$\sum_{n=0}^{S+J}P_n(S,J)=1$$

であるから

(3) $$P_0(S,J)=\frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{\rho^S}{S!}+\frac{\rho^{S+1}}{S!\,S}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{S+J}}{S!\,S^J}}$$

すでに J 人並んでいる所にきた人はあきらめて帰るが，この帰る確率を $PF(S,J)$ と表わすと，これは J 人並んでいる確率 $P_{S+J}(S,J)$ と等しい．すなわち

(4) $$PF(S,J)=P_0(S,J)\cdot\frac{\rho^{S+J}}{S!\,S^J}$$

である．

つぎにこの電話室の電話機の空いている割合 $V(S,J)$ を求める．1人も客がいないときには S 台全部が空いており，このようなことが起こる確率は $P_0(S,J)$ であるから，$S\times P_0(S,J)$ だけ空いている．このように $S\times P_0(S,J)$，$(S-1)\times P_1(S,J)$ 等を1台だけ空いている場合の $1\times P_{S-1}(S,J)$ まで (5) 式のように加えてやれば求まる．

(5) $$V(S,J)=\left\{S+(S-1)\rho+(S-2)\frac{\rho^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{S-1}}{(S-1)!}\right\}P_0(S,J)$$

一台当りの空いている割合 $W(S,J)$ は $V(S,J)$ を S で割ればよく (6) 式になる．

(6) $$W(S,J)=\frac{V(S,J)}{S}$$

$$=\left\{S+(S-1)\rho+(S-2)\frac{\rho^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{S-1}}{(S-1)!}\right\}\frac{P_0(S,J)}{S}$$

一台当り使用中である割合 $U(S,J)$ は (7) 式のように，1から空いている割合 $W(S,J)$ を引いて求める．

(7) $$U(S,J)=1-W(S,J)$$

$$=\frac{\rho}{S}P_0(S,J)\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{\rho^S}{S!}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{S+J-1}}{S!\,S^{J-1}}\right\}$$

また (7) 式と (4) 式とから

$$PF(S,J)\cdot\frac{\rho}{S}+U(S,J)=\frac{\rho}{S}$$

になるから,

$$U(S,J)=\frac{\rho}{S}\left\{1-PF(S,J)\right\} \tag{8}$$

(8) 式は電話機が S 台あり, その電話室への客の到着割合が ρ のとき, あきらめて帰る確率 $PF(S,J)$ を指定してやると, 1台当りの平均動作率 $U(S,J)$ が求まることを表わしており, この関係式を使って, つぎのように1か月間の市内通話度数から, 市内通話収入を求めることができる.

2. 電話室の1か月の市内通話[1]による収入 G の求め方

電話機のサービス時間は, 不完了呼[2]も考えに入れると指数分布になり, この平均値を $1/\mu$ とする. 1台当りの動作率は $U(S,J)$ で, 1時間中で動作している時間 (即ちその電話機が使われている時間) は, 60分$\times U(S,J)$ になる. この電話室の電話機全体の動作時間は S 台分になるので S 倍して, 60分$\times U(S,J)\times S$ である. これを $1/\mu$ で割ると, この電話室で扱った一時間中の総呼数[3]になり, これを N_m とすると

$$\begin{aligned}N_m&=\frac{60\cdot U(S,J)\cdot S}{\frac{1}{\mu}}\\&=60\cdot U(S,J)\cdot S\cdot\mu\\&=60\cdot\rho\{1-PF(S,J)\}\cdot\mu\end{aligned}$$

この N_m の中には不完了呼も含まれているので, 度数計[1]の動く完了呼のみを求めるために, 通話完了率[2] K_P を掛けて, $N_m\times K_P$ が完了呼数になる. 一日中の総完了呼数は, 第2図の台形の面積に等しい. ここで b は一日中の営業時間で, a は一日中の繁忙時間数であり, 実際 (a) 図のようになるがこれを (b) 図のように台形と考えてもよいので, 一日中の総完了呼数 N_T は

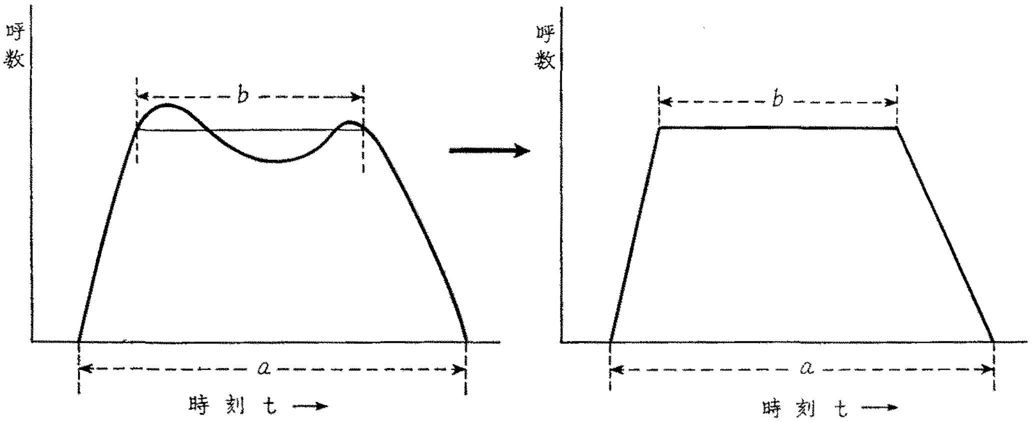
$$\begin{aligned}N_T&=N_m\frac{a+b}{2}\cdot K_P\\&=30\cdot\mu\cdot(a+b)\cdot K_P\cdot\rho\cdot\{1-PF(S,J)\}\end{aligned}$$

1) 度数計は市内通話の場合には完了呼1回ごとに1度数ずつ積算してゆき, これが収入に結びつくが, 不完了呼については度数計は動作しないので, 収入には関係しない. 市外通話の料金は通話時間と距離に関係して決まり, 1通話でも料金は異るので, この市外通話料金収入からは, 通話時間を一意的に決定できないので市内通話のみについて考えた.

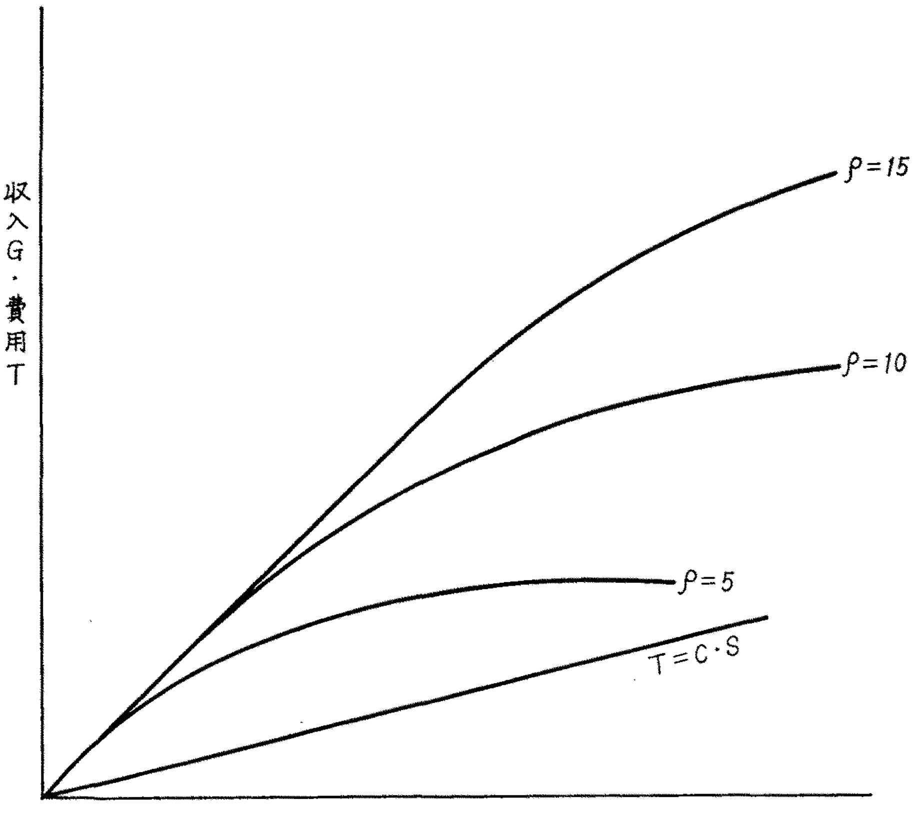
2) 不完了呼とは話中であった呼とダイヤルを途中までして中止したり, 相手が留守などで応答しない等の加入者事故とよぶ呼とがあり, 電話機を保留している時間は比較的短い. 全体の呼の中から不完了呼を除いた完了通話の全体の呼に対する割合を通話完了率という.

3) 総呼数とは完了呼と不完了呼との和である.

第２図　時間別呼数分布



第３図　電話機数と収入・費用の関係



ここで N_m は繁忙時間帯での1時間中の呼数である．さらにこの電話室の1か月の総呼数[3] は30日として $30\cdot N_T$ である．曜日変動による影響はほとんど考えなくてもよい．1通話8円の収入として1か月のこの電話室での総収入 G は

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad G&=8\cdot 30\cdot N_T\\
&=7200\cdot\mu\cdot(a+b)\cdot K_P\cdot\rho\cdot\{1-PF(S,J)\}\\
&=K\cdot\rho\cdot\{1-PF(S,J)\}\qquad(\text{円})
\end{aligned}
$$

K は場所によって決まる定数である．(9) 式はこの電話室の1か月間の収入を表わし，S を独立変数として横軸にとり，G を従属変数として縦軸にとり，ρ をパラメーターとして図示すると第3図のようになる．これから S と ρ がわかれば G が求まり，逆に G と S がわかれば，その電話室の現在の ρ の値を推測することもできる．

3. 電話室の1か月の経費 T

電話機の1か月1台当りの経費を C 円とすると，この電話室の1か月の経費は，台数に比例して増加するものと仮定すると，

$$(10)\qquad T=C\cdot S\qquad(\text{円})$$

で，図示すると第3図の T 直線になる．

4. 利益最大の電話機数

利益は $G-T$(円) でこれを $P(S)$ とすると

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad P(S)&=G-T\\
&=K\cdot\rho\{1-PF(S,J)\}-C\cdot S
\end{aligned}
$$

$P(S)$ の最大値を差分で考える．最大の条件式は

$$(12)\qquad \Delta P(S)<0<\Delta P(S-1)$$

で，(12) 式を満足する S が利益最大の値になる．$P(S)$ の差分は

$$(13)\qquad \Delta P(S)=K\cdot\rho\cdot\{PF(S,J)-PF(S+1,J)\}-C$$

になり，(12) 式と (13) 式とから

$$
(14)\qquad \begin{cases} PF(S,J)-PF(S+1,J)<\dfrac{C}{K\cdot\rho}\\[2ex] PF(S-1,J)-PF(S,J)>\dfrac{C}{K\cdot\rho}\end{cases}
$$

となる．(14) 式を満足する S を $\hat{S}$ とすれば，これが利益最大の設備数になる．実際に $\hat{S}$ を求めるときは $PF(S,J)-PF(S+1,J)$ の値が$C/K\cdot\rho$ の値より小さくなったときの S の値を $\hat{S}$ とすればよい．$PF(S,J)-PF(S+1,J)$ の値は第1表のように，ρ,Sおよび J の値を変化して，一覧表にしてあり，ρ と J を決めてその該当する欄の数値を下の方へ見てゆき $C/K\cdot\rho$ の

第1表　$PF(S, J)-PF(S+1, J)$ の表

ρ	S \ J	0	1	2	3	4
1	1	0.3	0.2424	0.2065	0.1787	0.1561
	2	0.1375	0.0705	0.0367	0.0190	0.0098
	3	0.0471	0.0166	0.0058	0.0020	0.0007
	4	0.0123	0.0032	0.0008	0.0002	0.0001
2	1	0.2667	0.2857	0.3111	0.3343	0.3541
	2	0.1895	0.1626	0.1464	0.1337	0.1228
	3	0.1153	0.0776	0.0536	0.0371	0.0256
	4	0.0585	0.0310	0.0165	0.0087	0.0046
3	1	0.2206	0.2497	0.2760	0.2950	0.3079
	2	0.1833	0.1855	0.1945	0.2046	0.2145
	3	0.1401	0.1233	0.1133	0.1058	0.0993
	4	0.0961	0.0719	0.0554	0.0430	0.0334
	5	0.0579	0.0365	0.0233	0.0148	0.0094
	6	0.0303	0.0161	0.0086	0.0045	0.0024
4	1	0.1846	0.2102	0.2284	0.2387	0.2443
	2	0.1647	0.1764	0.1910	0.2042	0.2149
	3	0.1400	0.1383	0.1419	0.1470	0.1525
	4	0.1116	0.0997	0.0926	0.0874	0.0831
	5	0.0819	0.0649	0.0529	0.0436	0.0360
	6	0.0544	0.0378	0.0267	0.0188	0.0133

値より小さくなった所の S の値を $\hat{S}$ とする．また ρ の値は S と G から第4図で求められる．

5.　所要電話機数の算出

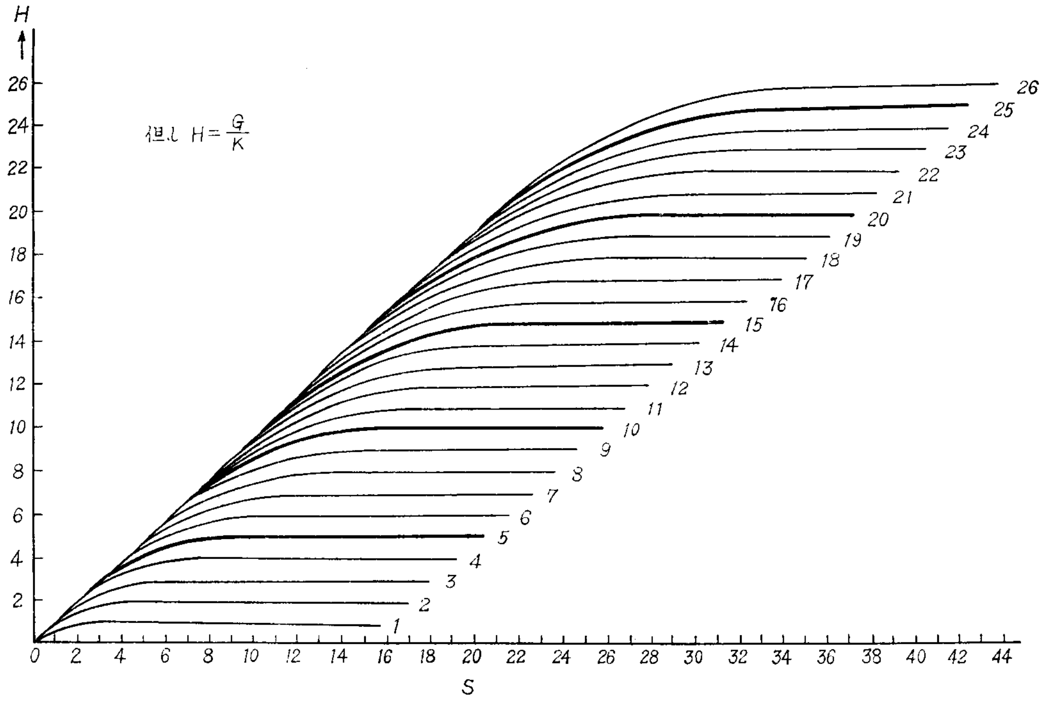
以上の考察では，公衆電話機の故障がなく，また市外通話についても全く考慮していない．しかし実際には故障もするし，市外通話にも使われるので，それぞれに対応する分だけ電話機数を多くしなければならない．まず市外通話については (15) 式で定義される定数 k_T を使って

$$(15)\qquad k_T=\frac{\text{市外通話利用時間}}{\text{市内通話利用時間}}$$

市外通話用と考えられる電話機数は $\hat{S}\times k_T$ である．

また故障で使えないものがあるので，それだけ余分に見積る必要がある．故障になっている電

第4図　電話機数 S と ρ と H との関係



話機数は故障率（電話機一台当りの故障発生の割合）を k_F とすると，$\hat{S}\times k_F$ になる．$\hat{S}$ に市外通話用および故障用の分を加算して，所要電話機数 S_T が求められる．

(16)　　$S_T=\hat{S}(1+k_T+k_F)$ 台

6.　市内通話収入の予測

以上の方法で所要電話機数 S_T を計算するためには市内通話収入 G を求めなければならない．ターミナル等では G は流動人口と関係があると思われるので，ターミナル駅の乗降客数と収入の関係を調査した．定期外乗降客数 x と公衆電話の市内通話収入 G との間には，直線的な相関関係があることがわかった．この回帰直線を

(17)　　$G=A+B\cdot x$

になるとして A および B を決定し，(17) 式を使って，定期外乗降客数を何等かの方法で予測できれば，市内通話収入 G を推測でき，これから利益を最大にするための所要電話機数 S_T を予測することができる．

あ と き が

この他にあるサービス・レベルを指定したとき，そのサービスを満足するために必要な電話機

数を求める場合も考えた．この場合のサービス・レベルとしては，$PF(S,J)$ の値を 0.01 とか 0.02とかにすることを考える．利益最大の場合とサービス・レベルを指定したときの両者の方法で所要電話機数を計算して，大きな数値の方を採用する方針である．

参考文献

〔1〕 佐治信男他，オペレーションズリサーチ／理論と実際，培風館