

集中サービス型待ち行列について†

福田 治郎*

1. 序 説

従来考えられてきた集団サービス型待ち行列では、大きさ s の集団客を一度にサービスするものであるが、作業の種類によってはその性質上集団ではサービスを行なうことができないで、一定個数の部品または製品がたまってからサービスを開始するが、そのサービスは1個ずつについて行なわれるという方式も考えられる。これは一般にサービス繁忙時間がコマ切れになることによるサービス能率の低下あるいは経費の増加を防ぐためにとられるもので、これを集中サービス方式と呼ぶことにする。特にサービス開始時にあたって特殊な段取時間または段取費を要するものではこの方式を採るのが都合がよいであろう。

このようなサービス方式を解析するために、つぎのような待ち行列モデルを設定する：客の到着はポアソン型であると仮定し、サービスについては客がチャンネルの前に s 個到着してから初めて開始され、これは到着順に1個ずつ行なうものとし、待ち行列が解消されるまで継続される。そして次にサービスが開始されるに当っては、上の方式がくり返されるものとする。このときサービス時間々隔の分布はサービス開始第1客の場合とそれにつづく第2客以後のそれとは必ずしも同一ではないとする。この種の区別を取入れた文献として〔1〕がある。以下この待ち行列について、サービス時間々隔の分布が一般の場合には「Imbedded Markov Chain」法を用いて解析し、特に指数型を仮定する場合には任意時点での解析を行なうことにする。そのあとでチャンネルを2個に増したいわゆる複チャンネルについても解析するが、このときは Kendall の記号を用いれば $M/M/2(\infty)$ の場合である。最後にこの待ち行列の応用例についても簡単にふれる。

2. サービス分布が一般の場合

既に述べたように客の到着は到着率 λ のポアソン分布をなすと仮定するから、その分布関数を $A(t)$ とすれば

$$(1) \quad A(t) \equiv 1 - e^{-\lambda t}$$

† 1967年7月25日受理

* 広島大学工学部

で与えられる。サービスについては、サービスが開始される第1客の時間分布を $B_1(t)$ 、第2客以後の客のそれを $B(t)$ とし、これらは互に独立であるとする。このとき

$$(2) \quad \mu_1^{-1} \equiv \int_0^{\infty} t dB_1(t), \quad \mu^{-1} \equiv \int_0^{\infty} t dB(t)$$

とすれば、 μ_1 、 μ はそれぞれのサービス率である。つぎに第1客の1サービス期間中に n 人の客が到着する確率を h_n 、第2客以後の客の同様の確率を k_n とすれば

$$(3) \quad h_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dB_1(t), \quad k_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dB(t)$$

で与えられる。ところで

$$(4) \quad H(\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h_n \omega^n, \quad K(\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} k_n \omega^n$$

と定義すれば

$$(5) \quad H(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-\omega)t} dB_1(t), \quad K(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-\omega)t} dB(t)$$

となる。特別の場合として $B_1(t)$ 、 $B(t)$ がそれぞれ次数 f_1 、 f のアーラン分布をなす、すなわち

$$(6) \quad dB_1(t) = \frac{(f_1 \mu_1)^{f_1}}{\Gamma(f_1)} t^{f_1-1} e^{-f_1 \mu_1 t} dt, \quad dB(t) = \frac{(f \mu)^f}{\Gamma(f)} t^{f-1} e^{-f \mu t} dt$$

とすれば

$$(6)' \quad H(\omega) = \left\{ 1 + \frac{\rho_1(1-\omega)}{f_1} \right\}^{-f_1}, \quad K(\omega) = \left\{ 1 + \frac{\rho(1-\omega)}{f} \right\}^{-f}$$

となる。ただし $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ 、 $\rho = \lambda/\mu$ とする。

いま第 m 次サービスが完了した直後、この系内にある客の数が n である状態確率を $p^m(n)$ で表わし、これが満足する方程式を求めるとつぎのようになる：

$$(7.1) \quad 1 \leq m < s, \quad n \geq s - (m+1) \text{ に対して}$$

$$p^{m+1}(n) = p^m(n+1)k_0 + p^m(n)k_1 + \cdots + p^m(s-m)k_{n-s+m+1},$$

$$(7.2) \quad m \geq s, \quad 0 \leq n < s-1 \text{ に対して}$$

$$p^{m+1}(n) = p^m(n+1)k_0 + p^m(n)k_1 + \cdots + p^m(1)k_n,$$

$$(7.3) \quad m \geq s, \quad n \geq s-1 \text{ に対して}$$

$$p^{m+1}(n) = p^m(n+1)k_0 + \cdots + p^m(1)k_n + p^m(0)h_{n-s+1}.$$

以下この(7)の解を求めるに当って、遷移状態と定常状態の各場合に分けて解析する。

[I] 遷移状態の解析

$$(8) \quad P(n, z) \equiv \begin{cases} \sum_{m=s-n}^{\infty} P^m(n) z^{m-1}, & n < s \\ \sum_{m=1}^{\infty} P^m(n) z^{m-1}, & n \geq s \end{cases}$$

と定義し、初期条件として

$$(9) \quad P^i(n_0)=1, \quad n_0 \geq s-1$$

とおく. このとき (7) からつぎの方程式を得る:

$$(10 \cdot 1) \quad P(n, z) = z[P(n+1, z)k_0 + \dots + P(1, z)k_n], \quad 0 \leq n < s-1$$

$$(10 \cdot 2) \quad P(n, z) = \delta^n_{n_0} + z[P(n+1, z)k_0 + \dots + P(1, z)k_n + P(0, z)h_{n-s+1}], \quad n \geq s-1.$$

そこで

$$(11) \quad X(z, \omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P(n, z) \omega^n$$

とおけば, (10) から

$$(12) \quad X(z, \omega) = \frac{\omega^{n_0+1} + zP(0, z)\{\omega^s H(\omega) - K(\omega)\}}{\omega - zK(\omega)}$$

を得る.

この分母は $|z| < 1$ なる限り単位円内 $|\omega| < 1$ でただ 1 つのゼロ点をもつことが Rouché の定理によって示される. したがってこれを $\alpha(z)$ で表わそう. このとき $X(z, \omega)$ の正則性から $P(0, z)$ は $\alpha(z)$ で表わされ

$$(13) \quad P(0, z) = \frac{\{\alpha(z)\}^{n_0+1}}{z[K\{\alpha(z)\} - \{\alpha(z)\}^s H\{\alpha(z)\}]}$$

となり, これを (12) に代入すれば母関数 $X(z, \omega)$ が確定する. (13) にふくまれる $\alpha(z)$ はラグランジュの公式から

$$(14) \quad \{\alpha(z)\}^j = j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[a^{j-1} \{K(a)\}^n \right]_{a=\alpha_0}, \quad j=1, 2, \dots$$

で与えられる.

特別の場合として $K(\omega) \equiv H(\omega)$ となるとき, (13) は

$$(15) \quad P(0, z) = \frac{\{\alpha(z)\}^{n_0}}{1 - \{\alpha(z)\}^s}$$

となって, 比較的容易に遷移状態を知ることができるであろう. 図 1 は $p^m(0)$ の変化を次数

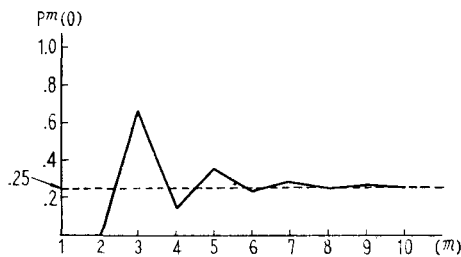


図 1 $p^m(0)$ の変化: $s=2, \rho=\rho_1=0.5, n_0=1$ のとき

$f_1=f=2$ のアーラン分布で $s=2, \rho=\rho_1=0.5; n_0=1$ の場合について図示したもので, ここに破線で示す直線はつぎの〔II〕, (22) から得られる

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p^m(0) = P(0) = (1-\rho)/s = 0.25$$

を与えたものである. 系の定常状態への近ずき方を $P^m(0)$ の変化だけで完全に知ることは出来

ないが、その大体をつかむことはできるであろう。この場合には $m=7, 8$ でほとんど定常化されたとみなされる。

〔II〕 定常状態の解析

定常解が存在するとして

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} p^m(n) = P(n)$$

とすれば、 $P(n)$ の満足する方程式は (7.2), (7.3) において $m, m+1$ を抹消して得られる、すなわち

$$(17.1) \quad P(n) = P(n+1)k_0 + P(n)k_1 + \cdots + P(1)k_n, \quad 0 \leq n < s-1,$$

$$(17.2) \quad P(n) = P(n+1)k_0 + \cdots + P(1)k_n + P(0)h_{n-s+1}, \quad n \geq s-1.$$

分布 $\{P(n)\}$ の母関数を

$$(18) \quad P(\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\omega^n$$

と定義すれば (17) から〔I〕の場合と同様にして

$$P(\omega) = \frac{\omega^s H(\omega) - K(\omega)}{\omega - K(\omega)} P(0)$$

を得る。正規化条件

$$(20) \quad P(1) = 1$$

を用いれば、

$$(21) \quad \rho < 1$$

なる条件のもとで、つぎの結果を得る：

$$(22) \quad P(0) = (1-\rho)/(s+\rho_1-\rho)$$

これを (19) に代入すれば $P(\omega)$ は確定する：

$$(19') \quad P(\omega) = \frac{1-\rho}{s+\rho_1-\rho} \frac{\omega^s H(\omega) - K(\omega)}{\omega - K(\omega)}$$

以上の結果を用いて、系内にある客の平均数 L および行列の平均長さ L_q を求める。

$$(23) \quad L = \frac{1}{2(1-\rho)(s+\rho_1-\rho)} \left[\{s(s-1) + 2s\rho_1 + \lambda^2(\sigma_1^2 - \sigma^2) + \rho_1^2 - \rho^2\} (1-\rho) + (\lambda^2\sigma^2 + \rho^2)(s+\rho_1-\rho) \right],$$

ただし、ここに σ_1^2, σ^2 は次式で与えられる：

$$(24) \quad \sigma_1^2 \equiv \int_0^{\infty} (t - \mu_1^{-1})^2 dB_1(t), \quad \sigma^2 \equiv \int_0^{\infty} (t - \mu^{-1})^2 dB(t)$$

特に $B(t), B_1(t)$ が (6) で与えられるときは $\lambda^2\sigma^2 = f^{-1}\rho^2, \lambda^2\sigma_1^2 = f_1^{-1}\rho_1^2$ となるから (23) はつぎのようになる：

$$(25) \quad L = \left(1 + \frac{1}{f_1}\right) \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{s+\rho_1-\rho} \left\{ \frac{s(s-1)}{2} + s\rho_1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{f_1}\right) \rho_1^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{f}\right) \rho^2 \right\}.$$

つぎに L_q については

$$(26) \quad L_q = L - (s + \rho_1 - 1) / (s + \rho_1 - \rho)$$

を得る。

以上の結果のうち、(25)においてサービス時間の分布が (a) 指数型 ($f_1 = f = 1$), (b) 定サービス型 ($f_1 = f = \infty$) の各場合について

$$\begin{aligned} \rho_1 &= k\rho; \quad k=1, 3, 5, 8 \\ s &= 2(2)20, \quad \rho=0 \sim 1.0 \end{aligned}$$

の範囲で系内の客の平均数 L の変化を図示したのが付録、図 1, II である。図から判るように s が大きくなるにつれて L は ρ の値に関係なく、大体 s の 1 の増加に対して 0.5 だけ増加する。

このことは (25) から s についての漸近展開を求めると

$$(27) \quad L = \left(1 + \frac{1}{f_1}\right) \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{s-1}{2} + \frac{\rho_1 + \rho}{2}, \quad s \gg 1$$

となることから確かめられる。

3. サービス分布が指数型の場合

特にサービス分布が指数型のときは、前節とちがって、任意時点での状態解析ができるから応用上重要である。本節ではこの場合の解析を行なうが、到着については前節の (1) と同一の分布 $A(t)$ を、そしてサービスについては前節の $B_1(t)$, $B(t)$ に対応するものとしては前節 (6) において $f_1 = f = 1$ の場合と仮定する。このような待ち行列における定常状態確率をつぎのように定める：系内にいる客の数が n , $0 \leq n \leq s-1$ で、サービスの開始を待っている定常状態確率を $E(n)$ で表わす。系内の客の数が n であるが、サービスが行なわれており、そのサービスが開始第 1 客のそれ (サービス率 μ_1 の指数型) である確率を $q(n)$, $n \geq s$ とする。これに対しそのサービスが第 2 客以後の客のそれ (サービス率 μ の指数型) である確率を $p(n)$, $n \geq 1$ とする。図 2 はこれらの確率と状態の推移とを示すものである。実線の矢印は客の到着による推移を示し、その確率は高位の無限小を無視すれば λdt で与えられる。破線のそれは μ サービスの完了による推移で、その確率は μdt 、波線のそれは μ_1 サービスの完了によるもので、その推移確率は $\mu_1 dt$ である。枠でかこんだチャンネル記号のうちの黒丸は μ_1 サービスの状態、白丸は μ サービスの状態を示すものである。

図 2 を参照すれば、つぎの定常状態方程式を得る；

$$(1.1) \quad \lambda E(n) = \lambda E(n-1), \quad 1 \leq n < s$$

$$(1.2) \quad \lambda E(0) = \mu p(1)$$

$$(1.3) \quad (\lambda + \mu) p(1) = \mu p(2)$$

$$(1.4) \quad (\lambda + \mu) p(n) = \lambda p(n-1) + \mu p(n+1), \quad 1 < n < s-1$$

$$(1.5) \quad (\lambda + \mu) p(n) = \lambda p(n-1) + \mu p(n+1) + \mu_1 q(n+1), \quad n \geq s-1$$

$$(1.6) \quad (\lambda + \mu_1) q(s) = \lambda E(s-1)$$

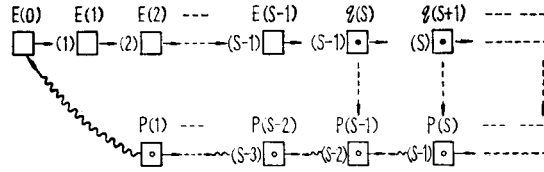


図2 単一チャンネルにおける状態推移図

$$(1.7) \quad (\lambda + \mu_1)q(n) = \lambda q(n-1), \quad n \geq s+1.$$

これらの方程式は以下に示すように容易に解くことができる。

$$(2) \quad P(\omega) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\omega^{n-1}, \quad Q(\omega) \equiv \sum_{n=s}^{\infty} q(n)\omega^{n-s}$$

と定義すれば (1.6), (1.7) および (1.1) から

$$(3) \quad Q(\omega) = \frac{\rho_1}{1 + \rho_1(1-\omega)} E(0),$$

ただし $\rho = \lambda/\mu$, $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ とする。

つぎに (1.3) ~ (1.5) および (3) を用いれば

$$P(\omega) = \frac{\rho\{\rho_1(1-\omega) + (1-\omega^{s-1})\}}{(1-\omega)(1-\rho\omega)\{1 + \rho_1(1-\omega)\}} E(0)$$

を得る。正規化条件

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{s-1} E(n) + P(1) + Q(1) = 1$$

を用いて $E(0)$ を求めると

$$(6) \quad \rho < 1$$

がなりたつとき

$$(7) \quad E(0) = (1-\rho)/(s+\rho_1-\rho)$$

となる。これを (3), (4) に代入すれば母関数 $P(\omega)$, $Q(\omega)$ が確定し、定常状態分布が定まったことになる。

この分布で server が idle の確率を $P(I)$, busy のそれを $P(B)$ とすれば

$$(8) \quad P(I) = \frac{s(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho}, \quad P(B) = \frac{s\rho + \rho_1 - \rho}{s+\rho_1-\rho}$$

となり、特に $\rho_1 = \rho$ ならば、 $P(I) = 1-\rho$, $P(B) = \rho$ となって待ち行列理論としてよく知られた公式である。($P(I)$ の変化を表わすグラフを図3に示す)

つぎに §2 と同じ意味の L , L_q を表わす公式を求めよう。

$$(9) \quad L = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \frac{1}{s+\rho_1-\rho} \left\{ \frac{s(s-1)}{2} + s\rho_1 + \rho_1^2 - \rho^2 \right\},$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{s-1}{2} + \frac{\rho_1 - \rho}{s+\rho_1-\rho} \left(\frac{s+1}{2} + \rho_1 \right),$$

$$(10) \quad L_q = L - \frac{s\rho + \rho_1 - \rho}{s+\rho_1-\rho}.$$

(9) で与えられる L は §2, (25) において $f_1=f=1$ とおいた結果と一致するが, (10) の L_q は §2, (26) のそれとは一致せず, 条件 (6) から前者は後者より大である. このことは(26) ではサービス終了直後だけを見ているが, (10) では任意時点で見ていることによる違いである.

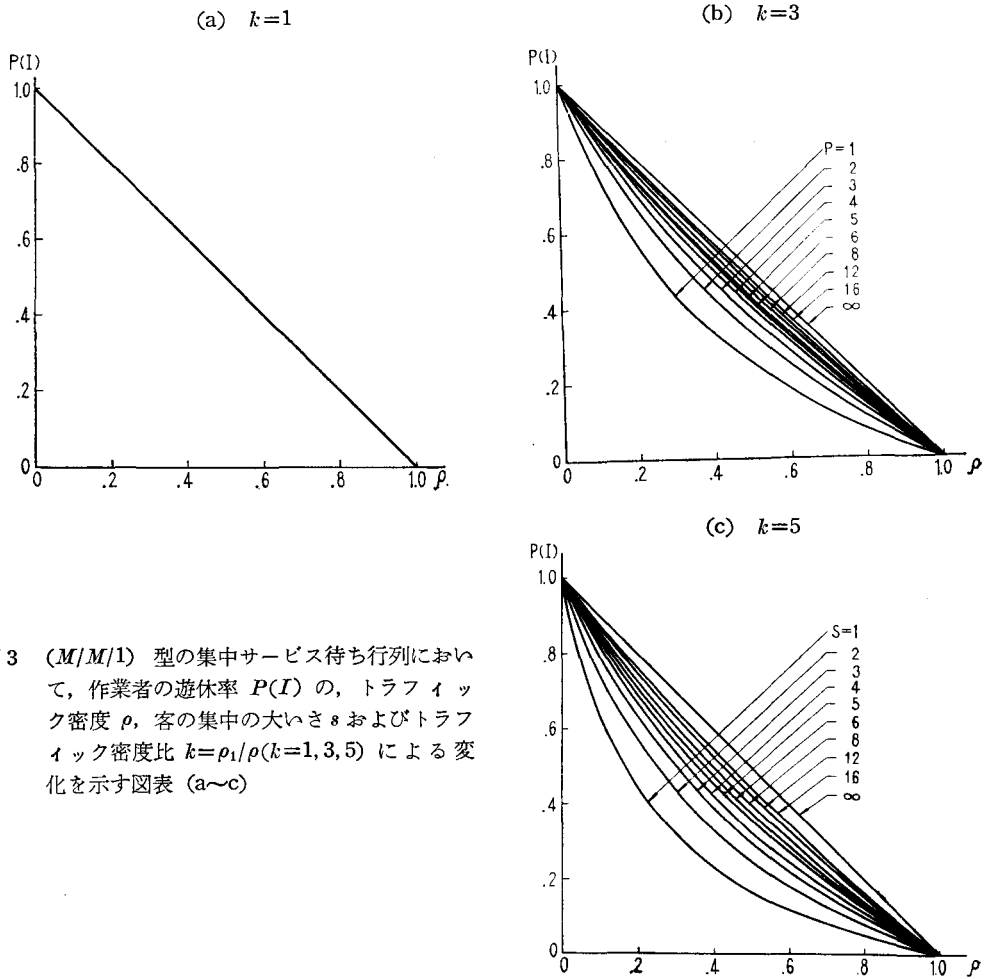


図3 (M/M/1) 型の集中サービス待ち行列において, 作業者の遊休率 $P(I)$ の, トラフィック密度 ρ , 客の集中の大きさ s およびトラフィック密度比 $k=\rho_1/\rho (k=1, 3, 5)$ による変化を示す図表 (a~c)

4. busy period

busy period の継続時間の分布を explicit に求める問題は結果を得ているが, ページ数の都合で別の機会にゆずって, ここには1単位時間当りの busy period の平均回数 BPN , 1 busy period の平均継続時間 BT , および 1 busy period 中の平均サービス個数 BN を求めることに止める.

十分長い時間 τ をとると, この間に busy period と idle period とは交互に現われてその回数は等しい. ところで各期間の総時間数は平均として $\tau P(B)$, $\tau P(I)$ である. ところが idle period の時間分布は明らかに自由度 $2s$ の χ^2 分布であるから, その平均時間は $s\lambda^{-1}$ に等しい. したがって idle period の時間 τ 内での平均回数は $\tau P(I)/s\lambda^{-1}$ に等しい. これより

$$(1) \quad BPN = P(I) / s\lambda^{-1}$$

$$(2) \quad BT = \tau P(B) / \{\tau P(I) / s\lambda^{-1}\} = sP(B) / \lambda P(I)$$

を得、これに §3, (8) を代入すれば

$$(1') \quad BPN = \frac{\mu\rho(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho},$$

$$(2') \quad BT = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{s}{1-\rho} + \frac{\rho_1-\rho}{\rho(1-\rho)} \right\}$$

つぎに BN については

$$\mu_1^{-1} + (BN-1)\mu^{-1} = BT$$

を BN について解き (2) を用いて変形し、§3, (8) を代入すれば

$$(3) \quad BN = \frac{s+\rho_1-\rho}{1-\rho}$$

となる。以上の考察では待ち行列を $M/M/1$ 型に限定したが、ここで求めた公式 (1'), (2'), (3) および §3, (8) は実は $M/G/1$ 型の場合についてもなりたつことを以下に示そう。

まず (2') がなりたつことを示す。busy period が初まるのは客が s 人待合室にたまってからであるが、これら s 人がサービスを終るまでの所要時間は平均として

$$(4) \quad \frac{1}{\mu_1} + (s-1)\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda} \{\rho_1 + (s-1)\rho\}$$

である。つぎにこの平均時間内に待合室に到着する客の平均数は、到着率が λ であるから $\rho_1 + (s-1)\rho$ であり、これらの客のサービスが完了するまでの平均所要時間は、これらの客のサービス率は μ であるから

$$(5) \quad \frac{1}{\mu} \{\rho_1 + (s-1)\rho\} = \frac{1}{\lambda} \rho \{\rho_1 + \rho(s-1)\}$$

となる。以下このような手続きをくり返せば、結局

$$\begin{aligned} BT &= \frac{1}{\lambda} \{\rho_1 + (s-1)\rho\} + \frac{1}{\lambda} \rho \{\rho_1 + (s-1)\rho\} + \dots \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{\rho_1 + (s-1)\rho}{\rho(1-\rho)} \end{aligned}$$

または変形して

$$(6) \quad BT = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{s}{1-\rho} + \frac{\rho_1-\rho}{\rho(1-\rho)} \right\}$$

を得る。これは (2') と全く一致する。ところで (2) は一般の分布に対してなりたつからこれと (6) とを用いて §3, (8) が得られ、したがって (1'), (3) を導くことができる。

5. 複チャンネルへの拡張

§3 の待ち行列を 2 個のチャンネルの場合に拡張する。系内での行列は 1 つで、行列の長さが

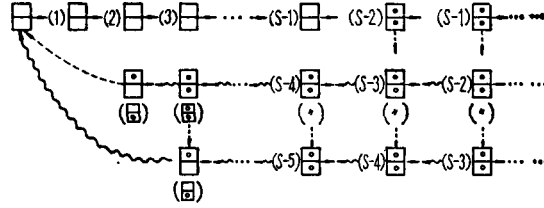


図4 複チャンネルにおける状態推移図

初めて s に達したとき先頭の 2 人 ($s \geq 2$) が同時にそれぞれのチャンネルに入ってサービス率 μ_1 の指数型サービスを受ける。それ以後のサービスについては、客が系内にいる限りサービス率 μ の指数型サービスが続けられる。この場合客の到着については従来通り到着率 λ のポアソン型である。このとき図 4 に対応する状態推移図は図 4 である。

さてサービスの開始を待つ定常状態確率を、待つ客の数 n にしたがって $E(n)$, $0 \leq n \leq s-1$ で表わす (図 4 の上段左側の部分)。系内に 1 人の客がいて、いずれかのチャンネルで μ_1 サービスを受けている定常状態確率を $P_*(1)$, μ サービスを受けているそれを $P_0(1)$ で表わす (図 4 の中段, 下段の最左端の場合)。つぎに系内に n 人の客がいて両チャンネルとも μ_1 , または μ サービスを受けている場合を $P_{**}(n)$, $n \geq s$, $P_{00}(n)$, $n \geq 2$ で表わす (図 4 の上段の右側, または下段の大部分)。最後に各チャンネルが異質のサービスを受けている場合を $P_{0*}(n)$, $n \geq 2$ で表わせば (図 4 の中段の大部分), これらの定常状態確率の間には, つぎの基本方程式がなりたつ:

$$(1.1) \quad \lambda E(n) = \lambda E(n-1), \quad 1 \leq n < s$$

$$(1.2) \quad (\lambda + 2\mu_1) P_{**}(s) = \lambda E(s-1)$$

$$(1.3) \quad (\lambda + 2\mu_1) P_{**}(n) = \lambda P_{**}(n-1), \quad n \geq s+1$$

$$(1.4) \quad (\lambda + \mu_1) P_*(1) = \mu P_{00}(2)$$

$$(1.5) \quad (\lambda + \mu + \mu_1) P_{0*}(n) = \lambda P_{0*}(n-1) + \mu P_{0*}(n+1), \quad 2 \leq n \leq s-2$$

$$(1.6) \quad (\lambda + \mu + \mu_1) P_{0*}(n) = \lambda P_{0*}(n-1) + \mu P_{0*}(n+1) + 2\mu_1 P_{**}(n+1), \quad n > s-2$$

$$(1.7) \quad \lambda E(0) = \mu P_{00}(1) + \mu_1 P_*(1)$$

$$(1.8) \quad (\lambda + \mu) P_{00}(1) = \mu_1 P_{**}(2) + 2\mu P_{00}(2)$$

$$(1.9) \quad (\lambda + 2\mu) P_{00}(n) = \lambda P_{00}(n-1) + 2\mu P_{00}(n+1) + \mu_1 P_{0*}(n+1), \quad n \geq 2,$$

ただし上の方程式で $P_{0*}(1) \equiv P_*(1)$, $P_{00}(1) \equiv P_{00}(1)$ とみなす。(1) を解くために, 例によってつぎのように母関数を定義する:

$$(2) \quad \begin{cases} X(\omega) \equiv \sum_{n=s}^{\infty} P_{**}(n) \omega^{n-s} \\ Y(\omega) \equiv P_*(1) + \sum_{n=2}^{\infty} P_{0*}(n) \omega^{n-1} \left(\equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_{0*}(n) \omega^{n-1} \right) \\ Z(\omega) \equiv P_{00}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} P_{00}(n) \omega^{n-1} \left(\equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}(n) \omega^n \right) \end{cases}$$

このとき, (1.1)~(1.3) より

$$(3) \quad X(\omega) = \frac{\rho_1 E(0)}{1 + \rho_1(1-\omega)}, \quad \rho_1 = \frac{\lambda}{2\mu_1}$$

(1.4)~(1.6) および (3) を用いて

$$(4) \quad Y(\omega) = \frac{(1-\omega)\{1 + \rho_1(1-\omega)P.(1) - 2\rho\omega^{s-1}E(0)\}}{\{2\rho_1\rho\omega^2 - (2\rho_1\rho + \rho_1 + \rho)\omega + \rho_1\}\{\rho_1^{-1} + (1-\omega)\}}, \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

(1.8), (1.9) から

$$(5) \quad Z(\omega) = \frac{(2-\omega)P_o(1) + \rho\rho_1^{-1}P.(1) - \rho\rho_1^{-1}Y(\omega)}{2\{\rho\omega^2 - (1+\rho)\omega + 1\}}$$

(4) の分母の中で $2\rho_1\rho\omega^2 - (2\rho_1\rho + \rho_1 + \rho)\omega + \rho_1$ の $|\omega| < 1$ をみたすゼロ点を α とすれば

$$(6) \quad \alpha = \frac{2\rho_1\rho + \rho_1 + \rho - \sqrt{(2\rho_1\rho + \rho_1 + \rho)^2 - 8\rho_1^2\rho}}{4\rho_1\rho}$$

そこで $Y(\omega)$ の正則性から

$$(7) \quad P.(1) = \frac{2\rho\alpha^{s-1}E(0)}{(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}}$$

を得る. (1.7), (7) を用いれば

$$(8) \quad P_o(1) = 2\rho E(0) \left[1 - \frac{\rho\alpha^{s-1}}{\rho_1(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right]$$

を得る. (7), (8) より, ここであとの計算の便宜のためつぎの関係式を求めておく.

$$(9) \quad P.(1) + P_o(1) = 2\rho E(0) \left[1 + \frac{(\rho_1 - \rho)\alpha^{s-1}}{\rho_1(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right]$$

以上の結果と正規化条件:

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{s-1} E(n) + X(1) + Y(1) + Z(1) = 1$$

とを用いて $E(0)$ を求める. ところで (3)~(8) から

$$X(1) = \rho_1 E(0), \quad Y(1) = 2\rho_1 E(0)$$

$$Z(1) = \{\rho_1 P_o(1) + \rho Y'(1)\} / \{2\rho_1(1-\rho)\}, \quad \text{ただし}$$

$$Y'(1) = \rho^{-1} \{ \{6\rho\rho_1^2 + 2(s-2)\rho\rho_1 - 2\rho_1^2\} E(0) + \rho_1 P.(1) \}.$$

これらの結果を (10) に代入して $E(0)$ を求めると

$$(11) \quad E(0) = (1-\rho) \left[s + \rho + (\rho_1 - \rho) \left\{ 2 + \frac{\rho\alpha^{s-1}}{\rho_1(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right\} \right]^{-1}$$

を得る. 以上で母関数 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ および $Z(\omega)$ は確定したことになる. 以下にこれらの母関数を用いてこの待ち行列に関連するパラメータのいくつかを求めよう.

まず両チャンネルとも busy である確率 $P_2(I)$, 少なくともいずれか一方が busy である確率 $P_1(I)$ は (9), (11) を用いて次式で与えられる:

$$(12) \quad \begin{cases} P_2(I) = \sum_{n=0}^{s-1} E(n) = sE(0) \\ P_1(I) = \sum_{n=0}^{s-1} E(n) + P.(1) + P_o(1) \end{cases}$$

$$= \left[s + 2\rho \left\{ 1 + \frac{(\rho_1 - \rho)\alpha^{s-1}}{\rho_1(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right\} \right] E(0)$$

つぎに系内にある客の平均数 L , 行列の平均長さ L_q は次式で与えられる:

$$(13) \quad L = E(0) \left[\frac{s-1}{1-\rho} \left\{ \frac{s}{2} + 2(\rho_1 - \rho) + \frac{\rho}{1-\rho} \right\} \right. \\ \left. + \frac{(\rho_1 - \rho)\{\rho + \rho_1(1-\rho)\}}{\rho_1(1-\rho)^2} \cdot \frac{\alpha^{s-1}}{(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right. \\ \left. + \frac{(1-\rho)(\rho_1 - \rho)\{4\rho_1\rho - (\rho_1 + \rho)\} + 2\rho_1\rho}{\rho(1-\rho)^2} \right]$$

$$(14) \quad L_q = L - 2\{1 - P_1(I)\} \\ = L - 2 \left[1 - \left\{ s + 2\rho \left(1 + \frac{(\rho_1 - \rho)\alpha^{s-1}}{\rho_1(1-\alpha)\{1 + \rho_1(1-\alpha)\}} \right) \right\} E(0) \right]$$

以上の諸公式は特に $\rho_1 = \rho$ のとき簡単になり, それらをまとめると次のようになる:

$$(15.1) \quad E(0) = (1-\rho)/(s+\rho), \quad \rho = \lambda/2\mu$$

$$(15.2) \quad P_2(I) = s(1-\rho)/(s+\rho), \quad P_1(I) = (s+2\rho)(1-\rho)/(s+\rho)$$

$$(15.3) \quad L = \frac{1}{s+\rho} \left\{ (s-1) \left(\frac{s}{2} + \frac{\rho}{1-\rho} \right) + \frac{2\rho}{1-\rho} \right\}$$

$$(15.4) \quad L_q = L - 2\rho.$$

さてこの節で求めた結果は $\rho_1 = \rho$ でないときは極めて複雑で利用しにくいので, $E(0)$, $P_1(I)$, $P_2(I)$ および L を与える数表を

$$\rho_1 = k\rho : k=1(1)10, \quad s=2(1)20, \quad \rho=0(0.1)1.0$$

に対して作ったが, 大がかりなものであるから, ここでは割愛してこの中から一部分を図示したものを示す. 図5, および付録, 図IIIはそれぞれ $P_2(I)$, L の変化を

$$\rho_1 = k\rho : k=1, 3, 5, 8, \quad s=2(2)20, \quad \rho=0 \sim 1.0$$

に対して図示したものである. L のグラフについては単一チャンネルの場合に注意したように, この場合も s が大きいとき ρ , ρ_1 に関係なく, s の1の増加に対し L は0.5の増加になっている. このことはつぎのようにして解析的にも導くことができる. (6) で与えられる α は $0 < \alpha < 1$ であるから十分大きい s に対しては $\alpha^s \rightarrow 0$ として (11) から

$$(16) \quad E(0) = (1-\rho)/(s+2\rho_1-\rho), \quad s \gg 1$$

したがって (12) より

$$(17) \quad \begin{cases} P_2(I) = s(1-\rho)/(s+2\rho_1-\rho), & s \gg 1 \\ P_1(I) = (s+2\rho)(1-\rho)/(s+2\rho_1-\rho), & s \gg 1 \end{cases}$$

また (13) から L の近似式として

$$(18) \quad L = \frac{1-\rho}{s+2\rho_1-\rho} \left[\frac{s-1}{1-\rho} \left\{ \frac{s}{2} + 2(\rho_1-\rho) + \frac{\rho}{1-\rho} \right\} + \frac{(1-\rho)(\rho_1-\rho)\{4\rho_1\rho - (\rho_1+\rho)\} + 2\rho_1\rho}{\rho(1-\rho)^2} \right], \quad s \gg 1$$

を得る。(18)においてさらに s について漸近展開すれば

$$(18') \quad L \doteq \frac{1}{2}(s-1) + (\rho_1 - \frac{3}{2}\rho) + \frac{\rho}{1-\rho}$$

となって、上述のことが確かめられた。(16)~(18) は s が大きいときの近似式として有用な公式であることは言うまでもない。なおついでに (17) において $s \rightarrow \infty$ とすれば $P_1(I)$, $P_2(I) \rightarrow (1-\rho)$ となることを付言しよう。

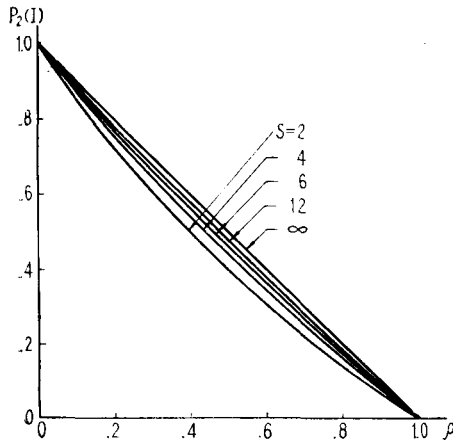
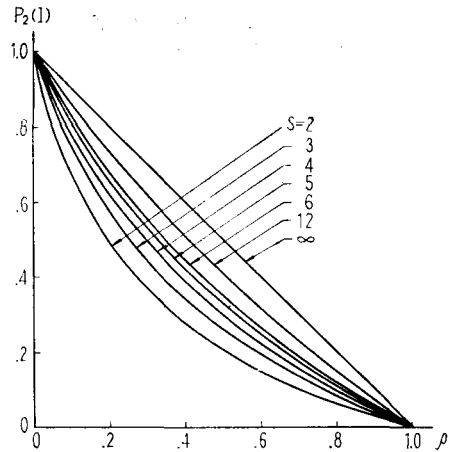
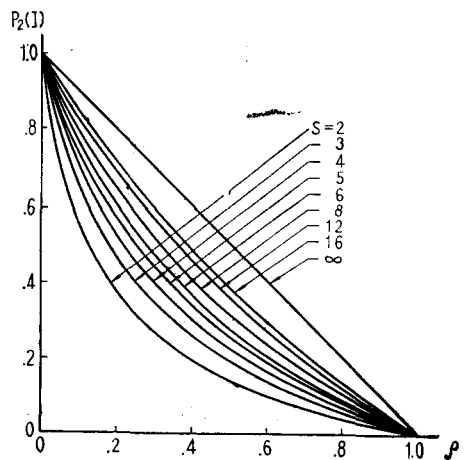
(a) $k=1$ (b) $k=3$ (c) $k=5$ 

図5 ($M/M/2$) 型の集中サービス待ち行列において、両作業員とも遊休の確率 $P_2(I)$ の、トラフィック密度 ρ 、客の集中の大きさ s およびトラフィック密度比 $k=\rho_1/\rho$ ($k=1, 3, 5$) による変化を示す図 (a~c)

6. 複チャンネルの busy period

複チャンネルにおける busy period とは少なくともいずれか一方が busy であるサービスの

継続時間であるとするれば、単位時間当りの busy period の平均数 BP_N および busy period の平均継続時間 BT を求めることができる。§4 の場合と同様に十分長い時間 τ において busy period と idle period との回数は等しく、これは平均として $\tau P_2(I)/s\lambda^{-1}$ で与えられる。したがって

$$(1) \quad BP_N = \lambda s^{-1} P_2(I) = \lambda E(0)$$

特に $\rho_1 = \rho$ ならば

$$(1') \quad BP_N = 2\mu\rho(1-\rho)/(s+\rho)$$

また s が大きいときの近似式としては §5, (16) を (1) に代入すれば

$$(1'') \quad BP_N = 2\mu\rho(1-\rho)/(s+2\rho_1-\rho), \quad s \gg 1$$

つぎに BT については

$$BT = \tau \{1 - \rho_2(I)\} / \left(\frac{\tau P_2(I)}{s\lambda^{-1}} \right) = \frac{s}{2\mu\rho} \frac{1 - P_2(I)}{P_2(I)}$$

したがって

$$(2) \quad BT = \frac{1}{2\mu\rho} \frac{1 - sE(0)}{E(0)}$$

特に $\rho_1 = \rho$ のとき

$$(2') \quad BT = (s+1)/\{2\mu(1-\rho)\}$$

また s が大きいとき

$$(2'') \quad BT = \frac{1}{2\mu\rho} \frac{2\rho_1 + (s-1)\rho}{1-\rho}, \quad s \gg 1.$$

最後に 1 busy period 内での 1 チャンネル当りの平均サービス回数を BN_1 とすれば、平均として

$$\mu_1^{-1} + (BN_1 - 1)\mu^{-1} = BT - \frac{\tau\{P_1(1) + P_0(1)\}/2}{\left(\frac{\tau P_2(I)}{s\lambda^{-1}}\right)}$$

がなりたつから、これを BN_1 について解けば

$$(3) \quad BN_1 = \frac{1}{2\rho E(0)} \left\{ 1 - sE(0) - \frac{1}{2}(P_1(1) + P_0(1)) \right\} - \frac{\rho_1 - \rho}{\rho}$$

となり、この中の $P_1(1) + P_0(1)$ は §5, (9) を代入すればよい。特に $\rho_1 = \rho$ ならば

$$(3') \quad BN_1 = (s+\rho)/\{2(1-\rho)\}.$$

また s が十分大きいときは

$$(3'') \quad BN_1 = \{s + 2\rho_1 - \rho\}/\{2(1-\rho)\}.$$

7. 数値例による検討

序説で述べたように、集中サービス型待ち行列の特性であるサービス開始までの待ち個数 s に

ついで考えるに、 s を大きくすると客がサービスを待つことによる損失は大きくなるが他方作業者の作業のコマ切れの減少による、または idle time の増加による利益は増すと考えられる。したがって適当な損失（または利益）関数を設定することによって最適な s の値を定めることができるであろう。以下に簡単な損失関数を設けて数値例による検討を行なうことにする。

まず客が待つことによる損失について考えるに、客が系内で待つ平均待ち時間を W とし、1人の客が単位時間待つことによる損失単価を a とすれば、損失が待ち時間の長さに比例するとして、単位時間当りのこの系全体の損失は $a\lambda W$ あるいは系内に平均として $L\lambda$ 人の客が存在するのであるから aL とみなされる。つぎにサービスのコマ切れによる損失はコマ切れ回数に比例するものとして、一回当りの単価を b とすれば、先に述べた BPN を用いれば $b \cdot (BPN)$ で表わされる。つぎに idle time の増加にともなう利益を idle time に比例するものとして、単位時間当りの利益を c とすれば $cP(I)$ で表わされる。そこでこの系の損失関数 Loss (s) を以上3種の損益の代数和とすれば

$$(1) \quad \text{Loss}(s) = aL + b(BPN) - cP(I)$$

となる。この(1)は複チャンネルの場合にも成立つと考えられ、このとき $P(I)$ の代りに $P_2(I)$ を採るものとしよう。

まず単一チャンネルでポアソン到着、指数サービスと仮定すれば §3~4 の諸公式が使えて、(1) はつぎのようになる：

$$(1') \quad \text{Loss}(s) = a \left[\frac{\rho^2}{1-\rho} + \frac{1}{s+\rho_1-\rho} \left\{ \frac{s(s-1)}{2} + s\rho_1 + \rho_1^2 - \rho^2 \right\} \right] \\ + \frac{b\lambda(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho} - \frac{cs(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho}.$$

Loss (s) を最小ならしめる s を s_0 とすれば

$$(2) \quad s_0 = -(\rho_1 - \rho) + \left[(\rho_1 - \rho)(\rho_1 + \rho + 1) + 2(1 - \rho) \left\{ \frac{b\lambda}{a} + \frac{c}{a}(\rho_1 - \rho) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

となり、特に $\rho_1 = \rho$ ならば

$$(2') \quad s_0 = \left\{ \frac{2b}{a}(\lambda - \mu) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

数値例として $\rho_1 = 2\rho$, $\lambda = 4$, $\mu = 8$, $b/a = 5$, $c/a = 3$ とすれば(2) から $s_0 = 4.27$, したがって $s_0 = 4$ にとればよい。

以上は $M/M/1$ 型として取投ったが、各サービス時間の分布をそれぞれ次数 f_1, f のアーラン分布としたときの系内の平均客数 L の公式 §2, (25) をこの場合近似的に利用できるとすれば、(1) は

$$(1'') \quad \text{Loss}(s) = a \left[\left(1 + \frac{1}{f}\right) \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{s+\rho_1-\rho} \left\{ \frac{s(s-1)}{2} + s\rho_1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{f}\right) \rho_1^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{f}\right) \rho^2 \right\} \right] + b \frac{\lambda(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho} + c \frac{s(1-\rho)}{s+\rho_1-\rho}.$$

となり、これより

$$(2'') \quad s_0 = -(\rho_1 - \rho) + \left[\frac{\rho_1^2}{f_1} - \frac{\rho^2}{f} + (\rho_1 - \rho) + 2(1 - \rho) \left\{ \frac{b\lambda}{a} + \frac{c}{a}(\rho_1 - \rho) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(2'') において $f_1 = f = 1$ とすれば (2) に一致し, $f_1 = f = \infty$ とすれば,

$$(2''') \quad s_0 = -(\rho_1 - \rho) + \left[(\rho_1 - \rho) + 2(1 - \rho) \left\{ \frac{b\lambda}{a} + \frac{c}{a}(\rho_1 - \rho) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

上述の数値例をとって, (2''') から s_0 を求めると $s_0 = 4.19$ となってこの場合も $s_0 = 4$ となるから, この場合サービス分布の如何にかかわらず $s_0 = 4$ とみなしてよいであろう。

つぎに複チャンネルの場合に移るが, (1) における $P(I)$ として $P_2(I)$ を採ることにしたのは両チャンネルとも遊休となったとき, 作業者は別の作業を行なって利益を生むとしたからであって $P_1(I)$ を採るべきではないという意味からではない。さて (1) の右辺に §5, §6 の諸公式を代入すれば Loss (s) の具体的な表現を得るが, これから Loss (s) を最小ならしめる s を決定することは, 一般には複雑な手続きを要するから後述する。特に $\rho_1 = \rho$ とすれば (1) は

$$(3) \quad \text{Loss}(s) = \frac{a}{s + \rho} \left\{ (s - 1) \left(\frac{s}{2} + \frac{\rho}{1 - \rho} \right) + \frac{2\rho}{1 - \rho} \right\} + \frac{2\mu b \rho(1 - \rho)}{s + \rho} - \frac{cs(1 - \rho)}{s + \rho}$$

となり, したがって

$$(4) \quad s_0 = -\rho + \left[\rho^2 + 3\rho + 2\rho(1 - \rho) \left\{ \frac{2\mu b}{a} + \frac{c}{a} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

数値例として $\rho_1 = \rho$, $\lambda = 10$, $\mu = 8$ ($\rho = 0.625$), $b/a = 5$, $c/a = 3$ とすれば (4) から $s_0 = 5.80 \approx 6$ 。つぎに $\rho_1 \neq \rho$ の場合について, まず数値計算によって最適値 s_0 を求める具体例を示そう。それにはまず §5 (12), §6(1) を (1) に代入して

$$(5) \quad \text{Loss}(s) = a \left[L + \left(\frac{b\lambda}{a} - \frac{cs}{a} \right) E(0) \right]$$

表1 Loss (s)/ a の数値計算: $\rho_1 = 3\rho$, $\rho = 0.625$

S	E	L	Loss $s(s)/a$
2	.07079	3.9375	7.0523
3	.06033	4.2693	6.7428
4	.05239	4.6668	6.6576
5	.04613	5.0973	6.7119
6	.04115	5.5460	6.8628
7	.03711	6.0061	7.0823
8	.03378	6.4737	7.3520

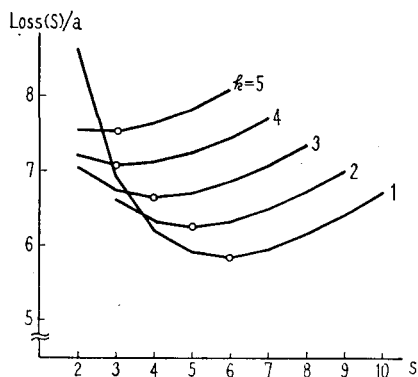


図6 最適値 s_0 を与える図: $\rho_1=k\rho$, $\rho=0.625$

を得る。そこで指定された ρ_1 , ρ に対する $E(0)$ および L を §5, (11), (13) から求めれば $\text{Loss}(s)$ が計算される。表1は $\rho_1=3\rho$, $\lambda=10$, $\mu=8$, $b/a=5$, $c/a=3$ のときの $\text{Loss}(s)$ を s の各値について求めたものである。これより $s_0=4$ となり、このときの損失は $\text{Loss}(4)=6.658a$ によって求められる。ついでに上と同じ数値例に対して、 $\rho_1=k\rho$, $k=1(1)5$ として最適値 s_0 の動きを示したの図が図6である。

以上は数値計算によって正しく最適値を求めたが、§5, §6 で求めた L , BPN および $P_2(I)$ の近似式 §5 (18), §6 (1''), §5 (17) を利用する簡便法が考えられる。ただし s があまり小さいときは適当ではない。このとき (1) は

$$(6) \quad \text{Loss}(s) = \frac{a(1-\rho)}{s+2\rho_1-\rho} \left[\frac{s-1}{1-\rho} \left\{ \frac{s}{2} + 2(\rho_1-\rho) + \frac{\rho}{1-\rho} \right\} \right. \\ \left. + \frac{(1-\rho)(\rho_1-\rho)\{4\rho_1\rho - (\rho_1+\rho)\} + 2\rho_1\rho}{\rho(1-\rho)^2} \right] \\ + \frac{\lambda b(1-\rho)}{s+2\rho_1-\rho} - \frac{cs(1-\rho)}{s+2\rho_1-\rho}.$$

このとき

$$(7) \quad s_0 = -(2\rho_1 - \rho) \\ + \left[(2\rho_1 - \rho)^2 - 2(3-2\rho)(\rho_1 - \rho) + 3(2\rho_1 - \rho) + 2(1-\rho) \left\{ \frac{b\lambda}{a} + \frac{c}{a}(2\rho_1 - \rho) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

特に (7) において $\rho_1=\rho$ とすれば (4) に一致する。先の数値例 $\rho_1=3\rho$, $\lambda=10$, $\mu=8$, $b/a=5$, $c/a=3$ のとき (7) から $s_0=4.34 \doteq 4$ となって、表1から求めた結果と一致する。

終りに、本論文を草するにあたり、有益な助言を賜った東京大学工学部近藤次郎教授に深く感謝します。

参 照 文 献

- 1) Welch, P.D., "On a Generalized M/G/1 Queuing Process in Which the First Customer of Each Busy Period Receives Exceptional Service," *Opns. Res.* **12**, 736-752 (1964).
- 2) Morse, P.M., "Queues, Inventories and Maintenance," John Wiley & Sons (1958).

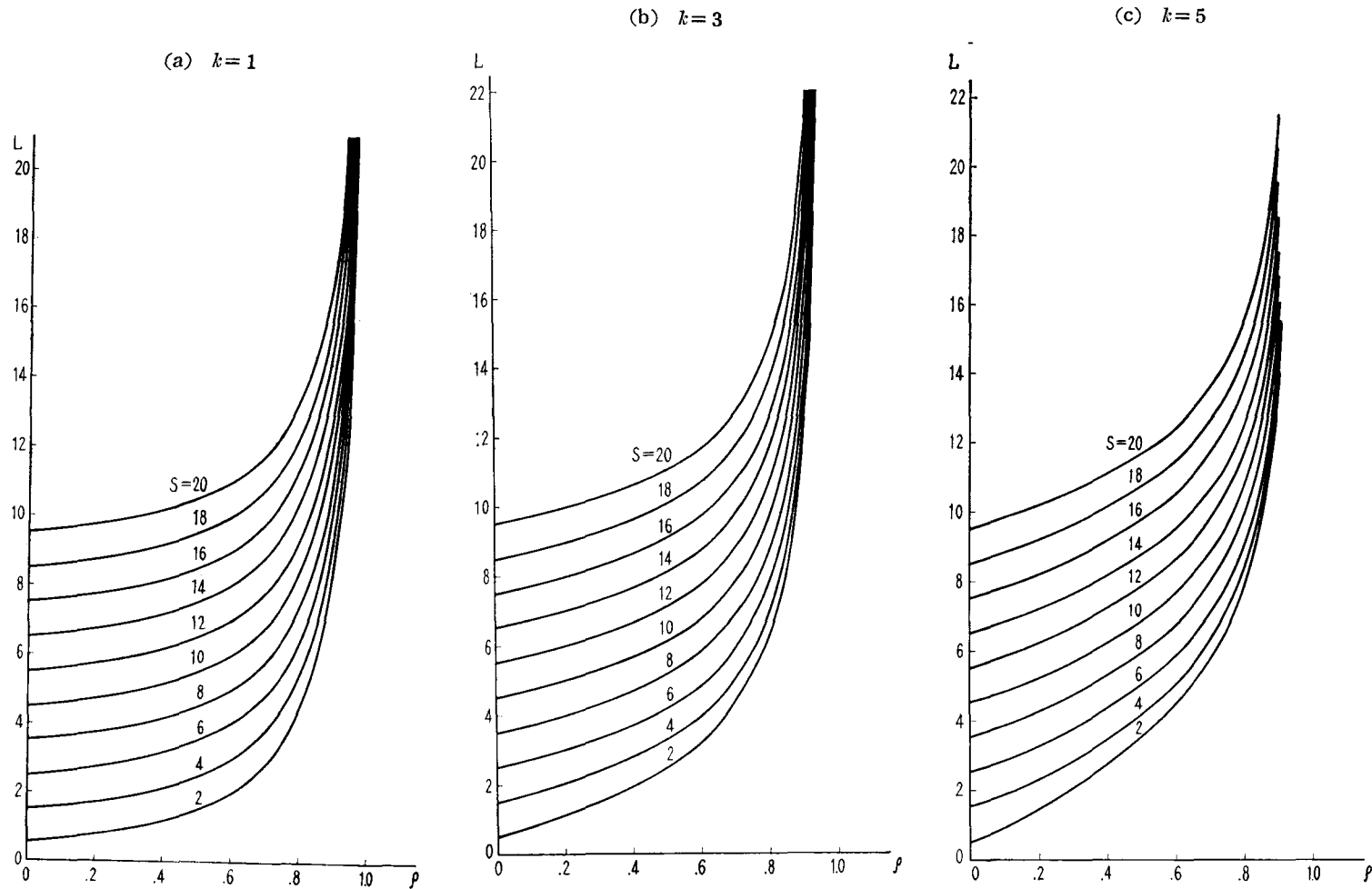
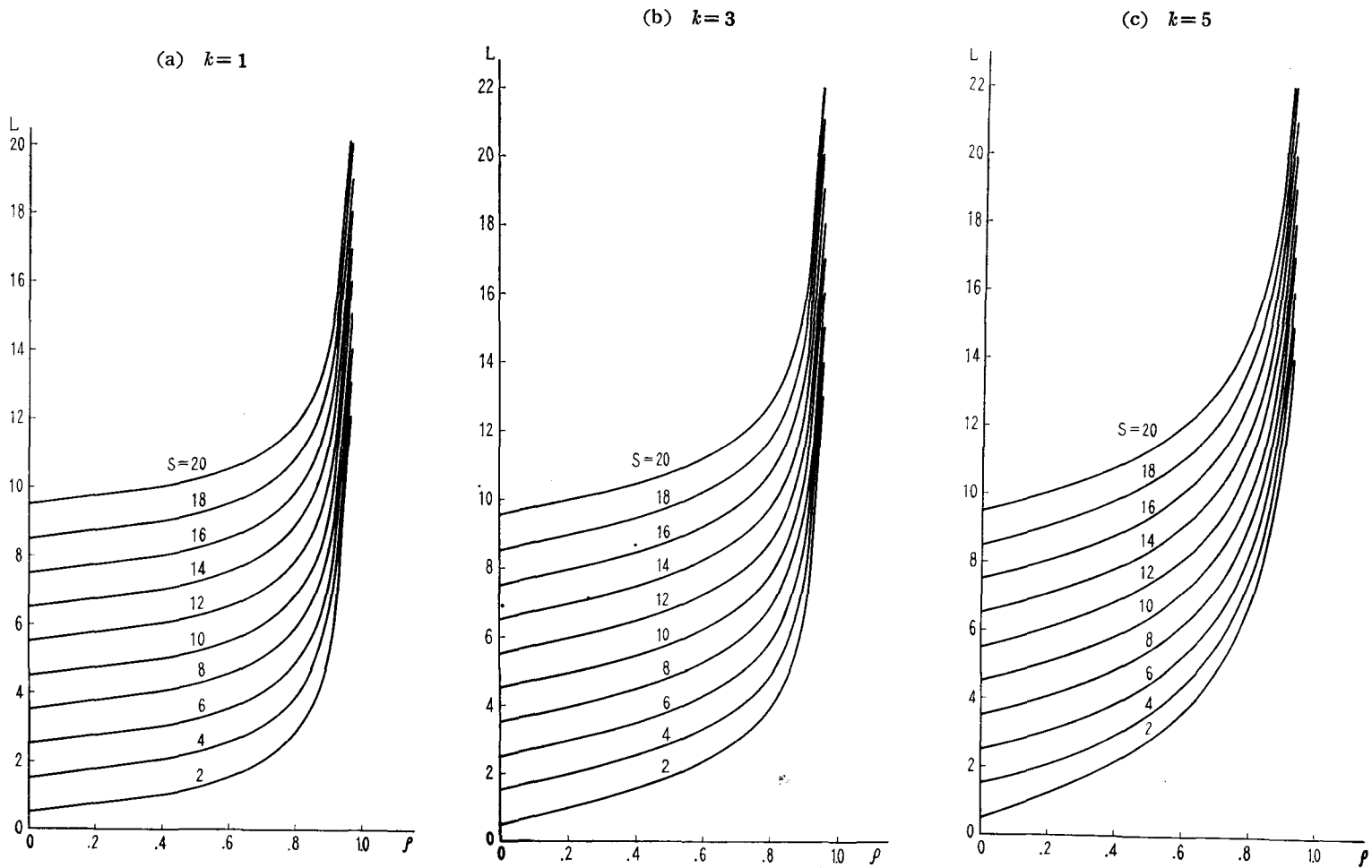
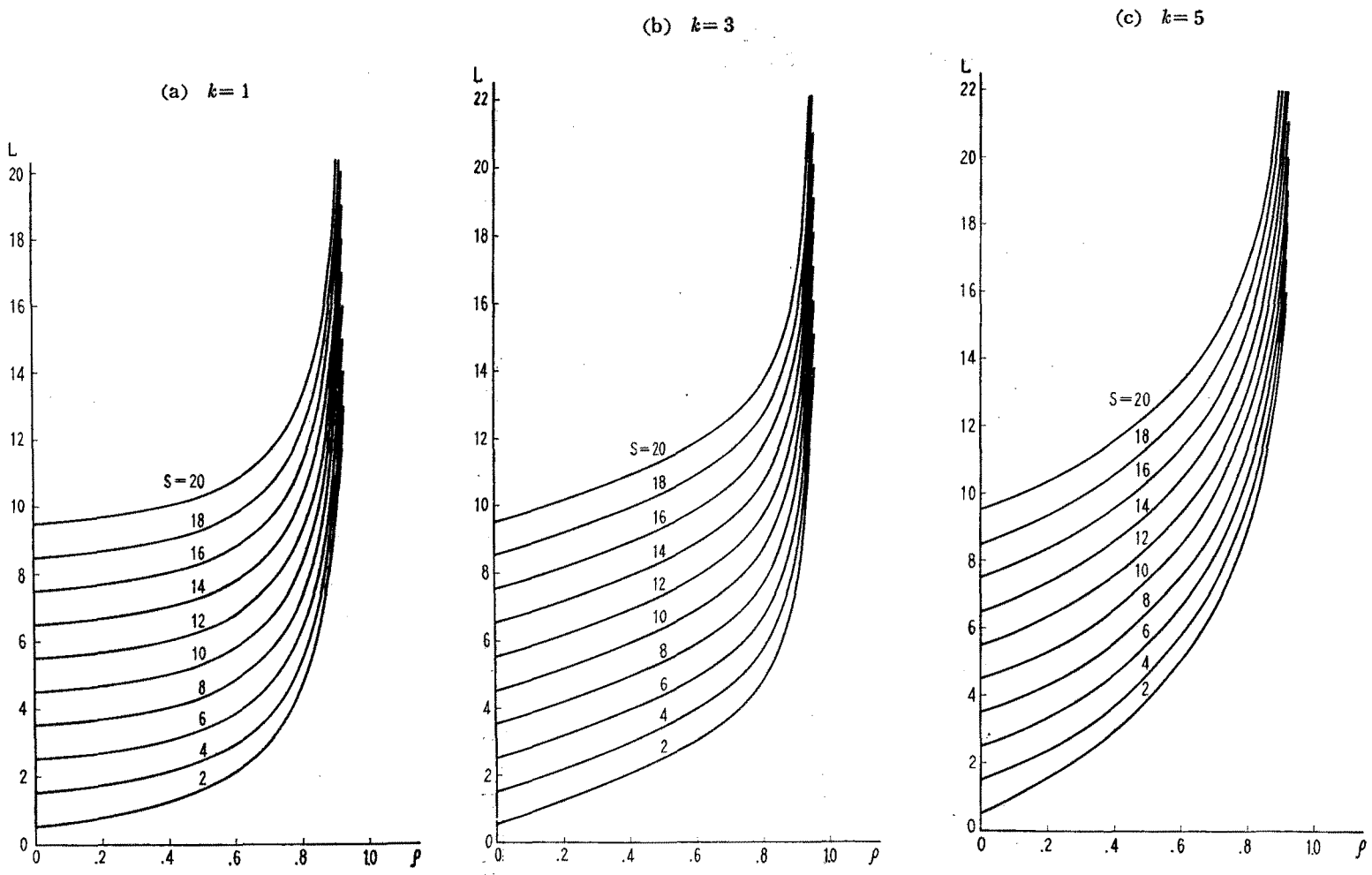


図 I ($M/M/1$) 型の集中サービス待ち行列において、系内の客の平均数 L の、トラフィック密度 ρ 、客の集中の大きさ s およびトラフィック密度比 $k=\rho_1/\rho$ ($k=1, 3, 5$) による変化を示す図 (a~c)



図Ⅱ ($M/D/1$) 型の集中サービス待ち行列において、系内の客の平均数 L の、トラフィック密度 ρ 、客の集中の大きさ s およびトラフィック密度比 $k=\rho_1/\rho$ ($k=1, 3, 5$) による変化を示す図 (a~c)



図III $(M/M/2)$ 型の集中サービス待ち行列において、系内の客の平均数 L の、トラフィック密度 ρ 、客の集中の大きさ s およびトラフィック密度比 $k=\rho_1/\rho$ ($k=1, 3, 5$) による変化を示す図 (a~c)