

<総 合 報 告>

二次計画 Quadratic Programming について†

竹 内 啓*
真 鍋 龍 太 郎**

は し が き

二次計画 Quadratic Programming は、非線形計画 Nonlinear Programming の一分野に属するものであるが、それだけ別個にとり上げる価値のある分野である。それは二つの理由による。一つは、一般の非線形計画問題の場合とは違って、少くとも原理的には有限回の計算によって正確な答を得ることができること。従って一般の非線形計画問題を、二次計画問題によって近似的に表現できるならば、一定の算法を用いて少くとも近似的な答を得ることができるという点で、実際の応用範囲が広いものである。第二は、非線形計画問題についての理論的な問題点が、少くとも原理的にはすべて二次計画問題の中に現われること。従ってそれをくわしく吟味することによって、非線形計画問題の理論について、明確な見通しを得るのに役立つであろうと思われる。そこで以下、二次計画の問題について、理論的側面と、計算法の面の両面にわたってまとめたのべることにしよう。

第1章 理 論 的 側 面

§1. 一般の非線形計画問題についての若干の準備

まず、二次計画問題についてのべる前に、一般の非線形計画問題についてのいくつかの事実をのべておこう。

$\mathbf{x}$ を次元実ベクトル、 $\mathbf{C}$ を n 次元ユークリッド空間 R^n の部分集合、 $f(\mathbf{x})$ をベクトル $\mathbf{x}$ の実数値函数とする。

$\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ の条件の下で、 $z = f(\mathbf{x})$ の最大値あるいは最大値を与える $\mathbf{x}$ を求める問題を考える。まず $f(\mathbf{x})$ が連続微分可能であると仮定し、微係数ベクトルを

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}}$$

と表わすことにしよう。

定理1. $\mathbf{C}$ が凸集合ならば、 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ が $f(\mathbf{x})$ の最大を与えるための必要条件は、

† 1967年2月11日受理

* 東京大学経済学部, ** 慶応義塾大学工学部

すべての $x \in C$ に対して

$$(1.1) \quad v(x^*)'(x^* - x) \geq 0$$

となることである。

証明. ある $x_0 \in C$ に対して

$$v(x^*)'(x^* - x_0) < 0$$

となったとしよう. $0 \leq t < 1$ とすると

$$x_t^* = x^* - t(x^* - x_0) = (1-t)x^* + tx_0 \in C$$

そこで, $g(t) = f(x_t^*)$ とおき, t で微分すると,

$$g'(t) = -(x^* - x_0)'v(x_t^*).$$

従って, $g'(0) > 0$ 故に十分小さい $t > 0$ をとれば,

$$g(t) > g(0), \quad \text{すなわち}$$

$$f(x_t^*) > f(x^*)$$

となる. すなわち $x = x^*$ は最大値を与えない. (証終)

定理 2. f が凹函数ならば, (1.1) は $x = x^*$ が最大を与えるための十分条件となる.

証明. ある $x_0 \in C$ に対して,

$$f(x_0) > f(x^*)$$

となるとすれば, 任意の $0 < t < 1$ に対して

$$x_t^* = x^* - t(x^* - x_0) = (1-t)x^* + tx_0$$

とおくと, f は凹だから,

$$\begin{aligned} f(x_t^*) &\geq (1-t)f(x^*) + tf(x_0) \\ &= f(x^*) - t\{f(x^*) - f(x_0)\} \end{aligned}$$

従って, t で微分すると $-(x^* - x_0)'v(x_t^*) \geq -\{f(x^*) - f(x_0)\} > 0$

とならねばならない. すなわち $x = x_0$ について (1.1) が成り立たない. (証終)

系. C が凸集合, かつ $f(x)$ が凹函数ならば, (1.1) は $x = x^*$ が最大を与えるための必要十分条件になる.

条件 (1.1) は $v(x^*)$ を固定して考えれば, $x = x^*$ が一種の線形計画問題の解になっていることを表わしている. すなわち $v(x^*) = v^*$ とおくと,

$x \in C$ の範囲で, v^*x の最大を求める問題の解が $x = x^*$ で与えられる.

ことを意味する.

そこで次に条件 $x \in C$ についてより制限された場合を考えよう.

A を m 行 n 列の行列とし, b を m 次元定数ベクトルとして, 条件 $x \in C$ が

$$(1.2) \quad b - Ax \in \mathcal{U}, \quad x \in \mathcal{V}$$

という形に表わされるものとしよう. ここに $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ はそれぞれ m 次元, および n 次元ベク

トル空間における閉凸錐¹⁾を表わすものとする。そのとき、 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の共役凸錐²⁾を $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ とすれば、次の定理がなり立つ。

定理 3. $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ が (1.2) の範囲で $\mathbf{v}^*\mathbf{x}$ の最大を与えるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} A'\lambda^* - \mathbf{v}^* &\in \mathfrak{B}^*, & \lambda^* &\in \mathfrak{A}^* \\ \lambda^{*'}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) &= 0, & \mathbf{x}^*(A'\lambda^* - \mathbf{v}^*) &= 0 \end{aligned}$$

となるよう m 次元ベクトル λ^* が存在することである。

この定理は一般の線形計画法の双対定理にほかならないから、証明は他にゆずる。

§ 2. 二次計画問題の一般的性質

§ 1 にのべたことを二次計画問題に応用しよう。

Q を n 次の対称行列とし、 A を m 行 n 列の行列、 $\mathbf{b}$ を m 次元実ベクトル、 $\mathbf{c}$ を n 次元実ベクトル、 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ をそれぞれ m 次元、 n 次元ベクトル空間の閉凸錐として、

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{B}$$

の条件の下で、

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'Q\mathbf{x}$$

の最大を求めるという二次計画問題を考える。

定理 4. $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ が上記の二次計画問題の解を与えるための必要条件は、

$$\begin{aligned} A'\lambda^* + Q\mathbf{x}^* - \mathbf{c} &\in \mathfrak{B}^* & \lambda^* &\in \mathfrak{A}^* \\ (1.3) \quad \lambda^{*'}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) &= 0, & \mathbf{x}^{*'}(A'\lambda^* + Q\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) &= 0 \end{aligned}$$

となるような λ^* が存在することである。

証明は前節の定理について $\mathbf{v}^* = \mathbf{c}^* - Q\mathbf{x}^*$ となることを用いればよい。

定理 5. Q が非負定符号 positive semi-definite ならば、(1.3) は $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ が最大を与えるための必要十分条件になる。

証明. Q が非負定符号ならば f が凹函数になるから、定理 2 より明きらか。

定理 4, 5 は問題の解が存在することを前提としている。もし解が存在しないとすれば、一般には (1.3) をみたす λ^* , $\mathbf{x}^*$ が存在しても、それは解を与えない、また Q が負定符号ならば、(1.3) をみたす λ^* , $\mathbf{x}^*$ が存在しないことになる。

ところで、もし Q が正定符号ならば f は厳密に凸になり、また $\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{c}$ が全範囲での $\mathbf{x}$

- 1) $\mathfrak{A}$ が凸錐 convex cone であるとは $\mathfrak{A}$ について次の 2 つの条件がなり立つことをいう。 i) $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$, $c \geq 0$ ならば $c\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$. ii) $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{A}$ ならば $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{A}$. また、閉じた凸錐を閉凸錐という。
- 2) $\mathfrak{A}$ を閉凸錐とすると、 $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$ となるすべての $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{y}'\mathbf{x} \geq 0$ となるようなベクトル $\mathbf{y}$ の全体はやはり閉凸錐である。これを共役凸錐 conjugate cone という。

の最大を与える。また $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき、 $f \rightarrow -\infty$ となるから、 f は n 次元ベクトル空間の任意の閉集合の範囲内で必ず最大を持つ。また閉凸集合の範囲内で最大を与える x は一義的に定められる。従って次のことがなり立つ。

定理 6. Q が正定符号ならば、(1.3) を満足する x^* は一義的に定められ、それが最大を与える。

従って条件 (1.3) をみたすような x^* , λ^* を見出すことが、二次計画法の基礎となる。

もう一度条件 (1.3) をくわしく書くと、それは、次のようないくつかの部分にわけて考えることができる。

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } x \in \mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathcal{U}^* \\
 & \text{(b) } b - Ax \in \mathcal{U} \\
 & \text{(1.4) } \text{(c) } A'\lambda + Qx - c \in \mathcal{B}^* \\
 & \text{(d) } \lambda'(b - Ax) = 0, \quad x'(A'\lambda + Qx - c) = 0
 \end{aligned}$$

そこで解を求めるためにいくつかの方法が考えられる。

1° (1.4) の (a), (b), (d) をみたす x_0 , λ_0 から順次改善して (c) をみたす解を見出す——Wolfe の方法, その他。

2° (a), (b), (c) をみたす解から出発して (d) をみたす解を見出す——Frank-Wolfe。

3° (a), (c), (d) をみたす解の中で (b) をみたすものを見出す——Theil-van de Panne。

さらに 1° の方法において、2 段階線形計画の第 1 段階と同じように、シンプレックス法によってとにかく (c) をみたす解をみつけようとするのが Wolfe の方法である。しかしそれは目的関数の値を増加させて行く過程とは無関係に行なわれるという点で不満足なところがある。

$$\text{ところで} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = v = c - Qx \quad \text{だから,}$$

$$A'\lambda + Qx - c = -v + A'\lambda \notin \mathcal{B}^*$$

で、かつ x , λ が (a), (b), (d) をみたすならば、 x は $x \in \mathcal{B}$, $b - Ax \in \mathcal{U}$ の条件の下で $v'x$ を最大にする線形計画問題の解になってはいない。すなわち、 x_0 を適当にとれば、

$$x_0 \in \mathcal{B}, \quad b - Ax_0 \in \mathcal{U}$$

$$\text{かつ} \quad v'x_0 > v'x$$

となるようにすることができる。すなわち十分小さい $t > 0$ をとれば、 $x^* = x + t(x_0 - x)$ とするとき、 $x^* \in \mathcal{B}$, $b - Ax^* \in \mathcal{U}$ かつ

$$f(x^*) > f(x)$$

となる。すなわち目的関数の値を増加させることができる。このことをとり入れたのが、Beale あるいは Dantzig の方法である。

また 3° の方法は、条件の一部を無視して得られた最適解が、条件のすべてを満たしているならば、それは確かに最適解になっているという自明の事実を利用していると考えることができ

る。しかしここで、 $f(x)$ が凹函数であることから、次の事実を利用することができる。

定理 7. C_1, C_2 を閉凸集合、 $f(x)$ を凹函数とする。 $x \in C_1$ の範囲で $f(x)$ の最大を与える点 x_1^* が C_2 に属さないならば、 $x \in C_1 \subset C_2$ の範囲で $f(x)$ の最大を与える点 x^* は C_2 の境界上にある。

このことを利用して条件式を一つ一つ試して行くことができる。

次の定理は二次計画法の双対定理と呼ばれているが、計算上にも応用できる。

定理 8. (1.3) をみたす x^*, λ^* は、

$$\text{条件} \quad x \in \mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathcal{A}^*$$

$$A'\lambda + Qx - c \in \mathcal{B}^*$$

の下で $g(x, \lambda) = b'\lambda + \frac{1}{2}x'Qx$ の最大を与える。

証明. 問題を

$$-g(x, \lambda) = -(0'b)\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x'\lambda')\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

の最大を求める問題とみれば、 $x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \rightarrow x$ と読みかえると、この問題の最適解を与える条件が、もとの (1.4) に一致することがわかる。(証終)

Q が定符号でない場合にも、もし解が存在することがわかっているならば、それは (1.4) をみたす解の中のどれかになるから、(1.4) をみたす解をとにかく全部計算すれば、原理的には解けるはずである。しかも Beale, Dantzig のような方法によれば、とにかくシステムティックに局所最大に達することはできるから、そのような計算をくり返すことによって最大を求めることができるであろう。しかしこのことを手際よく進める計算法はまだ知られていないようである。

第2章 計 算 法

§1. は じ め に

本章では、二次計画問題の解法を展望する。前章で論じた一般の二次計画問題で、行列 Q が正定符号で、 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ がそれぞれ R^m, R^n の非負象限の場合には、第1章 §2 の問題は次のようになる。

$$(2 \cdot A) \quad \max \left\{ f(x) = c'x - \frac{1}{2}x'Qx \mid Ax \leq b, x \geq 0 \right\}.$$

以下では特に断わらない限り、 Q は、対称な正定符号行列とする。 x が (2・A) の最適解であるためには前章 (1.3) より、次のような λ が存在することが必要十分である。

$$(a) \quad x \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$(b) \quad b - Ax \geq 0$$

$$(c) \quad A' \lambda + Qx - c \geq 0$$

$$(d) \quad \lambda'(b - Ax) = 0, \quad x'(A' \lambda + Qx - c) = 0.$$

問題 (2・A) の制約条件 $Ax \leq b$ の左辺に非負のスラック変数 y を加え、さらに $v = A' \lambda + Qx - c$ とおくと、上の条件は次のように書ける。

$$(2 \cdot A') \quad \begin{aligned} (a) \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad v \geq 0 \\ (b) \quad & Ax + y = b \\ (c) \quad & Qx - v + A' \lambda = c \\ (d) \quad & \lambda' y + x' v = 0 \end{aligned}$$

問題の制約条件の形は、必ずしも (2・A) のようなものではない。等式や、あるいは変数の非負条件も線形不等式に含めて書いた形の場合もある。しかしそれらの形は等価なもので容易に相互に書き直すことができる。以下で (2・A) 以外の形で論じた方が便利なこともあるので、それら以外の形についても最適解の条件は出しておこう。

まず等式条件の場合は、(2・A) にスラックを加えたものと考えられる。

$$(2 \cdot B) \quad \max \left\{ f(x) = c'x - \frac{1}{2} x' Q x \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

ここで解 x が最適なための条件は、次の方程式を満足する解が存在することで、

$$(2 \cdot B') \quad \begin{aligned} (a) \quad & x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ (b) \quad & Ax = b \\ (c) \quad & Qx - v + A' x = c \\ (d) \quad & x' v = 0 \end{aligned}$$

(2・B) から (2・A) の条件にするには、等式を、 $Ax \leq b$, $-Ax \leq -b$ の2式で置き換えて考えればよい。

変数の非負条件 $x \geq 0$ も、 $Ax \leq b$ の中に含めてしまうと、問題は、

$$(2 \cdot C) \quad \max \left\{ f(x) = c'x - \frac{1}{2} x' Q x \mid Ax \leq b \right\}$$

このときの最適解の条件は次のようである。

$$(2 \cdot C') \quad \begin{aligned} (a) \quad & y \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \\ (b) \quad & Ax + y = b \\ (c) \quad & Qx + A' \lambda = c \\ (d) \quad & y' \lambda = 0 \end{aligned}$$

以下の各節で二次計画問題を解く主な方法の特徴とその概略を述べる。それぞれにどんな長短があり、どんな形の問題に適したものであるかは、応用ないしは計算の経験がまだ一般に浅いために、今後の諸方面での研究の成果を待たなければならない。

§2. Wolfe のシンプレックス法

問題 (2・B) の最適解を求めるには、(2・B') を満たす許容解を求めればよい。そのためにまず (2・B'・a, b) を満たす解を、次に (2・B'・c) を満足する解を線形計画のシンプレックス法の第1段階にやや手を加えて解いてゆく方法である[27].

第1段階：その他の式はさておいて (2・B'・a, b) を満たす解をまず作る。人為変数 w, z^1, z^2 を導入して、

$$(2.1) \quad \begin{cases} Ax & + Iw = b \\ Qx - v + A'\lambda + z^1 - z^2 & = c \\ x, v, z^1, z^2, w \geq 0 \end{cases}$$

の条件の下で、初期解 $x=0, v=0, \lambda=0, w=b$ から始め、 $\lambda=0, v=0$ を保ちながら、シンプレックス法で、

$$W = 1'w$$

を最小にする。ここで z は、 $c_i \leq 0$ ならば $z_i^1 = -c_i, z_i^2 = 0, c_i \geq 0$ ならば $z_i^1 = 0, z_i^2 = c_i$ に取っておく。(2.1) の第1式に解があれば、 $1'w=0$ となる。このとき $1'(z^1 + z^2) = 0$ ならば同時に (2・B') の解が得られたことになるが、そうでないときは次の段階へ進む。

第2段階：第1段階の結果、 w と、基底に入っていない z^1, z^2 の成分を除くと、次の式で $x'v=0$ が成り立つ解が求められている。

$$(2.2) \quad \begin{cases} Ax & = b \\ Qx - v + A'\lambda + Dz & = c \\ x, v, z \geq 0. \end{cases}$$

ただし、 D は基底に残った z の係数の n 次対角行列で、対角要素は z_i^1 が残っていれば $+1, z_i^2$ が残っていれば -1 。

次に (2・B'・c) も満たす解を得るために、 $x'v=0$ を保持しつつ、

$$Z = 1'z$$

を最小にする。 $x'v=0$ を保つために、シンプレックス計算をするときに、

x_i (あるいは v_i) が基底に入っているときは、対応する v_i (あるいは x_i) を基底に入れない。

という規則を付加する。 $Z=0$ の解が求まれば、そのときの解が最適解である。

解法の妥当性： Q が正定符号なら、(2.2) の基底解で、 $x'v=0$ を満たし、 $Z=0$ となるものがあることを証明しておこう。

$Z \neq 0$ なのに、これ以上シンプレックス法が進まなかったと仮定し、帰びゆう法で証明する。基底に入る x 変数のベクトルを x_1 、これに対応する v 変数の成分のベクトルを v_1 とする。 $x_1'v_1=0$ ゆえ、 $v_1=0$ 。基底に入ってる v 変数のベクトルを v_2 、これに対応する x 変数の成分を $x_2(=0)$ とする。 x, v の残りの成分のベクトルを x_3, v_3 とする。

$x_2=0, v_1=0$ の条件のもとで, $-1'z$ をそれ以上大きくできなくなったのである. 行列 A, Q, D を, x_1, x_2, x_3 に応じ分割すると (2.2) は次の (2.3) のようになり, 最終基底解

$$x_1^*, x_3^*=0, v_2^*, v_3^*=0, z^*$$

を得ているわけである.

$$(2.3) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \max Z = -1'z \\ \text{(b)} & \text{sub.to } \begin{cases} A_1x_1 + A_3x_3 & = b \\ Q_{11}x_1 + Q_{13}x_3 & + A_1'\lambda + D_1z = c_1 \\ Q_{21}x_1 + Q_{23}x_3 - v_2 & + A_2'\lambda + D_2z = c_2 \\ Q_{31}v_1 + Q_{33}x_3 & - v_3 + A_3'\lambda + D_3z = c_3 \end{cases} \\ \text{(c)} & \\ \text{(d)} & \\ \text{(e)} & \\ \text{(f)} & x_1 > 0, x_3 \geq 0, v_2 > 0, v_3 \geq 0, z \geq 0 \end{array}$$

(b~e) の条件式に, 双対変数 s, t_1, t_2, t_3 を与えて問題 (2.3) の双対問題を考えると,

$$(2.4) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \min W = b's + c_1't_1 + c_2't_2 + c_3't_3 \\ \text{(b)} & \text{sub.to } \begin{cases} A_1's + Q_{11}t_1 + Q_{12}t_2 + Q_{13}t_3 \geq 0 \\ A_3's + Q_{31}t_1 + Q_{32}t_2 + Q_{33}t_3 \geq 0 \\ -t_2 \geq 0 \\ -t_3 \geq 0 \\ A_1t_1 + A_2t_2 + A_3t_3 = 0 \\ D_1t_1 + D_2t_2 + D_3t_3 \geq -1. \end{cases} \\ \text{(c)} & \\ \text{(d)} & \\ \text{(e)} & \\ \text{(f)} & \\ \text{(g)} & \end{array}$$

このときの解を s^*, t_1^*, t_2^*, t_3^* とする, 線形計画の理論から

$$(2.5) \quad v_2^* > 0 \quad \text{だから} \quad t_2 = 0,$$

$$(2.6) \quad x_1^* > 0 \quad \text{だから} \quad A_1's^* + Q_{11}t_1^* + Q_{13}t_3^* = 0.$$

(2.6) に左から t_1^* を掛け, (2.4c) に t_3^* (≤ 0 , (2.4.e) による) を掛けて,

$$(2.7) \quad t_1^* A_1's^* + t_1^* Q_{11}t_1^* + t_1^* Q_{13}t_3^* = 0,$$

$$(2.8) \quad t_3^* A_3's^* + t_3^* Q_{31}t_1^* + t_3^* Q_{33}t_3^* \leq 0.$$

この2式をまとめて,

$$[t_1^*/t_3^*] \begin{bmatrix} A_1' \\ A_3' \end{bmatrix} s^* + [t_1^*/t_3^*] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{31} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^* \\ t_3^* \end{bmatrix} \leq 0.$$

(2.5), (2.4.f) より $A_1t_1 + A_3t_3 = 0$ だから, この式の第1項は消える. Q は正定符号だから, その部分行列もやはり正定符号であり,

$$[t_1^*/t_3^*] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{31} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^* \\ t_3^* \end{bmatrix} \leq 0$$

となるのは, $t_1^* = t_3^* = 0$ のときに限る. これを (2.6) に代入して, (2.4.b) は,

$$A_1's^* = 0.$$

よって目的函数は,

$$W = b's^* = (A_1x_1^* + A_2x_2^* + A_3x_3^*)'s^* = 0$$

となる。こうして、双対問題 (2.4) の最小値は、 $t_1^* = t_2^* = t_3^* = 0$ で $W = 0$ であることがわかった。

他方主問題の目的函数は 双対定理により、双対問題の目的函数値と一致しなければならないが、仮定により、

$$Z = -1'z < 0$$

であるから、矛盾している

よって $x_2 = 0$, $v_1 = 0$ の条件つきでも、 Z を大きくできることがわかった。

Q が非負定符号のとき：上記の Q が正定符号の場合の方法を、Wolfe は short from と呼んでいる。 Q が非負定符号とゆるめた場合には、次のように目的函数の 1 次の項にパラメータを掛けて、パラメトリックに解き、これを long from といっている。

$$\max \left\{ f(x) = \mu c'x - \frac{1}{2} x'Qx \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}.$$

この問題は、まず $\mu = 0$ にして前述の short from で解き、 $x \geq 0$, $v \geq 0$, $x'v = 0$ の解を求めておく。証明はしなかったが、前述の方法は、 $\mu = 0$ の場合は Q が非負定符号でも使える。

次に、

$$\begin{cases} Ax & = b \\ Qx - v + A'\lambda & = \mu c \\ x \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

において、 $x'v = 0$ を保持しつつ μ を大きくしてゆく。この過程は、線形計画で制約式の定数項をパラメトリックに大きくする過程と同様で、 μ を大きくしてゆくときに、基底変数が負になるものが出て来たら、その変数を基底から追出すように、その μ の値の点で消去演算をする。1 回の基底の変換ごとに解が出て、基底解の系列 $\{X^k\}$ を得る。ただし、

$$X^k = (x^k, v^k, \lambda^k, \mu^k), \quad 0 = \mu^0 < \mu^1 < \dots < \mu^K.$$

このときも、 $x'v = 0$ を維持するための前に述べた基底に関する付加規則を適用して消去演算を進める。こうすると、

$$0 = x^k v^k = x^{k+1} v^k = x^k v^{k+1} = x^{k+1} v^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

であり、 X^k からの μ をパラメトリックに動かすときの解の半直線 $X^k + \mu X^{k+1}$ 上のすべての点でも、

$$x'v = (x^k + \mu x^{k+1})'(v^k + \mu v^{k+1}) = 0$$

は保たれる。

$\mu^k \geq 1$ の場合は、 $\mu^k < 1 \leq \mu^{k+1}$ となる k を取れば、 $\mu = 1$ に対する解は次のように求められる。

$$X = \frac{\mu^{k+1}-1}{\mu^{k+1}-\mu^k} X^k + \frac{1-\mu^k}{\mu^{k+1}-\mu^k} X^{k+1}$$

$\mu^K < 1$ に対しては,

$$X = X^K + \frac{1-\mu^K}{\mu^{K+1}} X^{K+1}$$

で与えるものが $\mu=1$ となって解になる.

Q が非負定符号のときには, 上記の方法の他に, 摂動法によることもできる. すなわち Q が非負定符号のときには, Q の対角要素に ϵ を加えると, 正定符号にすることができる. すなわち, $Q(\epsilon) = Q + I\epsilon$ ($\epsilon > 0$) とすると,

$$x'Q(\epsilon)x = x'Qx + \epsilon x'Ix$$

は, $x'Qx=0$, $x \neq 0$ なる x に対しても,

$$x'Q(\epsilon)x = \epsilon x'Ix = \epsilon x'x > 0$$

となるからである. Hadley は, Q の対角要素に $10^{-4} \sim 10^{-5}$ を加えても数値結果に影響ないと言っている [15]. しかし, 摂動による解への影響を詳細に論じたものはない.

Long form, short form 共に含めたコンピュータ・コードが, Wolfe らによって, IBM 704 用に (SHARE の RS QP1) 作られている.

§ 3. Frank-Wolfe の方法

問題 (2・B) を解くために, (2・B') を満たす許容解を求めるが, 前節の方法と異なり, $x'v=0$ を無視した解を最初に求め, 次に $x'v=0$ も満たす解を求めるものである [14].

第1段階: $x'v=0$ を無視して

$$\begin{aligned} (2.9) \quad & (a) \quad x \geq 0, \quad v \geq 0 \\ & (b) \quad Ax = b \\ & (c) \quad Qx - v + A'\lambda = c \end{aligned}$$

だけを満たす解を § 2 で述べた方法のように線形計画の第1段階の方法で求める. もし (2.9) に解がなく, $Ax=b$ だけには許容解があるときには, 問題 (2・B) に解はあるが有界なものはない.

第2段階: (2.9) の許容解を求めたら, $x'v=0$ も満たす解を求めたい. そこで,

$$w = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \geq 0, \quad w^+ = [v'x'] \geq 0$$

とおくと,

$$\frac{1}{2}w^+w = \frac{1}{2}(v'x + x'v) = x'v \geq 0.$$

よって, $Z = -w^+w$ が最大, すなわちゼロ, の解が求めたい最適なものである. そのような解を, w (すなわち x, v) を変数とする次の線形計画問題を繰返し解いて求める.

$$(2.10) \quad \max \{Z_k = -w_k^+ w \mid \text{条件}(2.9.a, b, c)\}$$

初めは ($k=0$ のとき) 第1段階で求めた (2.9) の許容解を w_0^+ として解き始める. (2.10) をシンプレックス法で解くと, 各ステップで, $-w_k^+ w(1) < -w_k^+ w(2) < \dots$ なる許容基底解 $w(1), w(2), \dots$ が求められる. 次のような $w(h)$ が求められたら止める.

$$(2.11) \quad \begin{aligned} (a) \quad & w_k^+(h)w(h)=0 \quad \text{または,} \\ (b) \quad & -w_k^+(h)w(h) \geq -\frac{1}{2}w_k^+ w_k \end{aligned}$$

(a) で終わった場合には, $w^*=w(h)$ が求める解であり, (b) の場合には次のようにして新たな w_{k+1} を求めて (2.10) を繰返し解く.

$$\mu = \min \left\{ \frac{w_k^+(w_k - w(h))}{(w^+(h) - w_k^+)(w(h) - w_k)}, 1 \right\},$$

$$w_{k+1} = \mu w(h) + (1 - \mu)w_k.$$

この過程は, $-w_k^+ w_k$ が単調に減少し, 第2段階の有限回の繰返しの後に (2.11.a) に達することが示されている.

§2で, Q が正定符号ならば, 連立方程式 (2.2) の基底解で, $x'v=0$ を満たし, $Z=0$ となるものがあることを示した. この証明は $D=0$ の場合にも成立つ. これにより, 本節の (2.9) の解で, $x'v=0$ となる基底解が, すなわち $Z_k = -w_k^+ w = 0$ となるものが存在する. 従って, 本節の第1段階を経たら, 必ず (2.11.a) に達するわけで, 第2段階に入ってから, (2.11) の(a)にも(b)にもならないうちに, (2.10) の最適解が得られてしまうことはない.

§4. Dantzig らによるシンプレックス法

前の2つの方法は, 二次計画問題の最適解が存在するための条件 (2.B') の許容解を求めるという方法であり, その際計算の繰返しごとに, 必ずしも目的函数が有利な方向へ進みながら解を得るというのではない. Dantzig [10] およびのちに van de Panne と Whinston が発展させた方法 [22] は, 目的函数の勾配が大きい方向へ進みつつ (2.B') を満たす解をつくるという点でやや能率が上る.

等式条件で2次函数の最大化を計る問題 (2.B) の Lagrange 函数を作る.

$$F(x, y, \lambda) = c'x - \frac{1}{2}x'Qx + \lambda'(b - Ax).$$

$\lambda'(b - Ax) = 0$ である限り $F(x, y, \lambda) = f(x)$ である. x の F への貢献度は,

$$(2.12) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = c - Qx - A'\lambda = -v$$

で決まる. そこで解 (x, v) において, $-v_i > 0$ に対応する x_i の値を大きくすれば, F は増大する. この知識を, (2.B') の許容解をみつけるシンプレックス計算にとり入れる.

x を主変数, これに対応する v を双対変数と呼ぶ. (2.B') の解を求めるために,

$$\begin{cases} Ax & = b \\ -Qx + v - A'\lambda & = -c \end{cases}$$

の係数でシンプレックス表をつくる。これに対する許容解を求めてから、修正してシンプレックス法を使う。この方法では、計算中のどこのステップ（シンプレックス表）でも $x'v=0$ が成り立っている、とは限らない。主（双対）変数 $x_i(v_i)$ が基底に入っていたら、それに対応する双対（主）変数 $v_i(x_i)$ は基底に入っていないという性質のものを、標準型のシンプレックス表、この性質を備えてないものを、非標準型の表という。そして非標準型の表では、 x_i, v_i がともに基底に入っているという変数の対が1つ（これを (x_i, v_i) と書く）と、 x_i, v_i ともに非基底という対が1つだけある。

基底から出し入れする変数を次のように決めて消去演算をすれば、上述の方針で行なえる。

基底に入れる変数：標準型のシンプレックス表のときは、負で絶対値が最大の v_i に対応する x_i を、非標準型の表では、 x_i, v_i ともに非基底になっている対のうち v_i を、新たに基底に入れる。

基底から出す変数：新たに基底に入れることにした変数をゼロから大きくしてゆくときに、基底に入っている x_i と、 v_i との中で、最初にゼロになるものを基底から追出すことにする。もし引分けが起き、その中に v_i があったら、 v_i を追出す。

このように軸要素を決めてシンプレックス計算をする。双対変数が基底に非負で入っている、標準型の表になったら、最適解が求められている。

シンプレックス表に目的函数も含められ、各ステップにおける値が求められていると都合がよい。 $f(x)$ に $(2 \cdot B' \cdot c)$ より求める Qx を代入して、

$$\begin{aligned} f(x) &= c'x - \frac{1}{2}x'(v - A'\lambda + c) \\ (2.13) \quad &= \frac{1}{2}c'x - \frac{1}{2}x'v + \frac{1}{2}\lambda'Ax \end{aligned}$$

$Ax=b$ であり、かつ最適解では $x'v=0$ であるから、最適なところでは、

$$= \frac{1}{2}c'x + \frac{1}{2}b'\lambda$$

となる。そこで $2f(x)=f$ をおき、

$$0 = -c'x - b'\lambda + f$$

とおいて、シンプレックス表に1行加えておく。

§ 5. Theil-van de Panne の方法

不等式条件の下での最適点 x^* は、制約式のいくつかを等号で満たしていることに着目して、等号で満たされている制約式の集合をみつけることによって二次計画問題を解くという方針のも

のを Theil らオランダの研究者達が考えている [5, 6, 8, 25]. また多くの解法が, 制約条件を満たしている許容解から出発するのに対し, この方法は非許容な点から始まる.

本節では, 変数の非負条件 $-I\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ も $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に含めてしまった問題 (2・C) で考える. すべての制約式のある部分集合を考え, これらの不等式を等式条件に直した式の集合を S と呼ぶことにする. 等式条件 S の下で $f(\mathbf{x})$ を最大にする $\mathbf{x}$ が存在すれば (S の連立1次方程式に矛盾がなければ) それを $\mathbf{x}^s$ と書く. $\mathbf{x}^s$ が破っている制約式の (番号の) 集合を $V(\mathbf{x}^s)$ と書く.

制約条件が全くないときに, すなわち $S = \phi$ (空集合) のときに, $f(\mathbf{x})$ を最大にする点 $\mathbf{x}^s$ は,

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \text{より,} \quad \mathbf{x}^s = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}.$$

$\mathbf{x}^s$ がすべての制約式を満足していれば, すなわち許容解ならば, $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*$ (最適解) である. もしそうでないとしたら, 次の命題が成立っている.

命題1. $\mathbf{x}^s$ がいくつかの制約式に反しているとする. $\mathbf{x}^*$ はそれらのうちの少なくとも1つを等式で満足している.

そこで, $V(\mathbf{x}^s)$ の制約式の1つだけで S をつくり, $\mathbf{x}^s$ が許容解かどうかを調べる. これを $V(\mathbf{x}^s)$ のすべての制約式について行なう. もし $V(\mathbf{x}^s) = \phi$ すなわち $\mathbf{x}^s$ が許容解であれば, $\mathbf{x}^s$ は $\mathbf{x}^*$ である. $V(\mathbf{x}^s) = \phi$ の $\mathbf{x}^s$ がないときには, 新たな S をこれまでの S に $V(\mathbf{x}^s)$ の1つの式を加えるすべての組合せについて作り, この S でつくる $\mathbf{x}^s$ の許容性を調べる. こうして S が含む制約式の数を1つずつ増やして, 許容な $\mathbf{x}^s$ をさがす. このときに次の命題が役に立つ.

命題2. 最適解 $\mathbf{x}^*$ が等式で満たす制約式の集合を S^* とする. $S \subset S^*$ ($S \neq S^*$) に対し $\mathbf{x}^s$ は, $S^* - S$ の少なくとも1つの制約式に反している.

解 $\mathbf{x}$ がある制約式を不等号で満足しているか, 等号で満たしているか, それとも違反しているかは, いちいち計算してみるのではなく, 条件 (2・C') からわかるように, その式に対する λ_i の符号によって判定できるのである. 許容解がみつかったても, 必ずしもそれが最適とは限らない. $\mathbf{x}^s$ が最適かどうかは次の命題で判定する.

命題3. どんな $h \in S$ に対しても, 解 $\mathbf{x}^{s-h}$ を作ると, これが第 h 制約式を破っているときには, $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*$ である.

これまでのシンプレックス法とは大分異なるので, 手順を構成する上に重要な上の命題の証明を記しておこう.

(命題1の証明) 等式条件 S の下で $f(\mathbf{x})$ を最大にする点は, Lagrange 函数をつくって,

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^s) = \mathbf{c}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^{s'}(\mathbf{b}_s - A_s\mathbf{x}^s) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^s)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{x} - A_s'\boldsymbol{\lambda}^s = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

より,

$$(2.14) \quad \mathbf{x}^s = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_s' \lambda^s = \mathbf{x}^p - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_s' \lambda^s$$

である. $\mathbf{A}_s$ は $\mathbf{A}$ の S に対応する行でつくる部分行列, $\mathbf{b}_s$ は $\mathbf{b}$ の S に対応する成分ベクトルである. (2.14) に左から $\mathbf{A}_s$ を掛けた上に, $\mathbf{A}_s \mathbf{x}^s = \mathbf{b}_s$ であることを使うと,

$$(2.15) \quad \mathbf{A}_s \mathbf{x}^s = \mathbf{b}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}^p - \mathbf{A}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s' \lambda^s.$$

$\mathbf{P}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s'$ において,

$$(2.16) \quad \mathbf{P}_s \lambda^s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}^p - \mathbf{b}_s.$$

$\mathbf{Q}$ が正定符号であるので, $\mathbf{A}_s'$ の列が 1 次独立なら ($\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ に非退化の仮定をすれば言える), $\mathbf{P}_s$ も正定符号になり,

$$(2.17) \quad \lambda^{s'} \mathbf{P}_s \lambda^s = \lambda^{s'} (\mathbf{A}_s \mathbf{x}^p - \mathbf{b}_s) > 0.$$

退化が起きないとすれば, $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*$ ならば $\lambda^s > 0$ であり, (2.17) が常に成立つためには, $\mathbf{A}_s \mathbf{x}^p - \mathbf{b}_s$ の少なくとも 1 成分が正でなければならない. すなわち $\mathbf{x}^p$ は S の少なくとも 1 つの式に反してなければならない. (証終)

(命題 2 の証明) $\mathbf{D} = \mathbf{S}^* - \mathbf{S}$ とおく. $\mathbf{S}^*$ に対応する λ^* を, $\mathbf{S}$ と $\mathbf{D}$ に対応して λ_s^* , λ_D^* と分割する. $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ も同様に分割する. この場合 (2.16) に当るものは,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_D \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{A}_s' \mathbf{A}_D'] \begin{bmatrix} \lambda_s^* \\ \lambda_D^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \mathbf{x}^p - \mathbf{b}_s \\ \mathbf{A}_D \mathbf{x}^p - \mathbf{b}_D \end{bmatrix}.$$

(2.14) から $\mathbf{x}^p = \mathbf{x}^s + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s' \lambda^s$ を得て上に代入すると,

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \mathbf{x}^s + \mathbf{A}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s' \lambda^s - \mathbf{b}_s \\ \mathbf{A}_D \mathbf{x}^s + \mathbf{A}_D \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s' \lambda^s - \mathbf{b}_D \end{bmatrix}$$

あるいは,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_D \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{A}_s' \mathbf{A}_D'] \begin{bmatrix} \lambda_s^* - \lambda^s \\ \lambda_D^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \mathbf{x}^s - \mathbf{b}_s \\ \mathbf{A}_D \mathbf{x}^s - \mathbf{b}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_D \mathbf{x}^s - \mathbf{b}_D \end{bmatrix}.$$

これに左から $[(\lambda_s^* - \lambda^s)' \lambda_D^{*'}]$ を掛けると, 正定符号でなければならない. 掛けた右辺は,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda_D^{*'} (\mathbf{A}_D \mathbf{x}^s - \mathbf{b}_D) \end{bmatrix} > 0.$$

$\lambda_D^* > 0$ だから, $\mathbf{A}_D \mathbf{x}^s - \mathbf{b}_D$ の少なくとも 1 つの成分が正でなければならない. (証終)

(命題 3 の証明) $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^*$ ならば, 制約式 h を除くと, $\mathbf{A}_h \mathbf{x}^{s-h} > \mathbf{b}_h$ になることを示す. $\mathbf{A}_h$ は $\mathbf{A}$ の第 h 行. $h=1$, 第 1 行を除くと考えてもさしつかえない. $\mathbf{P}_s$ を次のように分割しておく:

$$(2.18) \quad \mathbf{A}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_s' = \mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} p_{11} & q' \\ q & p_{11} \end{bmatrix}.$$

証明したいことは,

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}^{s-1} - \mathbf{b}_1 > 0$$

である。この $\mathbf{x}^{s-1}$ を (2.14) を使って書き直すと、

$$A_1 \mathbf{x}^s - b_1 - q' \lambda^{s-1} > 0$$

さらに (2.16) (2.18) を使い次のように直せる。

$$(2.19) \quad [p_{11} \quad q'] \lambda^s - q' \lambda^{s-1} > 0$$

(2.16) より λ^{s-1} は、

$$\begin{aligned} (2.20) \quad \lambda^{s-1} &= P_{11}^{-1} (A_{s-1} \mathbf{x}^s - b_{s-1}) \\ &= P_{11}^{-1} [q \quad P_{11}] \lambda^s = [P_{11}^{-1} q \quad I] \lambda^s \end{aligned}$$

これを (2.19) に代入すると左辺は、

$$\begin{aligned} &[p_{11} \quad q'] \lambda^s - q' [P_{11}^{-1} q \quad I] \lambda^s \\ &= [p_{11} \quad q'] \begin{bmatrix} \lambda_1^s \\ \lambda_{s-1}^s \end{bmatrix} - q' [P_{11}^{-1} q \quad I] \begin{bmatrix} \lambda_1^s \\ \lambda_{s-1}^s \end{bmatrix} \\ &= (p_{11} - q' P_{11}^{-1} q) \lambda^s \end{aligned}$$

となる。 $\lambda_1^s, \lambda_{s-1}^s$ は λ^s の第1成分と、その残りの成分のベクトルである。上式が正であることを示したい。

P_s は正定符号だから、 $\mathbf{x}' = [1 \quad -q' P_{11}^{-1}]$ にとっても $\mathbf{x}' P_s \mathbf{x} > 0$ であるから、

$$0 < \mathbf{x}' P_s \mathbf{x} = [1 \quad -q' P_{11}^{-1}] P_s \begin{bmatrix} 1 \\ -q' P_{11}^{-1} \end{bmatrix} = p_{11} - q' P_{11}^{-1} q.$$

よって $\lambda^s > 0$ ならば $A_1 \mathbf{x}^{s-1} > b_1$ を示せた。(証終)

この解法の中心事項を、退化が生じないものとして証明したが、退化が起きても、 Q が定符号のときには問題はない。最適解 $\mathbf{x}^*$ を規定する S は一意的に決まらなくとも、解 $\mathbf{x}^*$ は一意なものであるから。これらについては [5] が詳しい。

この方法は、許容解を得るまでのすべての可能な S を調べつくすことになるので、制約式や変数が少ないとき、特に少数の制約式上に解が載っているときには、有利であろう。

キャパシティ法：上記方法と類似して、問題 (2.C) に、変数の総和を押さえる、キャパシティ条件と称する制約 $\mathbf{1}' \mathbf{x} = \beta$ を付け加えて解く方法がある [17]。

$$(2.21) \quad \max \left\{ f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}' \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}' Q \mathbf{x} \mid A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1}' \mathbf{x} = \beta \right\}$$

β をゼロから出発して大きくしてゆく。 β に関する (2.21) の解を $\mathbf{x}(\beta)$ とすると、元の問題 (2.C) の解 $\mathbf{x}^*$ に対して $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\beta^*)$ となる β^* が必ずあり、そこまで β を大きくしてゆきたい。言い換えると、制約式 $\mathbf{1}' \mathbf{x} = \beta$ に対する双対 (あるいは Lagrange) 変数を $\mu(\beta)$ とすると、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\beta^*)$ となり、かつ $\mu(\beta^*) = 0$ となるまで β を徐々に大きくしてゆく。

$\beta = \hat{\beta}$ のときの解で、等号で成立っている制約条件式 (の番号) を $S(\hat{\beta})$ とする。 $\mathbf{1}' \mathbf{x} = \beta$ は等式だから常に S に入っている。 β を $\hat{\beta}$ から大きくしてゆく過程で、次の3つが重要な手順である。

$t \in S(\hat{\beta})$ の制約式に対して、 $\beta > \hat{\beta}$ で $\mu(\beta) = 0$ ならば、 t を $S(\hat{\beta})$ から除く。 $r \in S(\hat{\beta})$ について $\beta > \hat{\beta}$ で $\mu^{s(\hat{\beta})+r}(\beta) = 0$ になったら、式上を $S(\hat{\beta})$ に追加する。 $\beta > \hat{\beta}$ に対して $\mu(\beta) = 0$ ならば x^* を得る。

§ 6. Beale の方法

Beale の方法は、§1 にまとめた、2 次計画問題の最適解の条件式を直接は使ってない。線型計画法のシンプレックス法のように、基底に入っていない変数を、目的関数が増大するように、順次基底に入れてゆこうというものである [3, 4]。

問題 (2・B) の条件式 $Ax = b$ の係数行列 A の列から正則な行列 B をつくり、これに対応する変数を $x_B' = (x_{B_1}, \dots, x_{B_m})$, A から B を除いた部分の列でつくる行列を R , これに対応する変数を $x_R' = (x_{R_1}, \dots, x_{R_{n-m}})$ とおく。つまり x_B を基底に、 B を基底行列にとったわけである。すると制約式の解は、

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}R x_R$$

と書ける。 $x_R = 0$ において、 $x_B = B^{-1}b \geq 0$ となるものが許容基底解である。成分ごとに書くと、

$$(2.22) \quad x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} y_{ij} x_{R_j} \quad i=1, \dots, m$$

ただし、 y_{i0} は $B^{-1}b$ の第 i 成分、 y_{ij} は $B^{-1}R$ の (i, j) 要素である。

上の x_B を目的関数に代入して、非基底変数で表わすと次の形になっている。

$$(2.23) \quad f = f_0 + \alpha' x_R - \frac{1}{2} x_R' G x_R.$$

また非基底変数についての偏微分は、

$$(2.24) \quad \frac{\partial f}{\partial x_{R_j}} = \alpha_j - \sum_{k=1}^{n-m} g_{jk} x_{R_k}.$$

基底解では、 $x_R = 0$, $x_B = y_0$ となっている。このとき、すべての $\alpha_j \leq 0$ ならば、この解が最大値を与えるものであるが、 $\partial f / \partial x_{R_j} = \alpha_j > 0$ なるものがあれば、 x_{R_j} を 0 から大きくすると f は増加する。

x_{R_j} を大きくできる限度は、基底変数 x_{B_i} のどれかがゼロになってしまうか、 $\partial f / \partial x_{R_j}$ が減少してゼロになってしまうかのいずれかで決まる。すなわち、

$$x_{R_j} = \min \{x_{R_j}^{(1)}, x_{R_j}^{(2)}\},$$

$$x_{R_j}^{(1)} = \min_i \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{ij}} \mid y_{ij} > 0 \right\} = \frac{y_{i_0}}{y_{i_1}},$$

$$x_{R_j}^{(2)} = \frac{\alpha_j}{g_{jj}}, \quad g_{jj} > 0,$$

$y_{ij} > 0$, $g_{jj} > 0$ なるものがないときは $x_{R_j} = \infty$ とすることにする。このときは、 x_{R_i} を大きく

とれば $f(\mathbf{x})$ はいくらでも大きくできる。

$x_{R_j} = x_{R_j}^{(1)}$ のときは, x_{R_j} を基底変数にし, x_{B_s} を非基底変数にするように, 新しい基底解を求めて, そこから再び上の計算を繰返す。

$x_{R_j} = x_{R_j}^{(2)}$ のときには, 基底変数はどれもゼロにできない上に, $x_{R_j} > 0$ でもあるので, 元の制約式の基底解ではなくなる。そこで, $u_j = \partial f / \partial x_{R_j}$ なる符号の制約のない変数を導入して, x_{R_j} を $u_j = 0$ まで増加させる。そこで $(m+1)$ 個の制約式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\partial f / \partial x_{R_j} = 0$ に対する許容基底解ができたと考える。(2.24) から求められる。

$$(2.25) \quad x_{R_j} = \frac{\alpha_j}{g_{jj}} - \sum_{k(\neq j)} \frac{g_{jk}}{g_{jj}} x_{R_k} - \frac{1}{g_{jj}} u_j$$

を (2.22) (2.23) に代入して, u_j を導入すると, (2.25) と (2.22) で $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\partial f / \partial x_{R_j} = 0$ に対する新しい許容基底解ができる。

計算の途中で $x_{R_j} = x_{R_j}^{(2)}$ のケースが起きるたびに新しい u_j が導入されて式が増える。 u_j には符号の制約がないから, 計算の途中では増加と減少の両方の場合を考える必要がある。 u_j が基底に入るようになったら, u_j に関する式を除いてしまってもよいが, ゼロになったらまた使わねばならない。

この方法の計算は, 系統的にシンプレックス法にまとめることができるが, 表の行数が計算中一定でないのは一寸面倒である。

§7. Hildreth の方法

二次計画問題に, 適当な変数変換をすると, もとの問題と等価で, 線形不等式の制約はなく, 変数の非負条件だけのより簡単な二次計画問題が得られる。その問題を解いて与えられた問題の解を得ようとする方法が2つ提案されている。

変数非負の条件まで線形不等式の中に織り込んで書いてしまった問題 (2.C) の最適条件 (2.C') のうち, (2.C'・c) を $\mathbf{x}$ について解く。

$$(2.26) \quad \mathbf{x} = -Q^{-1}(A'\lambda - \mathbf{c})$$

これを使って (2.C') から $\mathbf{x}$ を消去すると, 次の3つの式に変わる。

$$(a) \quad G\lambda - \mathbf{y} = \mathbf{h}$$

$$(2.D') \quad (b) \quad \lambda \geq 0, \mathbf{y} \geq 0$$

$$(c) \quad \mathbf{y}'\lambda = 0$$

この $G, \mathbf{h}$ は $\mathbf{x}$ の消去の際に次のように置き換えたものである。

$$G = A Q^{-1} A' \quad (m \text{ 次元正方行列}),$$

$$\mathbf{h} = A Q^{-1} \mathbf{c} - \mathbf{b} \quad (m \text{ 次元ベクトル}).$$

Q^{-1} が正定符号であるから, G も同様であり, 従って G の対角要素は $g_{ii} > 0$ である。

ところで条件 (2.D') は次の二次計画問題 (2.D) の解 λ が最適であるための必要十分条件

になっていることがわかる。

$$(2\cdot D) \quad \max \left\{ \varphi(\lambda) = h'\lambda - \frac{1}{2}\lambda'G\lambda \mid \lambda \geq 0 \right\}$$

2つの問題 (2・C) と (2・D) の、解が最適なための条件が一致しているので、2つの問題は等価と考えられ、(2・C) を解くかわりに、変数の非負条件しかない (2・D) を解き、その最適解 λ^* から (2・26) によって (2・C) の最適解をみつけようというわけである。

(2・D) を解く方法2つのうち、Hildreth による、連立1次方程式の Gauss-Seidel 反復法に似た方法をまず述べる [16]。次節に Lemke による方法を要約する。

これは $\lambda^0 = 0$ 、あるいは、 $\lambda^0 \geq 0$ の既知の許容解から出発し、 λ のうちの1変数 λ_i に関して、他の変数は固定してそれまでに求められた値を使い、 $\varphi(\lambda)$ を $\lambda_i \geq 0$ の条件で最大にする λ_i を求める。これを成分ごとに繰返して、順次近似のよい解を求める。すなわち、第 $k+1$ 近似解 λ^{k+1} の λ_i^{k+1} は、既に求めた $\lambda_j^{k+1} (j < i)$ 、 $\lambda_j^k (j > i)$ を固定しておいて、 $\lambda_j \geq 0$ のもとで $\varphi(\lambda)$ を最大にするように定める。

$$\lambda_i^{k+1} = \max\{0, w_i^{k+1}\}.$$

この w_i^{k+1} は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i} = h_i - \sum_{j=1}^m g_{ij} \lambda_j = 0$$

から求めるもので、 $\lambda_i^{k+1} (j < i)$ 、 $\lambda_j^k (j > i)$ を用いて次のように値を求める。

$$w_i^{k+1} = -\frac{1}{g_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} \lambda_j^{k+1} - h_i + \sum_{j=i+1}^m g_{ij} \lambda_j^k \right), \quad i=1, \dots, m.$$

g_{ii} は前述のよう $g_{ij} > 0$ だから w_i^{k+1} は必ず求められ、こうして解

$$\lambda^k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

が得られ、かつ、

$$\varphi(\lambda^{k+1}) > \varphi(\lambda^k)$$

である。 G が正定符号のときには、 $\varphi(\lambda^k)$ は $\varphi(\lambda) = \min \varphi(\lambda)$ に、 $x(\lambda^k)$ は x^* に収束することが示されている [16, 13]。

§ 8. Lemke の双対法

Lemke は、(2・D) を解くのに、 $\lambda = 0$ から始めて、 $\lambda \geq 0$ の向きでしかも $\varphi(\lambda)$ を大きくするように進む繰返し過程で、終わったところで (2・D'・a, c) に達するような方法を考えている [20]。初期解 $\lambda = 0$ は、もとの問題 (2・C) の制約条件がないときの最大値 $x = Q^{-1}c$ に対応している。

各ステップでは点 λ により、そこでの n 個の向きを考える。これらの向きは、 $n \times n$ の基底行列の逆行列の行として表わされており、ステップごとに、 φ が大きくなるように基底行列の列を入れ換えてゆく。

あるステップでの基底行列 B を次のように書く.

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad b_i \text{ は } B \text{ の第 } i \text{ 列.}$$

$$(B^{-1})' = (b^1, b^2, \dots, b^n), \quad b^i \text{ は } B^{-1} \text{ の第 } i \text{ 行.}$$

単位行列 I の第 i 列を e_i と書くと, 制約条件 $\lambda \geq 0$ は, $e_i' \lambda \geq 0, i=1, 2, \dots, n$ と書ける.

あるステップの許容解 λ には 0 の要素もあり, この i に関して λ は境界面にのっており $e_i' \lambda = 0$. 基底行列に入っていてこのような列 e_i を, 制約のある列をいい, その他の列を自由列という. 制約のある列の番号は, 1 から n までの整数の部分集合で, これを R と書く.

各ステップで, 目的函数の各方向の勾配をみる次の判定基準 w を作る.

$$(2.27) \quad w = B^{-1}(-y) = B^{-1}(h - G\lambda)$$

計算は, $B = B^{-1} = I$, すなわち $b^{ij} = b_i = e_i, \lambda = 0, w = y = -h$ で B のすべての列が制約のある列 $R = \{1, 2, \dots, n\}$ のところから始める.

基底行列から追出す列 b_r の決定: $w = -B^{-1}y$ をまず計算する. 解 (λ, y) が最適でないときには, 次の 2 つの場合に分かれる. どちらにもならないときには, 最適になっている.

I. B の自由列に対応する w の成分に, $w_i \neq 0$ のものがある.

II. B の自由列に対応する w の成分はすべてゼロだが, $w \leq 0$ ではない.

I のときには自由列に対応する $w_i (\neq 0)$ の中から, II のときには制約のある列に対応する $w_i (> 0)$ の中から, $\max |w_i| = w_r$ なる b_r を追出す.

新しく基底行列に入れる b_r の決定: 新しい係数, 変数には下線を付けて示す. 新しい解 $\underline{\lambda}$ を, $\underline{\lambda} \geq 0$ を保ちつつ, $\lambda - \theta b^r$ 上で φ を最大にするように θ を選び次のように決めたい.

$$\underline{\lambda} = \lambda - \theta b^r.$$

この θ を決めるときに, $\underline{b}_r$ が決まってくる. $\varphi(\lambda - \theta b^r)$ は, $q = Gb^r$ とおくと,

$$\varphi(\lambda - \theta b^r) = \varphi(\lambda) + \theta b^{r'} y - \frac{1}{2} \theta^2 b^{r'} q.$$

$q \neq 0$ のときは, θ を動かすと,

$$\theta_1 = \frac{b^{r'} y}{b^{r'} q} = \frac{-w_r}{b^{r'} q}$$

のときに φ が最大になる. 一方許容解であるためには, $\lambda - \theta b^r \geq 0$ あるいは, $e_i' (\lambda - \theta b^r) \geq 0, i=1, \dots, n$ でなければならず, θ の限界は,

$$\theta_2 = \min_i \left\{ \frac{e_i' \lambda}{e_i' b^r} \mid e_i' b^r > 0 \right\} = \frac{e_{i^*}' \lambda}{e_{i^*}' b^r}.$$

そこで $\theta_0 = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ を θ とする.

$q = 0$ のときは,

$$\varphi(\lambda - \theta b^r) = \varphi(\lambda) - \theta w_r$$

で, w_r と異符号で, ゼロでない θ に対し φ は単調増大するが, $\lambda - \theta b^r$ は $\lambda \geq 0$ の境界にぶつ

かるので, w_r と異符号の θ_2 を $\theta = \theta_2$ とする. 以上のように, φ は増加し, $\underline{b}_r$ は次のように決める.

$$\theta_1 \text{ を使うときは, } \underline{b}_r = \underline{b}^r = q, \quad (\text{ケース a})$$

$$\theta_2 \quad \quad \quad \underline{b}_r = e_k. \quad (\text{ケース b})$$

新しい係数, 変数は次のように計算する.

$$B^{-1}; \underline{b}^r = \underline{b}^r / \underline{b}_r; \quad \underline{b}^i = \underline{b}^i - (\underline{b}^r)' \underline{b}^r, \quad i \neq r.$$

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda} - \theta \underline{b}^r, \quad \underline{y} = \underline{y} - \theta q$$

$$\underline{R}: \text{ケース I a, II b) } \underline{R} \text{ と変らず,}$$

$$\text{ケース I b) } \quad \underline{r} \text{ を } \underline{R} \text{ に加えて } \underline{R} \text{ に,}$$

$$\text{ケース II a) } \quad \underline{r} \text{ を } \underline{R} \text{ から除いて } \underline{R} \text{ に.}$$

§ 9. van de Panne-Whinston の双対法

問題 (2・B) の次の形の双対問題を考える.

$$(2 \cdot E) \quad \min \left\{ g(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{b}' \underline{\lambda} + \frac{1}{2} \underline{x}' Q \underline{x} \mid \underline{v} - A' \underline{\lambda} - Q \underline{x} = -\underline{c}, \underline{v} \geq \underline{0} \right\}$$

この2つの問題は最適値の $\underline{x}$ の値が等しくかつ $\max f(\underline{x}) = \min g(\underline{x}, \underline{\lambda})$ である. そこで主問題 (2・B) の代わりに双対問題 (2・E) を解こうという考えである [22].

(2・E) に対する Lagrange 関数を作ると,

$$G(\underline{v}, \underline{\lambda}, \underline{w}, \underline{x}) = \underline{b}' \underline{\lambda} + \frac{1}{2} \underline{x}' Q \underline{x} + \underline{w}' (\underline{v} - A' \underline{\lambda} - Q \underline{x} + \underline{c}).$$

(2・E) の制約条件を満たす $\underline{w}, \underline{\lambda}, \underline{x}$ に対しては $G = g$ である. $\underline{x}$ に符号の制約がないので,

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{x}} = Q \underline{x} - Q \underline{w} = \underline{0}.$$

Q が正定符号ならば $\underline{x} = \underline{w}$. また

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{b} - A \underline{w} = \underline{y}$$

も, $\underline{\lambda}$ に符号の制約がないから, 最適なところでは, $\underline{y} = \underline{0}$. $\underline{v}$ には $\underline{v} \geq \underline{0}$ の条件があり,

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{v}} = \underline{w} = \underline{x} \geq \underline{0}.$$

$(\underline{x}, \underline{\lambda})$ が (2・E) の最適解であるための条件は, 次の関係を満たす $\underline{v}, \underline{w}$ が存在すること.

$$(a) \quad \underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{y} = \underline{0}, \quad \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$(b) \quad A \underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$$

(2・E)

$$(c) \quad \underline{v} - A' \underline{\lambda} - Q \underline{x} = -\underline{c}$$

$$(d) \quad \underline{x}' \underline{v} = 0$$

これらの解を求めるには, 上の (b) (c) を次のようにシンプレックス表にして, § 4 の方法を使う.

(2.28)

基 底	変 数 値	v	λ	x	y
v	$-c$	I	$-A'$	$-Q$	0
y	b	0	O	A	I

この表は、§4のものと同一ものである。計算は、 $v=-c$, $y=b$, $x=0$, $\lambda=0$ の初期解から始め、双対問題の許容解を得てから、最終的には、 x_i とこれに対応する v_i とが同時に基底に入っていることはなく (§4 の標準型のシンプレックス表)、すべての基底変数 x_i , $v_i \geq 0$ かつ $y=0$ の状態の表を求める。基底から出し入れする変数の決め方は、§4 と似ているが、変数に非負条件が付いてないものがある、という点で変っている。

新たに基底に入れる変数：標準型の表では、対応する x_i が $x_i < 0$ の v_i と、 λ_i の中から、絶対値が最大のものを選ぶ。ただし選んだ λ_i に対応する y_i が $y_i > 0$ のときには $\lambda_i < 0$ で基底に入れ、その他のときには正で入れる。非標準型の表では、ともに非基底になっている対(x_i, v_i)のうちの x_i を正で基底に入れる。

基底から追出す変数：次の変数のうち、新しい基底変数を増加してゆくときに、最初にゼロになるものを基底から追出す。基底に入っている v_i , および主・双対変数ともに基底に入っている対のうちの主変数。すなわち、シンプレックス表で基底から追出しうる上にあげた変数で第 i 行にあるものの値を z_i , 次に基底に入ることになっている変数の列の第 i 行要素を l_{ij} とすると、次の最小に対応する変数を追出す。

$$\min_i \left\{ k \frac{z_i}{l_{ij}} \mid k \frac{z_i}{l_{ij}} \geq 0, l_{ij} \neq 0 \right\}$$

ただし、 $k=1$, 変数を正で基底に入れるとき、

$k=-1$, 変数を負で基底に入れるとき。

目的関数も前のようにシンプレックス表に入れられる。

$$\begin{aligned} g(x, \lambda) &= \frac{1}{2} b' \lambda + \frac{1}{2} (Ax + y)' \lambda + \frac{1}{2} x' Q x \\ &= \frac{1}{2} b' \lambda + \frac{1}{2} \lambda' y + \frac{1}{2} x' (Ax + Qx) \\ &= \frac{1}{2} b' \lambda + \frac{1}{2} \lambda' y + \frac{1}{2} x' w + \frac{1}{2} x' c \end{aligned}$$

最適なところでは、 $y=0$, $x'v=0$ だから、 $2g(x, \lambda)=g$ とおいて、

$$0 = -b' \lambda - c' x + g$$

を表に入れる。

§ 10. 変数に上界がある場合

二次計画問題で、変数の値に上界条件がある場合には、上界条件を普通の線形不等式の条件と

して扱えば解ける。しかし、シンプレックス表を大きくしてこうして解かなくとも、上界条件の付いた線形計画問題を解くように双対法を使って、上界条件のないときの表のままで解くことができる [26]。

変数に上界がある問題

$$\max \left\{ c'x - \frac{1}{2}x'Qx \mid Ax=b, 0 \leq x \leq \bar{b} \right\}$$

において、 x が最適であるためには、次の関係を満たす λ が存在することが必要十分な条件である。

$$x \geq 0, v \geq 0, \bar{v} \geq 0$$

$$Ax=b$$

$$v - \bar{v} - A'\lambda - Qx = -c$$

$$x'v=0, \bar{v}'(x-\bar{b})=0$$

ここで、 $Ax+y=b$, $\bar{x}=x-\bar{b}$ という。 $y, \bar{x}$ を導入すると、上の条件は次のようになる

$$(a) \quad x \geq 0, \bar{x} \geq 0, v \geq 0, \bar{v} \geq 0, y=0$$

$$(b) \quad Ax=b, x+\bar{x}=\bar{b}$$

$$(c) \quad v - \bar{v} - A'\lambda - Q^* = -c$$

$$(d) \quad x'v=0, \bar{x}'\bar{v}=0$$

そこで、上の (b)(c) をシンプレックス表にすると次のようになる。

		v	$\bar{v}$	λ	x	y	$\bar{x}$
(2.29)	$-c$	I	$-I$	$-A'$	$-Q$	O	O
	b	O	O	O	A	I	O
	$\bar{b}$	O	O	O	I	O	I

ところが、次の表のようにして開始し以下に述べるように、 x 変数と $\bar{x}$ 変数、 v 変数と $\bar{v}$ 変数のうち制約されている方を表に出しておくように修正した双対法を使うと、同じことができる。

		v	λ	x	y
(2.30)	v	$-c$	I	$-A'$	$-Q$
	y	b	O	O	A

この表で、 $v=-c, y=b$ から §9 の双対法を使う。一般性を失わずに、 $-c \geq 0, b \geq 0$ と仮定できるから、許容解は得られている。

双対法を使うときに、 $\bar{x}$ 変数、 $\bar{v}$ 変数は、それぞれ x 変数、 v 変数と同様に扱う。 $x_i(\bar{x}_i)$ が上界値を越えたら（すなわちある x_i または $\bar{x}_i > \bar{b}_i$ ），シンプレックス表の $x_i(\bar{x}_i)$ の行の係数を、 $x_i(\bar{x}_i)$ の列にあるもの以外、符号を逆にする。また、これに対応する変数 $v_i(\bar{v}_i)$ の列の符号も逆にする。 $x_i(\bar{x}_i)$ の列と、これに対応する $v_i(\bar{v}_i)$ の列の名前を、 $\bar{x}_i(x_i)$ および $\bar{v}_i(v_i)$ に変える。

参 考 文 献

1. Barankin, E. and R. Dorfman, "A Method for Quadratic Programming (abstract)" *Econometrica*, **24** (1956).
2. ——— and ———, "On Quadratic Programming," *Univ. of California Publications in Statistics*, **2** (1958), 285-318.
3. Beale, E.M., "On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities," *J. of the Royal Statistical Soc., B*, **17** (1955), 173-84.
4. ———, "On Quadratic Programming," *Naval Res. Log. Quart.*, **6** (1959), 227-43.
5. Boot, J.C.G., "Notes on Quadratic Programming: The Kuhn-Tucker and Theil-Van de Panne Conditions, Degeneracy, and Equality Constraints," *Management Sci.*, **8** (1961), 85-98.
6. ———, "Binding Constraint Procedure of Quadratic Programming," *Econometrica*, **31** (1963), 464-98.
7. ———, "On Sensitivity Analysis in Convex Quadratic Programming Problems," *Oper. Res.*, **11** (1963), 771-86.
8. ———, *Quadratic Programming, algorithms, anomalies, applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964.
9. Candler, W. and R. J. Townsley, "The Maximization of a Quadratic Function of Variables Subject to Linear Inequalities," *Management Sci.*, **10** (1964), 515-23.
10. Dantzig, G.B., "Quadratic Programming, A Variant of the Wolfe-Markowitz Algorithms," Research Report 2 of the Oper. Res. Center of the Univ. of California, Berkeley, 1961.
11. Dorn, W. S., "Duality in Quadratic Programming," *Quart. of Applied Math.*, **18** (1960), 155-62.
12. ———, "Nonlinear Programming — a Survey," *Management Sci.*, **2** (1963), 171-208.
13. D'Esopo, D.A., "A Convex Programming Procedure," *Naval Res. Log. Quart.*, **6** (1959), 33-42.

14. Frank, M. and P. Wolfe, "An Algorithm for Quadratic Programming," *Naval Res. Log. Quart.*, **3** (1956), 95-110.
15. Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
16. Hildreth, C., "A Quadratic Programming Procedure," *Naval Res. Log. Quart.*, **4** (1957), 79-86.
17. Houthakker, H.S., "The Capacity Method of Quadratic Programming," *Econometrica*, **28** (1960), 62-87.
18. Kunzi, H.P., and W. Krelle, *Nichtlineare Programmierung*, Springer, 1962.
19. Kurata, R., "Notes on Parametric Quadratic Programming," *J. of Oper. Res. Soc. of Japan*, **8** (1966), 150-53.
20. Lemke, C.E., "A Method of Solution for Quadratic Programming," *Management Sci.*, **8** (1962), 442-53.
21. Markowitz, H., "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints," *Naval Res. Log. Quart.*, **3** (1956), 111-33.
22. van de Panne, C. and A. Whinston, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming," *Oper. Res. Quart.*, **15** (1964), 355-88 (first distributed as Report No. 28, International Center for Management Science, Amsterdam, Holland, April, 10, 1963).
23. ——— and ———, "A Comparison of Two Methods for Quadratic Programming," *Oper. Res.*, **12** (1966), 422-41.
24. Shetty, C.M., "A Simplified Procedure for Quadratic Programming," *Oper. Res.*, **11** (1963), 248-60.
25. Theil, H. and C. van de Panne, "Quadratic Programming as an Extension of Classical Quadratic Minimization," *Management Sci.*, **7** (1960), 1-20.
26. Whinston, A., "The Bounded Variable Problem—An Application of the Dual Method for Quadratic Programming," *Naval Res. Log. Quart.*, **12** (1965), 173-79.
27. Wolfe, P., "The Simplex Method for Quadratic Programming," *Econometrica*, **27** (1959), 382-98.
28. Zahl, S., "A Deformation Method for Quadratic Programming," *J. of the Royal Statistical Soc.*, B-**26** (1964), 141-60. "Supplement," *J. of the Royal Statistical Soc.*, B-**27** (1965), 166-68.