《綜　合　報　告》

引力模型について†

近　藤　次　郎*

引力模型すなわちグラビティー・モデルは2地域間の交通量を推定するための数学模型としてしばしば利用される．Newton の万有引力の法則，Coulomb の電磁力の法則として自然科学の領域では同一の式が用いられ，その厳密な証明は近代，量子力学の発達によって始めて完成した．このような法則が自然界に成立するならば社会科学の分野でも適用の途があると推論することができよう．

実際，離れた2地点に集団（マス）があるとき相互の引力に比例して流通（コンミュニケーション）が発生するとすれば通信量や交通量が引力の法則に従うと考えられる．

実際，グラビティー・モデルは広範囲に利用されているが全く異なる分野の応用であるために研究者相互には余りに知られていない様子である．この論文の目的は内外の報告，論文等を調べてこの模型の応用事例を集め，その適用性を検討することである．引力模型の他にも指数関数モデルが考えられる．この論文では後半において航空旅客数についてこの両方のモデルを比較した．

要するに引力模型は多方面に応用されており，各種の修正を行なえば実際によく適合することが実証される．またこれを用いて予測を行なうことができる．

引　力　模　型

二つの質点間に働く引力の大きさはその質量の積に比例し，距離の二乗に反比例するというのは有名な Newton の万有引力の法則でこれは地上の物体の運動を説明するだけでなく天体の運行の法則も導くことができる．また電磁気学でも Coulomb の法則というのがあって，それは2個の荷電間に働く力の大きさについて，上の Newton の法則の質量を荷電に置きかえるだけで全く同じ法則が成立することを述べている．このように引力模型は広く適用されるので，1858年に人口学者 H. Carey[1] は今日，“人間の交渉の引力模型”として知られている法則を導いた．彼は社会現象にも物質世界と同様な基本法則が成立すると見て引力はマス（集団）の大きさに比例し，距離に反比例するとした．

この考え方は1880年代に E.G. Ravenstein[2] によって移民の数の説明に利用され，また1889年に Lill[3] によって鉄道や船舶による旅行の法則として応用された．その後長くこの考え方は放置されて顧みられなかったのであるが1940年代に J.Q. Stewart[4] と G.K. Zipf[5] とが人間の社会的交渉にこの引力の概念を拡張して用い，アメリカでは社会科学者の間でその後いろいろな

† 1967年2月24日受理

* 東京大学工学部

場合に利用されてきたのである.

1951年に D'Arcey Harvey[6] は引力の考え方をほんの少し修正して用いれば2都市間の航空交通量を測定するのに用いられることを提言した．その修正というのは人口密度と都市の（経済的な）機能とである．もしこれらが一定なら交通量は

$$T=\frac{P_1\times P_2}{D} \qquad \cdots\cdots(1)$$

に比例するというのである．ここで P_1, P_2 は問題の2都市の人口で，Dはその距離である．

この式は結局，人口密度や都市の性格に拘りなく広く用いられてきた．そして多くの航空会社で交通量の推定に用いられた．

S. Wheatcroft[7] は

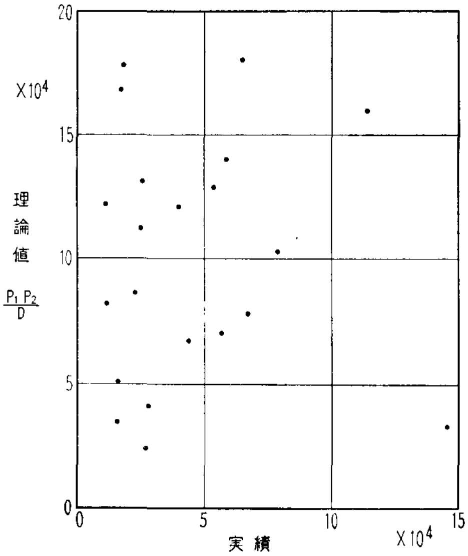
$$T=\frac{P_1\times P_2}{D}a \qquad \cdots\cdots(2)$$

を提案した．ここで a は2都市の関係を決める係数である．しかしこの a はどのようにして決めるかは未だよくわかっていない．

そこで1960年の統計でパリとヨーロッパ各都市間の航空交通量とについて(1)式による予測計算

第 1 表

パリより各都市	(1) 1960年実績 (1000人)	(2) パリよりの距離 (km)	(3) 人口 (1000人)	(4) 人口の積 (10^9人)	(5) 交通比率 (4)÷(2)	(6) 理論値 P_1P_2/D (1000人)
ロンドン	692	347	3,204	9,131	26,373	692
ジュネーブ	145	394	172	490	1,244	33
アムステルダム	114	406	872	2,485	6,121	160
ブラッセル	84	251	1,001	2,853	11,366	297
フランクフルト	79	471	648	1,847	3,921	103
マルセーユ	67	630	661	1,884	2,990	78
ミラノ	65	591	1,426	4,064	6,877	180
マドリード	59	1,032	1,897	5,406	5,336	140
コペンハーゲン	57	1,017	960	2,736	2,690	70
ローマ	54	1,109	1,920	5,472	4,934	129
チューリッヒ	44	497	433	1,234	2,576	67
ジュッセルドルフ	40	422	685	1,952	4,626	121
リスボン	28	1,430	790	2,252	1,574	41
アテネ	27	2,093	567	1,616	915	24
バルセロナ	26	827	1,446	4,121	4,983	131
ミュンヘン	25	690	1,034	2,950	4,271	112
マンチェスター	23	588	678	1,929	3,281	86
ハンブルグ	18	759	1,807	5,150	6,785	178
バーミンガム	17	486	1,095	3,121	6,421	168
ツールーズ	16	574	269	767	1,336	35
エール	16	783	539	1,536	1,962	51
チュリン	11	560	917	2,613	4,667	122
パリ	—	—	2,850	—	—	—



第1図　理論値と実績
パリヨーロッパ各都市間航空旅客　(1)式モデル

を行なった（**第1表**）．但し(1)式の結果は交通量そのものではないのでパリ—ロンドンの値が実績値と一致するようにすると(1)の値を26.2倍すればよいことになる．このようにして(1)による理論値と実績値の比較を示したものが第2表である．第1図は散布図である（**第1図**）．

しかし，(1)はたんに交通量の順位を算定するのに役立ち，交通量そのものを推定するものでないと考えて順位相関をとってみると順位相関係数は0.24である．そこで試みに製造業の中心である都市としてミラノ，ジュッセルドルフ，バルセロナ，マンチェスター，バーミンガム，チュリンの6市をえらんでみても順位相関係数は0.26に止まる．

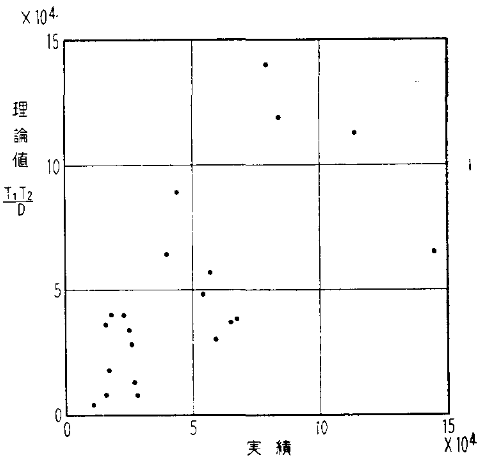
2都市間の航空交通量を決定する要素はその都市の機能や性格，相互依存性，住民の収入水準，職業構造，航空便のサービス，等々と数多く考えられる．そこでR. Doganis[11]は1966年(1)式の代りに

$$T=\frac{T_1\times T_2}{D^n} \qquad \cdots\cdots(3)$$

を提案した．T_1，T_2は問題の2都市の総航空乗客数である．このようにすると前記の各

第　2　表

パリより各都市	1960年実績	理論値 T_1T_2/D
ロンドン	692	692
ジュネーブ	145	65
アムステルダム	114	113
ブラッセル	84	118
フランクフルト	79	140
マルセーユ	67	38
ミラノ	65	37
マドリード	59	30
コペンハーゲン	57	57
ローマ	54	48
チューリヒ	44	89
ジュッセルドルフ	40	64
リスボン	28	8
アテネ	27	13
バルセロナ	26	28
ミュンヘン	25	34
マンチェスター	23	40
ハンブルグ	18	40
バーミンガム	117	18
ツールーズ	16	36
エール	16	36
チュリン	11	4



第2図　理論値と実績
パリーヨーロッパ各都市間航空旅客　(3)式モデル

要素はほとんどすべて T の内に反映していると考えられるからよい結果が期待される．実際，前記のパリヨーロッパ各都市間の1960年の交通量について調べてみると $n=1$ としたとき第2表のようになり，順位相関係数は0.74となってはるかに改良されていることがわかる．第2図は散布図で第1図に較べると推定値と実績との相関が改良されていることを知る（**第2表，第2図.**）

(3)式について n を 0.5 から2まで変化したときの順位相関係数を第3表に示してあるが，すべて大体においてよい結果を与えていることがわかる（**第3表**）.

第 3 表

引 力 公 式	順位相関係数
$\frac{T^1\times T^2}{D^{0.5}}$	0.70
$\frac{T^1\times T^2}{D^{0.75}}$	0.68
$\frac{T^1\times T^2}{D}$	0.74
$\frac{T^1\times T^2}{D^{1.25}}$	0.74
$\frac{T^1\times T^2}{D^{1.5}}$	0.74
$\frac{T^1\times T^2}{D^2}$	0.68

しかし航空交通量の需要予測にはなお難しい問題がある距離がずっと大きくなると航空機による旅行の優位性が顕著になって他の交通方法よりの転換が増えるので，航空交通にかんする限り距離がたんなる抵抗にはならない．

またある距離以上（例えばアメリカ合衆国では 1600 km 以上）では個人的の交渉の頻度というものは距離には余り関係しなくなってたんに人口のみに関係するようになる．よって航空交通の需要について引力モデルをたんに適用するのはまだ考慮の余地があるようである．

国鉄モデル

国鉄[12]では2地域間の親密度をあらわす係数をとるかわりに人口を地域（管理局管轄地域）の都市人口 P_u と農村人口 P_r とに分け

$$P=\alpha P_u+\beta P_r \qquad \cdots\cdots(4)$$

として換算人口 P を求めるとか，産業別の人口を P_1，P_2，P_3 等として

$$P=\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2+\alpha_3 P_3+\cdots \qquad \cdots\cdots(5)$$

とするようなやり方を提案している[12]．

また同じ文献で D を抵抗と見て

$$D=\gamma F+\delta T+J \qquad \cdots\cdots(6)$$

とおくことにしている．ここで F は運賃，T は所要時間，J は駅と戸口との間の抵抗である．

電気通信研究所[13]ではクーロン模型について研究し，それを電話需要の予測に用いている．すなわち市外電話の呼量 T について

$$T=k\frac{M_1 M_2}{D^2} \qquad \cdots\cdots(7)$$

が成立することを検定した．この研究では k を定めるにあたり，大都市とその周辺都市間，中都市と中都市間および大都市と遠距離にある中都市間，小都市と中都市間および小都市間の三つに層別してデータ分析を行なっている．k の値は上の三層につきそれぞれ

0.12, 0.09, 0.15

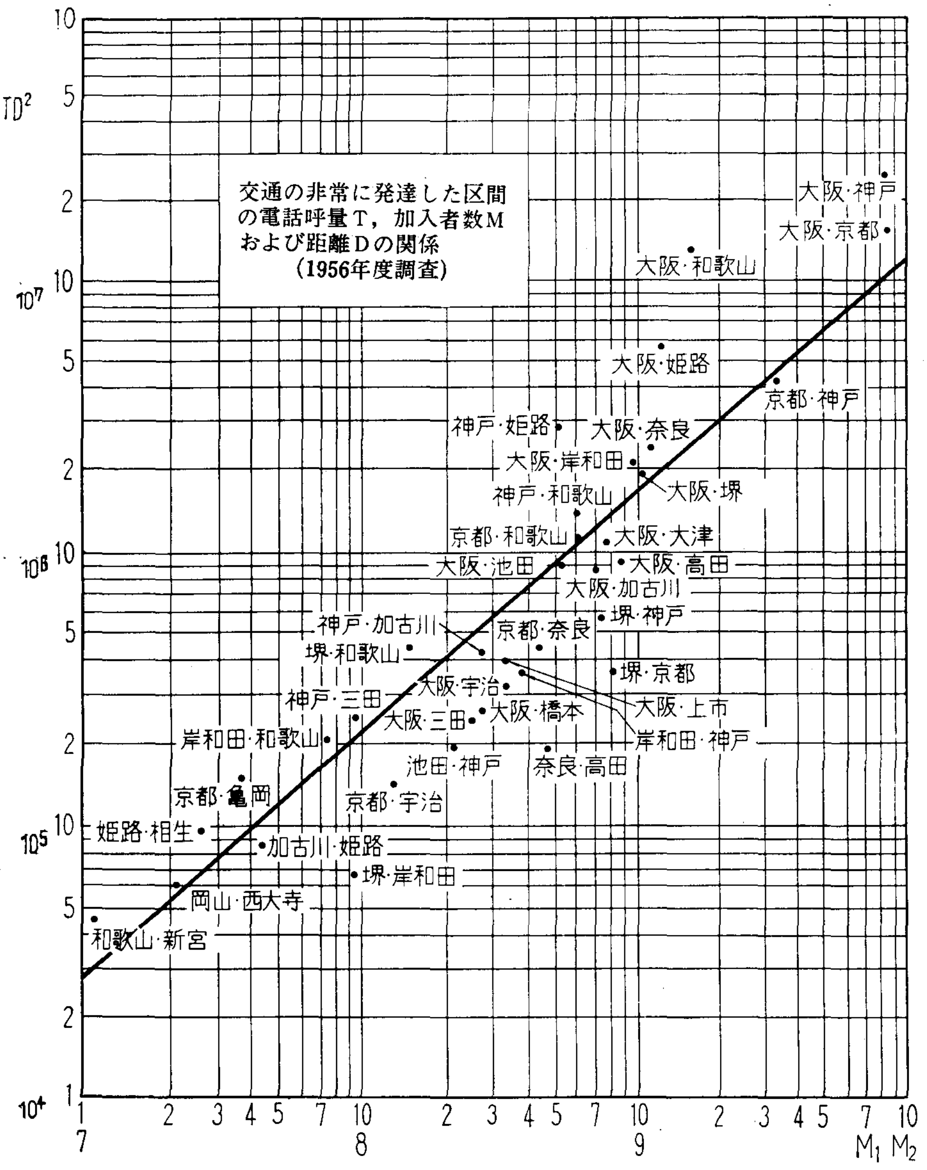
となっている．

(7)式は

$$\frac{T}{M_1 M_2} = k D^{-2} \qquad \cdots\cdots(8)$$

のように書き直せば両対数方眼紙上で T/M_1M_2 と D とが直線的関係にあることを示している．

(7)式の正当性は次のようにしても確められる．すなわち，ある地域の全呼量 $T..$ が既知であるとき，特定区間の呼量の理論値 T_{ij} は



第3図　市外電話呼量のモデル　(8)式

$$T_{ij}=T_{..}\frac{\dfrac{M_iM_j}{D_{ij}^2}}{\Sigma\dfrac{M_iM_j}{D_{ij}^2}} \qquad \cdots\cdots(9)$$

となる筈である．この理論値と実績値との相関を示したものが第3図である（**第3図**）．

三宅，矢頭[15]はこの法則を修正して

$$T=k\frac{(M_1M_2)^{\alpha}}{D^{\beta}}f(dm) \qquad \cdots\cdots(10)$$

を提唱した．$f(dm)$ は最大待合せ時間 dm の関数で dm の小さい処では $10^{-\gamma dm}$，dm の大きい処では $(1/dm)^{\delta}$ とする．

昭和24年および27年度の資料から α，β，γ，δ を定めると

$$\alpha=0.4,\qquad \beta=1$$

例えば 60〜100km 区間では

$$\gamma=0.003770,\qquad \delta=0.72859$$

となるとしている．

道路公団モデル

道路公団[16]では府県間の輸送需要 T を輸送機関別，貨客別，貨物品目別に推計するのに引力模型を用いて

$$T=k\frac{P_1^{\alpha}P_2^{\beta}}{D^{\gamma}} \qquad \cdots\cdots(11)$$

とした．ここで P は経済指標で，k，α，β，γ は品目によって異なる定数である．

運輸省の貨物および旅客にかんする地域流動調査[17][18]によって T の実績値を求め，P については発地域指標には品目（鉱産品，蔬菜，果実，農林水産品，石油石炭品，製造工業品，その他），輸送機関（トラック，鉄道，海上）によってそれぞれ第1次，第2次産業所得，製造業出荷額，県民所得をとり，着地域指標にはいづれの場合にも県民所得をとっている．最小二乗法によってパラメタの推定を行なった結果，例えば製造工業品については P_1 に製造業出荷額，P_2 に県民所得をえらびトラックの場合には

$$T=0.9677\times10^4\frac{P_1^{0.3066}P_2^{0.6375}}{D^{1.9913}}$$

鉄道の場合には

$$T=0.1927\times10^3\frac{P_1^{1.1387}P_2^{1.1460}}{D^{0.8486}}$$

海上の場合には

$$T=0.1530\times10\frac{P_1{}^{0.4751}P_2{}^{0.7017}}{D^{1.1983}}$$

となっている.

また旅客の場合には発地域指標として人口，県民所得，第2，第3次産業人口をとり，着地域指標には乗用車の場合のみ県民所得，それ以外はすべて人口を用いている.

例えばバス旅客は P_1 も P_2 も人口で

$$T=0.3371\times10^2\ \frac{P_1P_2}{D^{2.6610}}$$

であるが鉄道定期外旅客については P_1 を県民所得として

$$T=0.7957\times10\frac{P_1P_2}{D^{2.2989}}$$

としている.

この方法を交通量の予測に用いるときには府県別の経済指標を求めるのが眼目であるが，それには12本の連立方程式で表示した計量経済学モデルを用いている。

航　空　交　通

Doganis の方法は都市間の航空交通量の推定には確かに役立つものであるが，元来都市の空港の利用者数が知られていれば，都市間の航空交通量を算定するのにはたんに集計の手間だけの問題である筈である．これに対して都市人口は比較的に変動が少なく，しかも将来値の予測も多くの場合相当正確に行なえる．ことに空港や空路の開発計画があるような場合には空港利用者のデータは事前に得られないから彼の方法を用いることは不可能である.

そこで，人口に基づいた引力模型(3)を用いなくてはならない．第1表の資料に最小二乗法で(3)をあてはめると

$$8.32\times10^{-8}\frac{P_1P_2}{D^{0.27ъ}} \qquad \cdots\cdots(12)$$

となる.

指数関数モデル

一方，引力模型に替るものとして距離による漸減を考慮した模型[19][20]

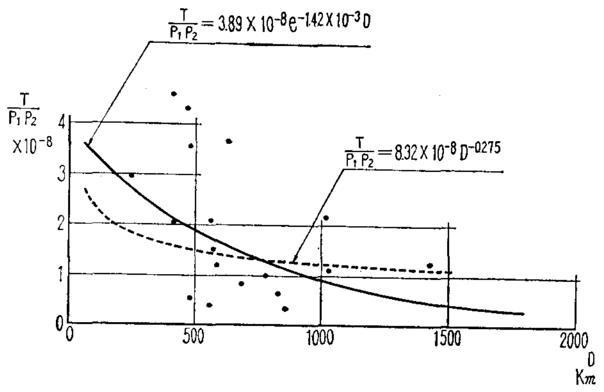
$$P_1P_2\ e^{-\alpha D} \qquad \cdots\cdots(13)$$

を用い，やはり第1表の資料によって最小二乗法により係数を算定すると

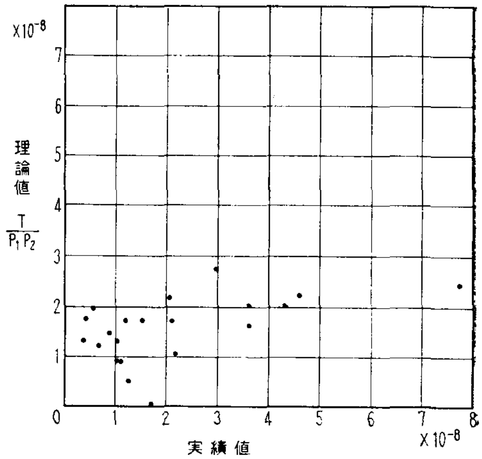
$$3.89\times10^{-8}P_1P_2\ exp(-1.42\times10^{-3}D) \qquad \cdots\cdots(14)$$

となる（**第4図**）.

これらの場合を図に示したのが第4図である．(14)の場合の散布図は第5図のようになる（**第5**



第4図　最小二乗法による理論曲線のあてはめ，航空旅客



第5図　パリヨーロッパ各都市間航空旅客(3)式モデル

図）．これを第1図と較べてみると相関が改良されていることがわかる．したがって(13)のような形も提案される．(12)と(14)について比較すると(12)は距離の増加に伴なう減少率が低いが，$D>1000$ km の範囲ではこのモデルの方が事実に近いと考えられる．しかし $D<1000$km では(14)式の方がよい一致を示している．遠距離旅客と近距離のそれとでは異質な旅行動機を持つと考えられるので $D=1000$km，旅行時間3時間程度の処が分岐点であると見られる．

む　す　び

グラビティー・モデルにつき従来の研究をまとめて見た．いろいろ違った分野に広く用いられていることがわかった．このモデルは都市間の交通量の順位決定には十分利用できるがその定量的な把握に用いるためには修正することが必要である．このような研究は交通政策決定のために重要である．引力模型に対して指数関数模型をあげ，航空交通についてあてはめて見た．区間距離が，1000km 以内のときは指数関数モデルの方がよくあてはまるようである．

最後に貴重な研究や文献につき御教えいただいた，国鉄技術研究所　宮田一，道路公団　戸山一雄，電気通信研究所　中村義作，日本輸送機製造株式会社　山田一郎の各氏に感謝致します．

この種の模型はその応用が広いので本稿に洩れている研究もあると思われる．著者に御教示賜われば幸いである．引力模型の適用範囲とその修正，およびミクロ的証明が今後の研究課題の一つと思考する次第である．

参　考　文　献

1) Carey H.C.: "Principles of Social Science", Philadelphia 1858, Vol. 1, pp. 41-43.
2) Ravenstein E. C.: "Laws of Migration". Journal of the Royal Statistical Society, June 1885 and June 1889.

3) Lill, "Die Grundgesatze des Personanverkehrs", Zeitschrift für Eisenbahnen und Dampshiffsfart der Osterreichisungarischen Monarchie, No. 35-6, 1889.

4) J.Q. Stewart: "In Inverse Distance Variation for Certain Social Influences", Science, January 1941.

5) G.K. Zipf: "The Unity of Nature, Least Action and Natural Social Science", Sociometry, February 1942.

6) D'Arcey Harvey: "Airline Passenger Traffic Pattern within the United States", Journal of Air Law and Commerce, 1951.

7) クラビティー・モデルにかんするかんたんな記事 Flight International, August 2, 1962.

8) S.B. Richmond: "Interspacial Relationships Affecting Air Travel", Land Economics, February 1957.

9) E.J. Taafe: "The Urban Hierarchy—An Air Passenger Definition", Economic Geography, January 1962.

10) D.M. Belmont: "A Study of Airline Interstation Traffic", Engineering, University of California, Berkeley, 1958.

11) R. Doganis: "Traffic Forcasting and "Gravity Model", Flight, Sep. 1966, pp. 547—549.

12) 宮田 一：国鉄における鉄道管理局特性値，鉄道技術研究報告， No. 402, 鉄道技術研究所報

13) 池原止才夫・他：集中局間の呼量の実態に関する研究，電気通信研究所通信網課 経過資料第542号，電気通信研究所々内資料.

14) 市外トラフィックの横断面分析について，トラフィック・ニュース No. 16, 昭和40年4月，pp. 127～139.

15) 三宅正男，矢頭澄生：トラフィック需要予測の方法と問題点，電気通信施設10巻12号，1958, 日本電々公社施設局編集，電気通信協会発行.

16) 財団法人計量計画研究所編：将来交通需要および流動パターンの変化に関する調査，日本道路公団経済調査課，昭和41年1月.

17) 運輸省：昭和37年貨物地域流動調査，昭和40年3月.

18) 運輸省：昭和37年旅客地域流動調査，昭和40年3月.

19) 機械振興協会経済研究所ＡＴ委員会報告 航空交通に関する研究，昭和41年度機械工業研究調査報告書41—K1—3—2,（昭和42年4月）