経営科学 第10巻 第3号 (1967年4月)

Cyclic Sequencing とその近似解法†

原　　亨*

1. はじめに

従来 job shop scheduling と呼ばれている問題においては，常に n ケの仕事だけが切りはなされて論じられて来た．しかるに実際の工場においては，新たに計画さるべき n ケの仕事の前に，既に工場に指示され，現に作業中の仕事をいくつか抱えているのが常である．また今回与えられた n ケの仕事が，如何にたくみに，順序づけられたとしても，工場がこれで閉鎖されるという時以外は，この n ケの仕事が全部完了する前に，新たに n' ケの仕事が，順序づけられるべきものとして到着するのである．

従って，実際の工場で n ケの仕事の順序づけを行なう時には次の2点を考慮する必要がある．

(1) 既に仕掛中の仕事が完了した後に順序づける．

(2) n ケの仕事の次に来る仕事群の順序づけが行ない易くなるように，n ケの仕事を順序づける．

従来 job shop scheduling で論じられて来た総経過時間最小の順序が，上記2点を考慮に入れた時にも尚のぞましいものであることは保証されない．

上記2点をいくらかでも考慮に入れた順序づけを行なうために，以下では，n ケの仕事を同一順序で繰返し加工するものとした時の順序づけ問題（これを cyclic sequencing と呼ぶ）をとりあげ，この問題の持ついくつかの特徴を示し，近似解法を示す[1]．

2. 対象工場

ここで順序づけを行なおうとする工場は，下記の諸条件をみたすものであるとする．

(1) どの機械も同時には1ケの仕事しか加工しない．1台の機械で同時に2つ以上の仕事は加工しない．

(2) 一旦加工が開始されたら，その仕事のその機械における加工内容が全て完了されるまで，その仕事はその機械を占有し続ける．一旦加工を開始した仕事を中断して別の仕事の加工をその機械で開始することはない．

---

† 1966年7月25日受理，1966年5月12日　春季研究発表会講演

* 富士通株式会社

1) 厳密には，n ケの仕事の全てが 1 cycle の中で必らず加工される必要はない．各仕事毎に異なった cycle を持つことが許されるべきである．これは lot size scheduling の問題となる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(3) 一つの仕事は同時には1台の機械でしか加工されない．一つの仕事を2台以上の機械に分割して加工することはない．

(4) 技術的順序は各仕事について既知であり加工の途中で変更されることはない．

(5) 仕事は前の機械での加工が完了した時にはじめて次の機械の前に運ばれる．つまり加工ロットの大きさは，常に運搬ロットの大きさに等しい．

(6) 機械の前に仕事がたまる量に対しては制限がない．

(7) 加工時間には，次工程への運搬時間，機械の段取時間が含まれて居り，既知，かつ確定的である．

(8) 加工時間は同一機械にかかる仕事の順序に無関係に一定である．

(9) 納期は全ての仕事について一定である．

(10) 作業者の数は機械に対して充分に居り制約条件とはならない．[2)]

以上の他，問題を簡単にするために，さらに次の条件を追加する．

(11) 同一機種の機械は一台しかない．

(12) 技術的順序は全ての仕事に対して一定である．[3)]

(13) 仕事同志の追抜きは許さない．

3. Total active schedule と cyclic active schedule

3.1 定　義

上記の条件をみたす工場で，n ケの仕事を，同一順序で繰返し生産するものとする．先ず記号を定める．

t_{ki} ：仕事 i の機械 k における加工時間，$i=1,\cdots,n$；$k=1,\cdots,m$.

B_{ki} ：仕事 i の機械 k における加工開始時刻

E_{ki} ：仕事 i の機械 k における加工完了時刻

C_k ：機械 k の周期.

(1) $$C_k=E_{kn}-B_{k1}$$

（ただし i は，n ケの仕事に対してある順序が与えられ，これに基いて，仕事の番号をとりなおしたものとする．）

p ：neck 機械．その定義は式 (2) による．

(2) $$\operatorname*{Max}_{k}\left[\sum_{i=1}^{n} t_{ki}\right]\equiv\sum_{i=1}^{n} t_{pi}$$

---

2) 筆者は(1)～(10)の条件をみたす工場を job shop と呼んでいる．しかしこの呼び名は必ずしも一般的でない．production scheduling の立場から，広く工場の種類を分類し，その各々にある程度正確な定義と，標準的な名称を与え，これを一般的に使用するようにすることが，今後この方面の研究者が討論を進めて行くために必要であると考えている．

3) このような工場を特に flow shop と呼んでいる人達もいる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

従って neck 機械は，必らずしも一台のみとは限らない．

τ_{ki} ：仕事 i の機械 k におけるずれ

（3）　$\tau_{ki}=B_{ki}-B_{k-1,i}$

機械 k で仕事 i の加工を開始する時刻は，active schedule によれば，仕事 i が，前の機械を完了し（$E_{k-1,i}$）かつ，仕事 $i-1$ が，機械 k を完了した時（$E_{k,i-1}$）である．従って下記の関係が与えられる．

（4）　$B_{ki}=\mathrm{Max}[E_{k,i-1},\ E_{k-1,i}]$

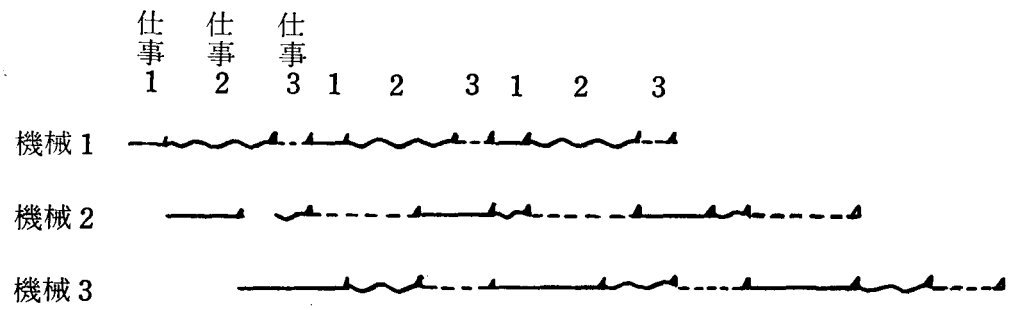
ただし　$E_{0i}=0,\ E_{k0}=0$

（5）　$E_{ki}=B_{ki}+t_{ki}$

3.2　total active schedule

(4) 式および（5）式を用いて，与えられた n ケの仕事について，与えられた順序の下での B_{ki}，E_{ki} を求めることができる．全ての k，i について，B_{ki} を求めたら，これを1周期とする．そして，新たに，同一の加工時間を持つ n ケの仕事について全く同じ順序で，B_{ki}，E_{ki} を求める．ただこの時，前の周期で求めた E_{km} を使って $E_{k0}=E_{km}$（前の周期）とする．

これを無限に繰返すことによって1つの Schedule が得られる．これを total active schedule と呼ぶ．第1図にその1例を示す．



第1図　total active schednle

今 total active schedule における，周期（C_k）の変化を見るために，機械を neck 機械（p）によって分類してみる．

$k=1,\cdots\cdots,p-1$

このグループは，生産周期がくりかえされるにつれて，B_{k1} が B_{p1} にくらべて前に移動する．従って，やがて $E_{kn}\leqq B_{p1}$ となるのは明らかであり，その時は $E_{pn}-B_{p1}=\sum_{i=1}^{n}t_{pi}$ が成り立つ．つまり $C_p=\sum_{i=1}^{n}t_{pi}$ となる．これが仕事の順序と無関係に成り立つことも明らかであろう．

$k=p+1,\cdots\cdots,n$

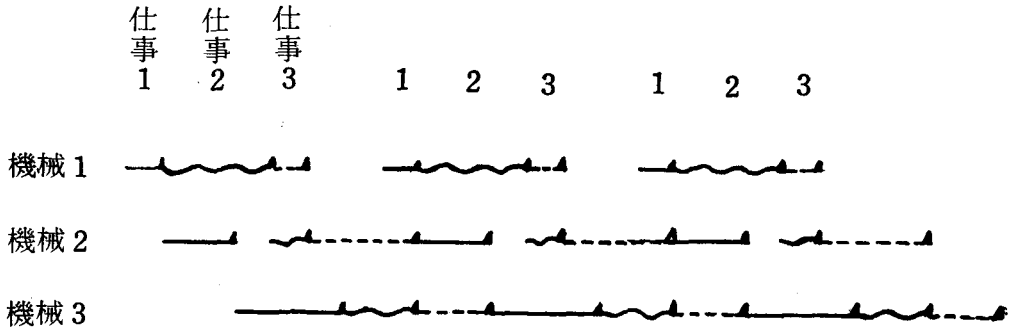
このグループについては $C_k=C_p$ の active schedule を作ることが常に可能である．こ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

のことは $B_{k1}-B_{p1}=\sum_{i=1}^{n}t_{pi}$ とすれば $C_k=C_p$ の schedule となるから，これを active にすれば達成できる．

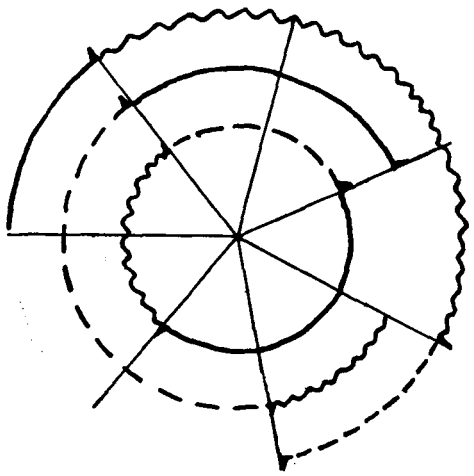
3.3 cyclic active shedule

total active schedule においては，$k=1,\cdots,p-1$ においては，生産周期を繰返す度に B_p-B_{k1} が増大する．このことは，現実には，機械 p の前に仕事の仕掛がどんどん累積されて行くことを意味する．$k=p,\cdots,n$ においては，total active schedule においても，生産周期は C_p に収束することを先に述べた．$k=1,\cdots,p-1$ においては，$B_{k1}+C_p$ をもって次の周期の B_{k1} とする schedule が考えられる．そうすれば，周期 C_k を増大させることなく，工場の機械 p の前の仕掛量を減少させることができる．このような schedule を cyclic active schedule と呼ぶ．第1図の例について cyclic active schedule を作ったものを第2図に示す．



第2図 cyclic active schednle

cyclic active schedule においては，1周期内において active schdule を決定すれば，以後の周期においては全く同じ schedule が C_p だけずれて繰返されるものと考えれば良い．従って，仕事の順序づけを検討する時には，1周期の active schedule だけについて検討すれば良



第3図 極座標による cyclic active schedule

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

いことになる．従って cyclic active schedule は，第2図のようなガント・チャートによる表示の他，第3図のように，極座標で表示することも可能である．

以上の考察により，以後 cyclic sequencing においては，total active schedule によらず cyclic active schedule によって検討を進めることとする．

3.4 目的函数

普通の job shop scheduling では"総経過時間"を最小にする仕事の順序を求める．総経過時間は本論文の記号によれば $E_{mn}-B_{11}$ とあらわされる．

cyclic active schedule においては

$$E_{mn}=B_{m1}+C_p$$

$$B_{m1}-B_{11}=\sum_{k=2}^{m}\tau_{k1}$$

であるから，次式がなり立つ．

$$E_{mn}-B_{11}=B_{m1}+C_p+\sum_{k=2}^{m}\tau_{k1}-B_{m1}=C_p+\sum_{k=2}^{m}\tau_{k1} \tag{6}$$

cyclic sequencing においては，同じ順序づけでも cycle の切り方によって n 通りの $\sum_{k=2}^{m}\tau_{k1}$ が得られるから"総経過時間"は，目的函数として妥当ではない．

そこで次に cyclic schedule で延仕掛量が，どのようにあらわされるかを考えてみる．一つの仕事の仕掛時間は加工時間と機械待ち時間との和に等しい．

従って

$$\sum_{k=2}^{m}(B_{ki}-B_{k-1,i})=\sum_{k=2}^{m}\tau_{ki}$$

で，あらわされる．よって次式が成立つ．

$$\text{延仕掛量}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{m}\tau_{ki} \tag{7}$$

ここで，延仕掛量が C_p に無関係であることは注目すべきである．

一方先に示したように cyclic schedule においては生産周期を C_p に収束させることができる．そしてこの C_p は仕事の順序づけとは無関係である．従って C_p が目的函数の中に入って来ないとしても不思議はない．

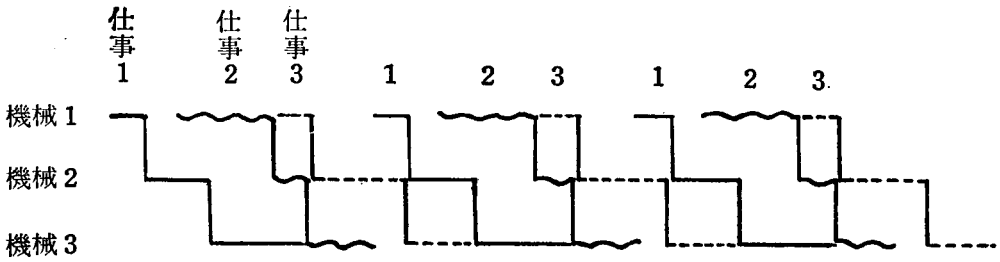
以上により cyclic sequencing においては $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{m}\tau_{ki}$ を最小にするような順序を求めれば良いことになる．

4. 近似解法

$\sum_{i}\sum_{k}\tau_{ki}$ を最小にする順序を見つける最も単純，確実な方法は，可能な全ての順序を列挙することである．これは $(n-1)!$ となり実際問題においては実行不可能であろう．

先ず，同一仕事の中では各機械における相対的な開始時刻，完了時刻が一定であるようにする．つまり $B_{ki}=\sum_{\nu=1}^{i-1}t_{k\nu}$, $E_{ki}=\sum_{\nu=1}^{i}t_{k\nu}$, となるようにする．これを説明したものが第4図である．第4図の近似的なガント・チャートを前提すると，仕事 i の次に仕事 j を順序づけた時，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．



B_{1j} をどれだけ E_{1i} からずらす必要があるかが i と j だけによってきまることになる．このずれを $L(i,j)$ とかくことにすると $L(i,j)$ は次式によって与えられる．

(8) $$L(i,j)=\underset{k}{\mathrm{Max}}\,[L_k(i,j)]$$

第4図　近似的なガント・チャート

(9) $$L_k(i,j)=M_{ax}\left[\sum_{p=1}^{k}t_{pi}-(t_{1i}+\sum_{p=1}^{k-1}t_{pj}),\ 0\right]$$

ただし　$L(i,i)=\infty$

この $L(i,j)$ を i,j 間の距離と考えれば cyclic sequencing における順序づけ問題は，巡回セールスマン問題で近似されたことになる．そして巡回セールスマン問題は Branch and Bound 法によって，かなり能率的にとくことができる．

第1表の t_{ki} について $L(i,j)$ を求めたものが第2表である．これを Branch and Bound によってとくと第5図を得，1，6，3，4，2，5 なる順序を得る．

第1表　t_{ki}

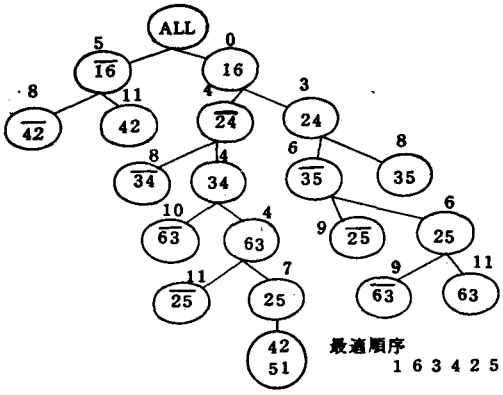
k \ i	1	2	3	4	5	6
1	3	12	5	2	9	11
2	8	10	9	6	3	1
3	2	4	6	12	7	3

第2表　$L(i,j)$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	3	6	0	0
2	7	∞	5	8	1	0
3	6	0	∞	7	0	0
4	9	0	9	∞	7	5
5	9	0	7	11	∞	7
6	9	0	7	11	3	∞

先程の $L(i,j)$ に，架空の仕事 o および ∞ を追加してみる．o は順序の最初を示すもので

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．



第5図　Branch and Bound

あり，∞ は最後を示すものである．そしてこれらの架空の仕事のずれをそれぞれ下記のように定義する．

(10)　$$L(o,i)=\sum_{k=1}^{m-1} t_{ki}$$

(11)　$$L(i,\infty)=\sum_{k=2}^{m-1} t_{ki}$$

$$L(o,\infty)=\infty$$

そして，n ケの仕事の全てを，順序づけ終らない内に，架空の仕事 o と，架空の仕事 ∞ とが，n ケの仕事の中の1部の仕事によって結ばれてしまわないように，algorithm に多少の修正を加えることによって，この問題も，上記のものと全く同様にとくことができる．この解が，普通の job shop scheduling に対する近似解になっていることは明らかであろう．

5. 謝　辞

本論文で紹介した cyclic sequencing は，三共製薬，清水恒信氏の主催する scheduling 研究会において，主として，電通大鍋島一郎先生との討論によって問題の存在に気付いたものである．末筆ながら，ここに記して謝意を表すると共に当方面に対する学会員諸兄の御研究を望むものである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．