経営科学 第10巻 第3号 (1967年4月)

設備の取替え問題の一考察[†]

——設備の購入価額と正味利益が取替え時点と使用期間により変化する場合——

中村善太郎*

はじめに

序々に機能が低下するような設備の取替え問題を経済性の立場から扱う場合，その設備から生じる現金の流出入額を分析することが重要な意味をもつ．従来発生するこれらの額を正確に握かむのは不可能で，変化の傾向を予測することにとどまるだろう．このような事情と，解析の便利さという理由から本論文では現金の流出入額を時間に関しての連続関数で扱い，1基の設備の最適取替え時点（あるいは使用期間）を求める問題を考えてみる．その際経済的有利さをあらわす尺度に一定期間内に増加する資金の量をとる．そして従来おこなわれている旧 MAPI の方法がもっている問題点を，ここの方法でみなおし検討を加えてみたいと思う．

§1．一般論（取替え対象が1基の場合）

ある機能を果すために必要な1基の設備を順次新設備を購入し取替えながら利益をあげてゆく場合の最適取替え時点（使用期間）について考えてみる．通常，設備には操業するに従い作業の習熟現象，性能の低下，故障の発生などの要因で操業費用あるいは収益の使用期間についての変動がみられる．また，市場にあらわれる新設備は技術進歩の要因から市場にあらわれる時点でその収益性と価格が変動する．それゆえ，設備の取替えモデルを次のように把握することができる．

時点 t にあらわれる新設備の購入価額を $c(t)$，その設備を x 期間使用したときに発生する利益密度関数を $f(t,x)$，そのときの残存価額を $g(t, x)$ とし，考える全期間 $[0, T]$ のなかで n 回取替えるものとする．そうすると，T 期間のなかでえられる総利益 S は次式であたえられる．

(1) $$S=\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\int_0^{x_j} f(t_j, x)dx+g(t_j, x_j)+c(t_j)\right\}$$

$$x_j=t_{j+1}-t_j,\quad t_0=0,\quad t_n=T$$

t_j：取替え時点

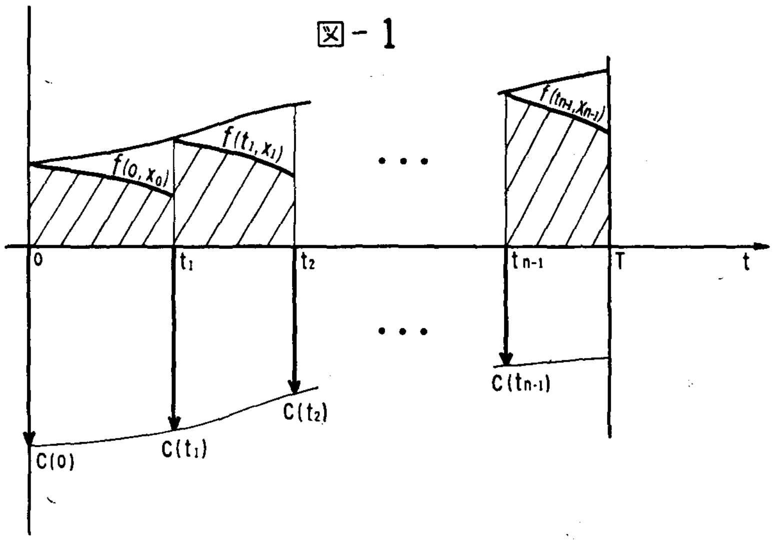
x_j：t_j で購入する設備の使用期間．

---

† 1966年8月13日受理，1966年11月10日 秋季研究発表会講演

* 慶応義塾大学工学部

図－1



ここで問題は S を最大にする取替え時点

$$t_k,\quad k=1, 2, \cdots\cdots, n-1$$

を求めることである（図－1参照）．これは T 期間に発生する利益を最大にするのが経済的に有利という考えに基いている．期当りに発生する平均利益を最大にする考え方もできるが，この考え方は T 期間をサイクルとした like for like replacement を意味することになるので本論文では前者の考え方に従うわけである．

まず S を最大にするための必要条件を明らかにしよう．S を最大にする必要条件は，

（2）　$$\frac{\partial S}{\partial t_k}=0,\qquad k=1, 2, \cdots\cdots, n-1$$

であたえられる．

$$\frac{\partial S}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\int_0^{x_j}f(t_j, x)dx+g(t_j, x_j)+c(t_j)\right\}$$

ここで

$$S(t_j, x_j)=\int_0^{x_j}f(t_j, x)dx+g(t_j, x_j)+c(t_j)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}\sum_{j=0}^{n-1}S(t_j, x_j)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial t_k}S(t_j, x_j)$$

$$=\sum_{j=0}^{n=1}\left(S_{t_j}\cdot\frac{\partial t_j}{\partial t_k}+S_{x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_k}\right)$$

ただし

$$S_{t_j}=S_t(t_j, x_j)$$

$$S_{x_j}=S_x(t_j, x_j)$$

以下添字 x, x_j, t, t_j は，それぞれについての偏微分を示す．

一方

$$
(3)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial t_j}{\partial t_k}=1 \quad , \ j=k \\
\qquad =0 \quad , \ j\neq k \\
\dfrac{\partial x_j}{\partial t_k}=-1, \ j=k \\
\qquad =1 \quad , \ j=k-1 \\
\qquad =0 \quad , \ j\neq k,\ k-1
\end{cases}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t_k}&=\sum_{j=0}^{n-1} S_t(t_j, x_j)\ \frac{\partial t_j}{\partial t_k}+\sum_{j=0}^{n-1} S_x(t_j,\ x_j)\ \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \\
&=S_t(t_k, x_k)+S_x(t_{k-1},\ x_{k-1})-S_x(t_k,\ x_k).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
S_t(t_k,\ x_k)=\int_0^{x_k} f_t(t_k,\ x)dx+g_t(t_k,\ x_k)+c_t(t_k)
$$

$$
S_x(t_{k-1},\ x_{k-1})=f(t_{k-1},\ x_{k-1})+g_x(t_{k-1},\ x_{k-1})
$$

$$
S_x(t_k,\ x_k)=f(t_k,\ x_k)+g_x(t_k,\ x_k).
$$

そして,

$$
f(t,\ x)+g_x(t,\ x)=h(t,\ x)
$$

とおくと,

$$
\frac{\partial S}{\partial t_k}=\int_0^{x_k} f_t(t_k,\ x)dx+g_t(t_k,\ x_k)+c_t(t_k)+h(t_{k-1},\ x_{k-1})-h(t_k,\ x_k)
$$

となる. それゆえ必要条件は次のようになる.

$$
(4)\qquad \int_0^{x_k} f(t_k,\ x)dx+g_t(t_k,\ x_k)+c_t(t_k)+h(t_{k-1},\ x_{k-1})-h(t_k,\ x_k)=0
$$

つぎに十分条件を明らかにしておく. 一般に関数 $S=S(t_1,\ t_2, \cdots\cdots,\ t_{n-1})$ が最大になる十分条件はつぎであたえられる.

$$
\frac{\partial^2 S}{\partial t_k \partial t_l}=S_{kl} \quad , \ ここで\ S_{kl}=S_{lk},
$$

$$
D_i=\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12}\cdots\cdots S_{1i} \\ S_{21} & \\ \vdots & \\ S_{i1} & \cdots\cdots S_{ii} \end{vmatrix}
$$

とおくと,

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
D_i<0 \quad , \ i=1,\ 3,\ 5, \cdots\cdots \\
D_i>0 \quad , \ i=2,\ 4,\ 6, \cdots\cdots.
\end{cases}
$$

ここで S_{kl} をもとめると,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t_k \partial t_l}=S_{tt}(t_k, x_k)\frac{\partial t_k}{\partial t_l}+S_{tx}(t_k, x_k)\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$$

$$+S_{xt}(t_{k-1}, x_{k-1})\frac{\partial t_{k-1}}{\partial t_l}+S_{xx}(t_{k-1}, x_{k-1})\frac{\partial x_{k-1}}{\partial t_l}$$

$$-S_{xt}(t_k, x_k)\frac{\partial t_k}{\partial t_l}-S_{xx}(t_k, x_k)\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$$

(3)を用いて計算すると次式がえられる.

$$(6)\qquad \begin{cases} S_{kk}=\int_0^{x_k} f_{tt}(t_k, x)dx+c_{tt}(t_k)+g_{tt}(t_k, x_k) \\ \qquad +h_x(t_{k-1}, x_{k-1})+h_x(t_k, x_k)-2h_t(t_k, x_k) \\ S_{k, k+1}=h_t(t_k, x_k)-h_x(t_k, x_k) \\ S_{k, l}=0 \quad , \ l\neq k, \ k+1, \ k-1 \end{cases}$$

§2. 利率を考慮した場合

利率を考慮し, 正味利益密度関数が $f(t, x)$, 正味残存価額関数が $g(t, x)$, 正味購入価額関数が $c(t)$, であたえられる場合 T 期間中に発生する総利益の現在価値額 S はつぎのようになる.

$$(7)\qquad S=\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\int_0^{x_j} f(t_j, x)\, e^{-(t_j+x_j)i}\cdot dx+g(t_j, x_j)\, e^{-(t_j+x_j)i}+c(t_j)\, e^{-t_j i}\right\}.$$

さて, §1で述べたことは f を $f(t_j, x)\, e^{-(t_j+x)i}$ に g を $g(t_j, x_j)\, e^{-(t_j+x_j)i}$ に, c を $c(t_j)e^{-t_j i}$ にそれぞれおきかえることによりそのままなりたつ。(4)を用いて利率を考慮した場合の必要条件をもとめると,

$$(8)\qquad \int_0^{x_k}\left\{f_t(t_k, x)-if(t_k, x)\right\}e^{-xi}\cdot dx$$

$$+\{g_t(t_k, x_k)-g_x(t_k, x_k)-f(t_k, x_k)\}\ e^{-x_k i}$$

$$+f(t_{k-1}, x_{k-1})-ig(t_{k-1}, x_{k-1})+c_t(t_k)-i\ c(t_k)=0,$$

$$k=1, 2, \cdots\cdots, n-1, \qquad t_0=0, \quad t_n=T$$

がえられる. f, g, h, T, n があたえられたときに(8)を満たす最適取替え時点 t_k の値を求めるには具体的にあたえられる関数と数値を(8)に従って単純な形に変形したのち適当な x_0 の値を代入し計算を実行し, $t_n=T$ を満足するかどうかをしらべ, 満足しない場合は x_0 の値を変えて $t_n=T$ を満足するまで繰返せばよい. このプロセスは一般にはめんどうなものとなる. と

ころが，正味利益密度関数と正味残存価額関数が次に示す性質をもつ場合には計算が容易になることが見い出される。

§3. 正味利益密度関数と正味残存価額関数が使用期間 (x) について直線的に変化する場合

関数 $f(t, x)$, $g(t, x)$ が次のようにあらわされる場合を考える.

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} f(t, x)=\theta(t)+ax+b \\ g(t, x)=\eta(t)+px+q. \end{cases}$$

(9)より,

$$f_t(t, x)=\theta_t(t) \quad , \quad f_x(t, x)=a,$$
$$g_t(t, x)=\eta_t(t) \quad , \quad g_x(t, x)=p,$$
$$f_{xx}(t, x)=0 \quad , \quad f_{tx}(t, x)=0.$$

この関数を(8)に用いると必要条件はつぎのようになる.

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\eta_t(t_k)-\frac{1}{i}\,\theta_t(t_k)+\frac{a}{i}-p\right\}e^{-x_k i}-f(t_k, 0)+c_t(t_k) \\ &\quad -i\,c(t_k)+\frac{1}{i}\theta_t(t_k)+f(t_{k-1}, x_{k-1})-i\,g(t_{k-1}, x_{k-1})-\frac{a}{i}+p=0. \end{aligned}$$

(10)をみると $e^{-x_k i}$ 以外の項は全て t_k, t_{k-1}, x_{k-1} だけの関数で x_k を含まない．また,

$$t_k=t_{k-1}+x_{k-1}$$

の関係から $e^{-x_k i}$ 以外の項は全て x_{k-1}, t_{k-1} だけの関数になっていることがわかる．(10)を変形すると次式がえられる.

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} e^{-x_k i}=&\Big\{f(t_k, 0)+i\,c(t_k)-c_t(t_k)-\frac{1}{i}\theta_t(t_k)-f(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ &+i\,g(t_{k-1}, x_{k-1})-p+\frac{a}{i}\Big\}\Big/\Big\{\frac{a}{i}-\frac{1}{i}\theta_t(t_k)-p+\eta_t(t_k)\Big\}. \end{aligned}$$

(11)の右辺を $t_k=t_{k-1}+x_{k-1}$ の関係を考慮して，$\phi_k(t_{k-1}, x_{k-1})$ とおくと,

$$\text{(12)} \qquad e^{-x_k i}=\phi_k(t_{k-1}, x_{k-1})$$

さらに変形して,

$$\text{(13)} \qquad x_k=-\frac{1}{i}\log\phi_k(t_{k-1}, x_{k-1})$$

がえられる．ここで(13)を各 k について示すと,

$$
(14)\qquad
\begin{cases}
x_1 = -\dfrac{1}{i}\log \phi_1(0,\ x_0) \\
x_2 = -\dfrac{1}{i}\log \phi_2(x_0,\ x_1) \\
\quad \vdots \\
x_{n-1} = -\dfrac{1}{i}\log \phi_{n-1}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-3} x_j,\ x_{n-2}\right)
\end{cases}
$$

となり x_0 をあたえるとこの関係式から自動的に $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$ がきまることになる．こうして，

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = T$$

となる x_0 を試行錯誤で求めればよい．この計算は数表を用いて容易にできる．なお，$x_k \times i$ の値が充分小さいことが保証できる場合は $e^{-x_k i} \doteqdot 1 - i\,x_k$ で近似し(10)に用いると $n-1$ 次の連立（一次）方程式の解として取替え時点が計算される．

§4．最適取替え回数 n について

これまでの議論では総利益 S を最大にするような n を求めることにはふれていない．最適取替え回数 n は各々の n についての $S(n)$ を求めその値が最大になる n として求まる．ここで $f_x(t,\ x)$＝定数の場合の $S(n)$ を示す式をあげておく．

$$
(15)\qquad S(n) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-t_j i}\left[\frac{f(t_j,\ 0)}{i} + \frac{f_x}{i^2} + c(t_j) - \left\{\frac{f(t_j, x_j)}{i} + \frac{f_x}{i^2} - g(t_j, x_j)\right\} e^{-x_j i}\right]
$$

§5．実　　例

つぎに示すケースの最適取替え時点を求めてみる．

$f(t,\ x) = 2t - x + 30$

$c(t) = 3t - 50$

$i = 10\%$

$T = 10$（期）

残存価格は考えない．

(12)式から ϕ_k を計算すると，

$$\phi_k = 1.267 - 0.01\, t_{k-1} - 0.11\, x_{k-1}.$$

$n=1$ の場合，

$x_0 = 5.6$ のとき $\phi_1 = 0.651$，$x_1 \doteqdot 4.3$ となり取替え時点は 5.6 期になる．そのときの総利益

は(14)より

$S(1)=128.4$ が求まる.

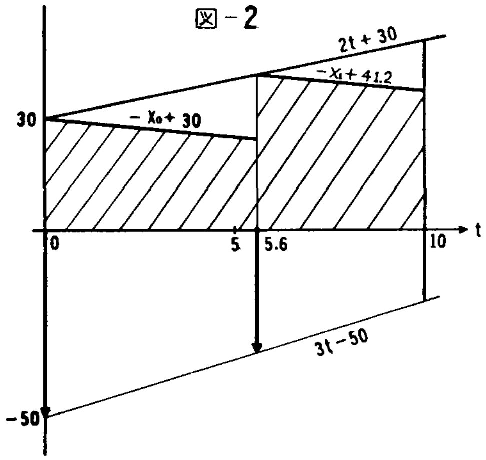
$n=2$ の場合,

$x_0=5.0$ のとき $\phi_1=0.717$, $x_1 \doteqdot 3.42$.

$\phi_2=0.841$, $x_2=1.74$.

$x_0+x_1+x_2 \doteqdot 10$ となり取替え時点は5期, 8.4期になる. 総利益は $S(2)=125$.

図-2



このことから最適取替え政策は5•6期に1回取替えることでえられる(図-2). 参考までに利率を考慮しない場合の十分条件をしらべておくと, (6)より,

$$S_{k,k}=f_x+f_x-2f_t=-6$$

$$S_{k,k+1}=f_t-f_x=3$$

$$D_1=-6<0, \quad D_2=\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=27>0$$

となり条件(5)を満たしている.

§6. 旧 MAPI の方法[1]とその問題点[2]

はじめに旧MAPI法の考え方の基本となっている G. Terborgh の short cut 法の要点を記してみよう.

初期投資額を C, 稼動劣性の年増加額を g, 使用年数を n, n 年後の処分価値を D, 利率を i とすると年平均費用 A は,

$$A \doteqdot \frac{g(n-1)}{2}+\frac{C-D}{n}+\frac{i(C+D)}{2}$$

であたえられる. ここで $D=0$ の場合を考えると,

$$A \doteqdot \frac{g\,(n-1)}{2}+\frac{C}{n}+\frac{iC}{2}$$

この A の値を最小にする使用年数は

$$n=\sqrt{\frac{2C}{g}}$$

となる．そのときの A の値を Adverse Minimum (AM) と呼んで，現有設備の AM と挑戦設備の AM の大きさを比べ決定を下すわけである．この方法は2つの大きな仮定をおくことで単純化をおこなっている．それは，

(1) 将来あらわれる挑戦設備の AM は，現在あらわれている挑戦設備の AM と一致する．

(2) 稼動劣性は使用期間を通じて一定額ずつ上昇する．

ということである．

さて，以上のような旧MAPIがもつ問題点として本質的なものを3つあげることができる．

〈1〉 設備の取得価格の将来の変化が当然解に影響しなければならないが，この方法にはそれが直接とり入れられていない．

〈2〉 稼動劣性の把握のし方に問題がある．その変化のし方が直線的という仮定はさておき，本来劣性の要因として，使用する設備自体の劣性（性能の低下，故障の発生の増大など）と，市場にあらわれる最良設備と比較した場合の劣性の2つが考えられる．稼動劣性はこの2つの和としてあらわされている．例えば，前者の劣性度が期当り2で後者が1の場合と，前者が1で後者が2の場合はモデルのもつ意味は異るにもかかわらず稼動劣性としては期当り3という共通の値をもつことになり，同一の問題として扱われることになる．

〈3〉 将来の設備の Adverse Minimum が変わらないという仮定である．この仮定の意味は like for like replacement の問題として扱うということであり，将来の技術進歩を考慮する考えと矛盾することになる．また，別の言い方をすれば，予測が可能な将来の期間（あるいは計画として考慮する期間）に考慮が払われていないということと，経済的に有利という意味の検討が不充分であることがいえるのである．

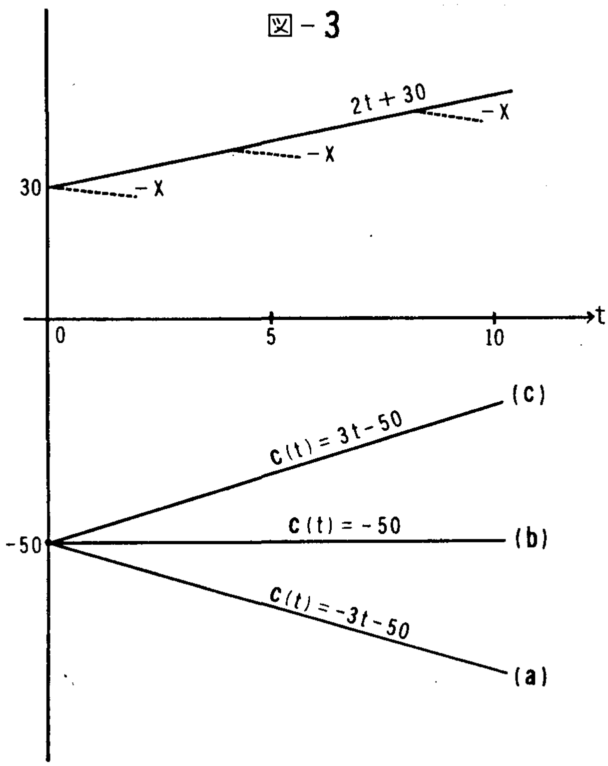
§7. 旧 MAPI の問題点の検討

旧MAPIがもつ問題点を3つあげたわけだが，本論文で述べた方法を用いてそれらを吟味してみよう．

〈1〉 旧MAPIでは購入価格の変化 $c(t)$，に考慮が払われていない．購入価格が将来安くなる傾向の場合は取替え時点ははやくなり，高くなる傾向の場合はおそくなることが当然予想でき，事実 $c(t)$ を考慮するとそのような結果がえられるのである．

例えば，$f(t,\ x)=2t-x+30$ のとき，

図－3



(a) $c(t)=-3t-50$

(b) $c(t)=-50$

(c) $c(t)=3t-50$

の場合をみると（図-3），

(a) $\phi_k=1.07+0.01\,t_{k-1}-0.09\,x_{k-1}$

(b) $\phi_k=1.167-0.1\,x_{k-1}$

(c) $\phi_k=1.267-0.01\,t_{k-1}-0.11\,x_{k-1}$

となり最適取替え時点とそのときの総利益は表—1のようになる．したがって，$T=10$期の場合最適取替え政策は，

表—1

	1 回 取 替 え		取 替 え な し	
	x_0	$S(1)$	x_0	$S(0)$
(a)	5.1	110	10	114*
(b)	5.4	119*	10	114
(c)	5.6	128*	10	114

(a) 10期まで取替えをおこなわない.

(b) 5.4 期で取替える.

(c) 5.6 期で取替える.

となる. (a)では1回取替えの時期は5.1期になるが, 全く取替えをおこなわない方が総利益は大きくなる. 一方, 旧MAPIの考え方に従うと (a), (b), (c) のケースともに最適取替え時点は,

$$n=\sqrt{\frac{2C}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 50}{3}}=4.7$$

になる. ここで, T の値のきめ方の問題があるため (〈3〉でふれる) 4.7 の値と上の値を直接比較して論じることはできないが明らかなことは (a), (b), (c) の状況のちがいにより解が異ることである.

〈2〉 この問題では, 劣性度が直線的に変化する場合は実際の解にはほとんど影響を及ぼさないことが次の分析からわかる.

稼動劣性としては同じ値になる次の2つの関数を考える.

$f_1(t, x)=\theta t-ax+b$

$f_2(t, x)=at-\theta x+b$; $\theta, a \geqq 0$

$g_1=g_2=\theta+a$; g_1, g_2 は稼動劣性

このときの関数 ϕ_k をみると(11)から

$$\phi_{k1}=\phi_{k2}$$

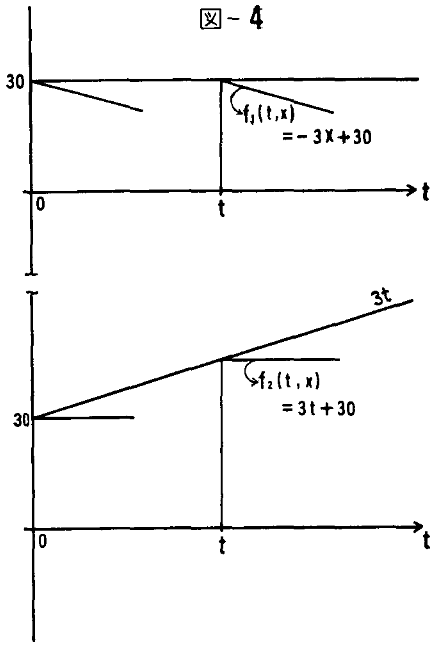
がえられ, f_1 の場合と f_2 の場合の取替え時点は同一になることがわかる. しかし, 取替え回数 n を考慮したうえでの最適取替え時点が f_1 と f_2 とで一致する保証はないのだが, 一致する場合が多いと考えてさしつかえないであろう. 例を示してみよう (図-4).

$f_1(t, x)=-3x+30$

$f_2(t, x)=3t+30$

の場合表—2に示すように取替え政策は一致することがわかる.

図-4



〈3〉 この問題は本論文でおこなった方法で解を直接比較し論じることはできない. しかし技術進歩を考慮した場合に like for like replacement の考え方 (期当りの平均利益最大——平均費用最小——の考え方) をとることに問題があることは事実である. ではどうしたらよいかということになるが, もしデータの信頼性とか, あらか

表—2

	T	1回取替え時点	総 利 益 $S_{(1)}$	総 利 益 $S_{(0)}$
f_1	5	3.3	16.1	42
	6	3.7	29.7	49
	7	4.2	42.8	55
	8	4.6	51.1	58
	9	5.0	60.0	60.7
	10	5.4	65.4	61
f_2	5	3.3	44	67
	6	3.7	68	85
	7	4.2	86	100
	8	4.6	109	115
	9	5.0	127	127
	10	5.4	146	139

じめ考慮すべき計画期間から T をきめる根拠がある場合は T 期間中に発生する総利益を最大にする方法がとれるわけである．また，種々の T の値に対して解を求めてみて決定を下すことも考えられる．ここで〈1〉にあげた3つのケースについて，T=5，6，7，8，9，10 の場合の最適取替え政策を表—3に示しておく．表—3にあるように旧MAPIの考え方にしたがった解とはかなり異る解がえられる．そのちがいを一般的に示すことはできないが種々の T についての解を比較してみることは意味がある．

表—3 最適取替え時点

T =	5	6	7	8	9	10
(a)	5	6	7	8	9	10
(b)	5	6	7	8	9	5.4
(c)	5	6	7	4.9	5.3	5.6
MAPI	4.7					

§8．すでに操業中の現有設備の取替えを決定する方法

旧MAPIの方法は，現在使用中の設備を挑戦設備に取替えることの採否を決定するのがその最終目的である．一方，本論文の方法は現時点で必らず新設備に取替えるという形で説明を加えてきた．すなわち，$t_0=0$ の条件がモデルに入っているわけである．そこで現有設備の取替えの採否を決定する方法を説明しておこう．それは次のようにしておこなえばよい．

選択の対象となる方策を次のようにならべる．

(0) 現時点 ($t_0=0$) で取替える．

(1) a_1時点 ($t_0=a_1$) で取替える．

⋮

(l) a_l時点 ($t_0=a_l$) で取替える．

こうしておいてから(8)あるいは(13)で $t_0=a_i$ の条件のもとで取替え時点を求める．つぎに現有設備を a_i まで使用したときに発生する利益も加えて各案件に対する総利益を計算する．その中で最大の利益をもつ方策を選択すればよい．

§9．結　論

1基の設備を対象にした場合，設備の購入時点を t，t 時点で購入した設備を x 期間使用するときその設備からえられる正味利益密度関数を $f(t, x)$，残存価額関数を $g(t, x)$，購入価額関数を $c(t)$ とする．利率 i，取替え回数 n，全期間 T としたときの最適取替え時点が満たす必要条件は(4)であたえられる．とくに，$f(t, x)$，$g(t, x)$ が使用期間 x について直線的に変化する場合（f, g, c の取替え時点 t についての変化のし方は直線的でなくともよい）計算は容易になり，もし総利益の最大値が存在すれば(14)を計算して取替え時点を求めればよい．

一方，旧MAPIの方法がもつ問題点をこの方法で吟味すると，将来あらわれる設備の購入価額の変化は無視できないこと，Adverse Minimum を用いて技術進歩の情況下で決定を下すことにはかなりの問題があることが明らかになった．しかし，購入価格が大きくないような設備の場合や，将来の技術進歩の予測がおこなえない場合は旧MAPIの方法は簡便な方法ということができる．

参　考　文　献

1. Terborgh, G., *Dynamic Equipment Policy*, Mc Graw-Hill, 1946.
2. 千住鎮雄，伏見多美雄，経済性工学，慶応工学会，1964.