分流・合流分布とその応用†

牧 野 都 治*

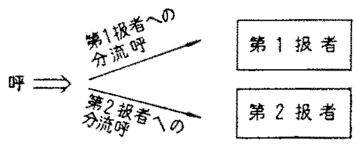
まえがき

交通流に関係ある2つの問題について考察する．1つは，関門バイパス交通規制を念頭において単純化したモデルについての基本的考察であって，次に示す「呼の分流」定理の直接の応用であるとみてよい．もう1つは，歩行者横断のための跨線橋設置規準といったものを作成するための原理的な面からの考察であって，ここでは「呼の合流」定理が援用される．

これらの定理は，数学的には何れも再生理論から容易に導かれるものであるけれども，それを実際に応用するための橋渡し的なものとして，やはり大切なものであろうと思われる．

1. 呼の分流

(1.1) 図のような系を考える．



(1.1 図)

系に到着した呼は，第1扱者のいるサービス・ステーションにならんだり，第2扱者のいるステーションにならんだりする．その何れに向うかは，比率 α_1，$\alpha_2=1-\alpha_1$ によって定められている．

系への呼の到着時間間隔 X は，互に独立な一般分布に従い，その積率母関数を $M_X(\theta)$ とする．これに対し，分流した呼が第1扱者のステーションに到着する時間間隔を T として，その分布の積率母関数を $M_T(\theta)$ とかくことにすれば，次の定理が成り立つ．

(注) 以下の議論で，第1扱者のいるサービス・ステーションへの分流呼のことを，単に分流呼とよぶことにする．

〔定理 1.1〕

分流呼の到着時間間隔 T の分布の積率母関数は，

$$(1.1)\qquad M_T(\theta)=\frac{\alpha_1\cdot M_X(\theta)}{1-(1-\alpha_1)\cdot M_X(\theta)}$$

になる．

(証 明)

---

† 1966年12月20日受理
* 高崎経済大学

第 i 番目の呼が系に到着してから，次の呼が系に到着するまでの時間を X_i とする．一方，第 j 番目の分流呼から第（$j+1$）番目の分流呼までの到着時間間隔を T_j とおく．いま，m 番目に系に到着した呼が，ちょうど n 番目の分流呼であったとしよう．このとき，系への（$m+1$）番目の到着呼が分流呼であれば，

$$T_n = X_m$$

である．一般に，（$m+k$）番目の到着呼が，m 番目の到着呼以後の最初の分流呼であれば，

$$T_n = X_m + X_{m+1} \cdots\cdots + X_{m+(k-1)}$$

が成り立つ．

しかるに，これらの X は互に独立で，同一の分布（積率母関数が $M_X(\theta)$）に従い，そして系への到着呼が分流呼となる比率を α_1 としてあるので，

$$\begin{aligned} M_T(\theta) &= \alpha_1 \cdot M_X(\theta) + (1-\alpha_1) \cdot \alpha_1 M_X{}^2(\theta) \\ &\quad + \cdots\cdots + (1-\alpha_1)^{k-1} \cdot \alpha_1 \cdot M_X{}^k(\theta) + \cdots\cdots \\ &= \frac{\alpha_1 \cdot M_X(\theta)}{1-(1-\alpha_1) \cdot M_X(\theta)} \end{aligned}$$

が得られる．

〔例〕

系への呼の到着時間間隔の分布が，

$$M_X(\theta) = \left(\frac{k\lambda}{k\lambda - \theta}\right)^k$$

なる積率母関数を有する k—アーラン分布であれば，分流呼の到着時間間隔の分布の積率母関数は，

$$(1 \cdot 2) \qquad M_T(\theta) = \alpha_1 \Big/ \left\{\left(1-\frac{\theta}{k\lambda}\right)^k - 1 + \alpha_1\right\}$$

となる．

呼の到着時間間隔が，平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うときには，(1.2) 式で $k=1$ とおけばよいので，

$$(1.3) \qquad M_T(\theta) = \alpha_1 \lambda / (\alpha_1 \lambda - \theta)$$

となる．つまり，この場合には分流呼の到着時間間隔分布は，平均 $1/(\alpha_1\lambda)$ の指数分布になる．

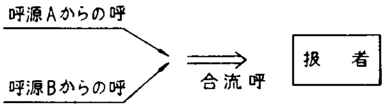
また，(1.2) 式で $k \to \infty$ とすれば，一定時間間隔到着の場合の合流呼到着分布の積率母関数

$$(1.4) \qquad M_T(\theta) = \alpha_1 / (e^{-\frac{\theta}{\lambda}} - 1 + \alpha_1)$$

が得られる．

2. 呼の合流

(2.1) 図のような系を考える．



(2·1) 図

呼源 A からの呼の，系への到着時間間隔 X はすべて独立で同一の分布に従い，呼源 B からの到着時間間隔 Y についても同様であるとする．さらに，X と Y は互に独立であるとしておく．このときの合流呼の到着時間間隔分布を求めたい．

まず，X および Y が，それぞれ平均 $1/\lambda_a$ および $1/\lambda_b$ の E_k 分布および E_l 分布に従うものとして，合流分布を求めてみよう．

A 側からの呼が到着した時点から，B 側の呼が到着するまでの時間を，Y と区別する必要がある．そこでこれを Y_0 とかくことにする．そして Y の分布の確率密度関数を $g(y)$，Y_0 の確率密度関数を $g_0(y)$ とかくことにすれば，

$$(2.1)\qquad g_0(y)=\lambda_b\int_y^\infty g(t)dt$$

となることがよく知られている．

いまの場合，Y は E_l 分布に従うとしてあるので，

$$(2.2)\qquad g(y)=\frac{(l\lambda_b)^l\cdot y^{l-1}}{\Gamma(l)}\cdot e^{-l\lambda_b y}$$

である．

全く同様に，B 側からの呼が到着した時点から，A 側の呼が到着するまでの時間を X_0 とかくことにすれば，

$$(2.3)\qquad f_0(x)=\lambda_a\cdot\int_x^\infty f(t)dt$$

となる．ただし，$f(x)$ および $f_0(x)$ はそれぞれ X および X_0 の分布の確率密度関数であって，いまの場合，

$$(2.4)\qquad f(x)=\frac{(k\cdot\lambda_a)^k\cdot x^{k-1}}{\Gamma(k)}\cdot e^{-k\lambda_a x}$$

である．

さて，A 側からの呼の到着直後から，次の呼が到着するまでの時間は $(X\wedge Y_0)$ であって，この分布の確率密度関数を $h_A(t)$ とかくことにする．すなわち，

$$(2.5)\qquad h_A(t)=h_{X\wedge Y_0}(t)$$

である．

同様に，B 側からの呼の到着直後から，次の呼が到着するまでの時間の確率密度関数を $h_B(t)$ とかく．つまり，

$$(2.6)\qquad h_B(t)=h_{X\wedge Y_0}(t)$$

である．

これらの生ずる比率が λ_a 対 λ_b であるから，合流分布の確率密度関数 $h(t)$ は，

$$h(t)=\frac{\lambda_a}{\lambda}\cdot h_A(t)+\frac{\lambda_b}{\lambda}\cdot h_B(t) \tag{2.7}$$

によって求められる．ただし，$\lambda\equiv\lambda_a+\lambda_b$ である．(2.1) 式〜(2.7) 式を用いて，次の定理が得られる．

〔定理 2.1〕

呼源 A および B からの呼の到着時間間隔 X および Y の分布が，それぞれ平均 $1/\lambda_a$, $1/\lambda_b$ の E_k 分布，E_l 分布に従うとき，合流分布の確率密度関数 $h(t)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} h(t)=&\frac{\lambda_a}{l\cdot\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{l}\left[\left\{\frac{(k\cdot\lambda_a)^k\cdot t^{k-1}}{\Gamma(k)}\cdot e^{-k\lambda_a t}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(l\lambda_b t)^j\cdot e^{-l\lambda_b t}}{j!}\right\}\right.\\ &\left.+\left\{\frac{(l\cdot\lambda_b)^n\cdot t^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot e^{-l\lambda_b t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(k\lambda_a t)^j\cdot e^{-k\lambda_a t}}{j!}\right\}\right]\\ &+\frac{\lambda_b}{k\cdot\lambda}\cdot\sum_{m=1}^{k}\left[\left\{\frac{(l\cdot\lambda_b)^l\cdot t^{l-1}}{\Gamma(l)}\cdot e^{-l\lambda_b t}\cdot\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(k\lambda_a t)^j\cdot e^{-k\lambda_a t}}{j!}\right\}\right.\\ &\left.+\left\{\frac{(k\cdot\lambda_a)^m\cdot t^{m-1}}{\Gamma(m)}\cdot e^{-k\lambda_a t}\cdot\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(l\lambda_b t)^j\cdot e^{-l\lambda_b t}}{j!}\right\}\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

ただし，$\lambda\equiv\lambda_a+\lambda_b$ である．

なお，A 側または B 側の何れか一方の到着分布が指数分布であれば，他方が一般分布であっても，〔定理 2.1〕に準じて，容易に合流分布を導くことができる．

〔定理 2.2〕

呼源 A からの到着時間間隔分布が，平均 $1/\lambda_a$ の指数分布，呼源 B からの到着時間間隔分布は平均 $1/\lambda_b$ の一般分布であるとき，合流分布の確率密度関数は，

$$\begin{aligned} h(t)=&\frac{\lambda_a}{\lambda}\left\{\lambda_a\cdot e^{-\lambda_a t}\cdot\int_t^\infty g_0(y)dy+g_0(t)\cdot e^{-\lambda_a t}\right\}\\ &+\frac{\lambda_b}{\lambda}\left\{\lambda_a\cdot e^{-\lambda_a t}\cdot\int_t^\infty g(y)dy+g(t)\cdot e^{-\lambda_a t}\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．

ただし，$g(y)$ は呼源 B からの到着時間間隔 Y の分布の確率密度関数であり，$g_0(y)$ は Y_0 の分布の確率密度関数，すなわち

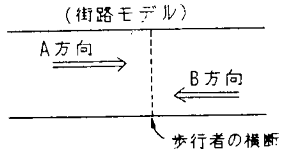
$$g_0(y)=\lambda_b\cdot\int_y^\infty g(t)dt$$

である．

3. 応用例

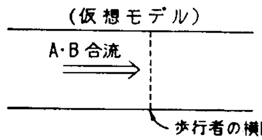
3.1 合流分布の応用

街路を走行する車の間隙を縫って歩行者が横断する状況を想定して，次のように考える．



(3.1 図)

ランダムに到着した歩行者が，横断に必要な時間内に，A または B 方向からの車の到着がないと判断したとき，横断する．この場合，取り扱いを容易にするために，A および B 方向の車の流れを一本化して，(3.2) 図のようにしても，一般性は失なわれないであろう．



(3.2 図)

さて，このような仮想モデルを考え，歩行者が横断しようとする地点に到着した時刻を原点にとる．また $u_n(t)dt$，$h(x)$，$h_0(x)$ および $A(x)$ を次のように定義する．

$u_n(t)dt$……時刻 t まで待っていて，$(t,\ t+dt)$ 内に n 番目の車が通過する確率素分

$h(x)$ ……車頭時間間隔分布（合流分布）の確率密度関数．

$h_0(x)$ ……時刻 t までに1台も車がこないで，$(t,\ t+dt)$ 内に最初の車が到着する確率素分．

$A(x)$ ……車頭時間間隔が x のとき，横断する確率．

このとき，横断待ち時間についての基本式として，

$$(3.1)\qquad W(s)=w_0(0)+\frac{w(0)\cdot\gamma_0(s)}{1-\gamma(s)}$$

が得られるということを，F.A. Haight が示している．ただし，$w(t)$ は横断待ち時間分布の確率密度関数であり，$W(s)$ はそのラプラス変換，つまり

$$(3.2)\qquad W(s)=\int_0^\infty w(t)\cdot e^{-st}dt$$

である．$w_0(0)$ は，待ち時間が0である確率であって，これは最初の車がやってくるまでに横断する確率であるから，

$$(3.3)\qquad w_0(0)=\int_0^\infty h_0(x)\cdot A(x)dx$$

である．これに対して，

$$\int_0^\infty h(x)\cdot A(x)dx$$

を $w(0)$ とおく．

また，$\gamma_0(s)$ および $\gamma(s)$ は，それぞれ

$$(3.4)\qquad \gamma_0(s)=\int_0^\infty h_0(t)\cdot\{1-A(t)\}\cdot e^{-st}dt$$

$$\gamma(s)=\int_0^\infty h(t)\cdot\{1-A(t)\}\cdot e^{-st}dt \tag{3.5}$$

である．

ここで，かりに A 方向の流れを平均 $1/\lambda_a$ の指数分布とし，B 方向の流れを平均 $1/\lambda_b$ の E_2 分布としてみると，〔定理 2.1〕により次式が得られる．

$$h(t)=\frac{1}{\lambda}\{\lambda_b\cdot\Lambda^2t+\lambda_a\cdot\Lambda\}\cdot e^{-\Lambda t} \tag{3.6}$$

$$h_0(t)=\lambda\cdot\int_t^\infty h(y)dy=\{\lambda+\lambda_b\cdot\Lambda t\}\cdot e^{-\Lambda t} \tag{3.7}$$

ただし，

$$\lambda\equiv\lambda_a+\lambda_b,\qquad \Lambda\equiv\lambda_a+2\lambda_b$$

である．

いま，τ だけの時間があった場合，横断しようとする確率 $A(\tau)$ に関して，例えば階段型の

$$A(\tau)=\begin{cases}0, & (0\leqq\tau<T)\\ 1, & (\tau\geqq T)\end{cases} \tag{3.8}$$

を仮定してみると，$w_0(0)$，$w(0)$，$\gamma_0(s)$，$\gamma(s)$ は次のようになる．(注．$A(\tau)$ についてのこの仮定は，単に計算の便宜上のものであって，必須のものではない．)

$$\begin{aligned} w_0(0)&=\int_T^\infty(\lambda+\lambda_b\cdot\Lambda t)\cdot e^{-\Lambda t}dt\\ &=(1+\lambda_b\cdot T)\cdot e^{-\Lambda T} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} w(0)&=\int_T^\infty \frac{1}{\lambda}(\lambda_b\cdot\Lambda^2t+\lambda_a\cdot\Lambda)\cdot e^{-\Lambda t}dt\\ &=\left(\frac{\lambda+\lambda_b\cdot\Lambda T}{\lambda}\right)\cdot e^{-\Lambda T} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0(s)&=\int_0^T e^{-st}\cdot(\lambda+\lambda_b\Lambda t)\cdot e^{-\Lambda t}dt\\ &=\frac{1}{(\Lambda+s)^2}\cdot[\{\lambda_b\Lambda+\lambda(\Lambda+s)\}-e^{-(\Lambda+s)T}\cdot\{(\lambda+\lambda_b\Lambda T)(\Lambda+s)+\lambda_b\Lambda\}] \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \gamma(s)&=\int_0^T e^{-st}\cdot\left\{\frac{\Lambda}{\lambda}\cdot(\lambda_b\Lambda t+\lambda_a)\right\}\cdot e^{-\Lambda t}dt\\ &=\frac{\Lambda}{\lambda\cdot(\Lambda+s)^2}\cdot\Big[\{\lambda_b\cdot\Lambda+\lambda_a\cdot(\Lambda+s)\}-e^{-(\Lambda+s)T}\cdot\{(\lambda_a+\cdots\lambda_b\Lambda T)(\Lambda+s)\\ &\qquad+\lambda_b\Lambda\}\Big] \end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.9)式～(3.12) 式を (3.1) 式に代入して，横断待ち時間分布のラプラス変換 $W(s)$ が得られる．すなわち，

$$W(s)=(1+\lambda_bT)e^{-\Lambda T}$$

$$+\frac{(\lambda+\lambda_b \Lambda T)\cdot e^{-\Lambda T}\cdot[\{\lambda_b\cdot\Lambda+\lambda(\Lambda+s)\}-e^{-(\Lambda+s)T}\cdot\{(\lambda+\lambda_b \Lambda T)(\Lambda+s)+\lambda_b \Lambda\}]}{\lambda\cdot(\Lambda+s)^2-\Lambda\cdot[\{\lambda_b\cdot\Lambda+\lambda_a(\Lambda+s)\}-e^{-(\Lambda+s)T}\cdot\{(\lambda_a+\lambda_b \Lambda T)(\Lambda+s)+\lambda_b \Lambda\}]}$$

(3.13)

となる.

(3.13) 式を用いて，横断待ち時間・分布の期待値分散などを直ちに求めることができる.

なおここでは，A 方向の流れが指数分布，B 方向が E_2 アーラン分布に従うとして，$W(s)$ を求めたのであるが，$A\cdot B$ 方向の流れが $E_l\cdot E_k$ 分布に従うときや，A 方向が指数分布で B 方向は一般分布に従うときにも，〔定理 2.1〕ないしは〔定理 2.2〕を用いて，全く同様の手順により，横断待ち時間分布のラプラス変換 $W(s)$ を求めることができる.

3.2 分流分布の応用

第1節でわれわれは，単に呼の到着のみに注目して，分流についての性質を調べたが，ここではサービスをも考慮した，いわゆる待ち行列系としての考察を行なってみよう.

分流呼を有する待ち行列（1.1 系図参照）は，第1扱者と第2扱者をきり離し，全く独立なサービス・ステーションを有する2つの単一待ち行列系とみて解析を進めることができる. 話を簡単にするために，次のような系を扱うことにしよう.

呼の到着は，平均 $1/\lambda$ の指数分布に従い，各扱者でのサービス時間は，それぞれ平均 $1/\mu_1$，$1/\mu_2$ の一般分布に従うものとし，さらに，到着した呼が，第1扱者への分流呼となる比率を α_1 第2扱者へ行く比率を $\alpha_2=1-\alpha_1$ とする.

系に到着した呼が，分流呼として第1扱者へ行く比率 α_1 は，あらかじめ定められるものとする. 例えば，どちらの扱者を選ぶかは，使用料金をいくらに定めるかによって事前にきまってくる定数であるとする.

経営者側で，もし特定の扱者にのみ，呼が殺到しがちであるという事態の生じないように，各扱者での使用料金を定めたいと考えるならば，どのようにしたらよいかを調べてみよう.（もちろん，この種の問題では，例えば2つの窓口の系人数の合計を最小にしたいという態度が自然に生じてくるであろう. しかしここでは，両方の窓口の混雑を均等化したいということにのみ，関心が払われている.）

さて，呼の到着時間間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うときには，第1扱者および第2扱者への分流呼の到着時間間隔分布は，平均

$$1/(\alpha_1\lambda)\ ,\quad 1/(\alpha_2\lambda)$$

の指数分布になるということに注意しよう. ここでいま，第1扱者・第2扱者での平均待ち呼数（サービスをうけているものを含む）を L_1，L_2 とし，平均待ち時間を W_1，W_2 とかくことにして，

$$L_1=L_2$$

となるような政策や，

$$W_1 = W_2$$

ならしむるような政策を考えてみよう．

$$\rho_i = \frac{\alpha_i \lambda}{\mu_i}, \qquad (i=1,\ 2)$$

とおいて，まず

$$L_1 = L_2$$

について調べてみる．

$M(\lambda)/G(\mu)/1$ での平均待ち呼数 L は

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + (\lambda \cdot \sigma_v)^2}{2 \cdot (1-\rho)}$$

（ただし，σ_v^2 はサービス時間の分散をあらわし，また $\rho=\lambda/\mu$ である．）

となるという，よく知られた結果を用いる．すなわち，第1扱者，第2扱者でのサービス時間の分散を $\sigma_{v_1}{}^2 \cdot \sigma_{v_2}{}^2$ とかくことにして，

$$\rho_1 + \frac{\rho_1{}^2 + (\alpha_1 \lambda \cdot \sigma_{v_1})^2}{2 \cdot (1-\rho_1)} = \rho_2 + \frac{\rho_2{}^2 + (\alpha_2 \lambda \cdot \sigma_{v_2})^2}{2 \cdot (1-\rho_2)} \tag{3.14}$$

ならしむればよい．

したがってもし，

$$\sigma_{v_1}/(1/\mu_1) = \sigma_{v_2}/(1/\mu_2)$$

のとき，つまり第1扱者・第2扱者でのサービス時間の変動係数が等しいときには，

$$\alpha_1/\alpha_2 = \mu_1/\mu_2 \tag{3.15}$$

ならしむればよいことがわかる．すなわち，平均サービス率に比例して，呼が扱者を選択しうるような料金政策をとればよい．しかし，$W_1 = W_2$ としたいというのであれば，サービス時間の変動係数が等しいからといって，(3.15) のような政策を用いるのは，一般には妥当でないことを，

$$\lambda_i W_i = L_i \quad , \qquad (\lambda_i = \alpha_i \lambda)$$

を用いて容易にたしかめることができる．

ここでは2つの扱者への分流呼を考慮したが，より多くの扱者への分流呼を有する系についても，議論は全く同様である．

文　　献

1）Haight, F.A. "Mathematical Theories of Traffic Flow", Academic Press (1963)

2）森村・大前，〝待ち行列の理論と実際〟，日科技連 (1962).

3）本間鶴千代，〝待ち行列の理論〟，理工学社 (1966).

4）佐々木綱，〝交通流理論〟，技術書院 (1966)