文　献　抄　録

Wets, R. J. B., "Programming Under Uncertainty : The Eqivalent Convex Program," *SIAM J. Applied Mathematics*, **14**, 1 (1966), 89—105.

〔確率的な計画法／問題の特徴づけ／理論的〕

この論文では，2—stage linear programming under uncertainty の solution set および，この問題と同値になる convex program の目的関数の性質をしらべ，持殊なケースに対してそれぞれ具体的な形を求めようとしている．ただ結果の大半は既に Dantzig や Madansky によって明らかにされているものである．

2—stage の問題は次のように記述される．

$$\min z(x)=cx+E_\xi \{qy \mid x\}$$

$$(1)\quad \begin{aligned} Ax\qquad &=b\\ Tx+My&=\xi,\ \xi_n(\Xi,\ F,\ F)\\ x,\ y&\geqq 0\end{aligned}$$

$A: m\times n$, $T:\bar{m}\times n$, $M:\bar{m}\times\bar{n}$, ξ：確率変数，$\Xi\subset R^{\bar{m}}$

1st-stage で x が決められ，ξ が観測されたあとの 2nd-stage の問題は，

$$(2)\quad \begin{aligned} &\min qy\\ &My=\xi-Tx\\ &y\geqq 0\end{aligned}$$

である。その値がわかる前に x を決めるために，$Ax=b$, $x\geqq 0$ をみたす勝手な x に対しては，かならずしも問題(2)が解をもつとは限らない．Dantzig, Madansky は問題(2)の解のもつような x を "Permanently feasible" と呼んでいるが著者はこの言葉は誤解を生むとして，単に feasible solution と呼んでいる．

$$K_1=\{x \mid Ax=b,\ x\geqq 0\}$$

$$K_2=\{x \mid y\geqq 0,\ My=\xi-Tx \text{ for every } \xi\in\Xi\}$$

とするとき，feasible solution の集合 K は

$K=K_1\cap K_2$ と表わされる．

〔Solution Set に関する性質〕

solution set には，次のような性質があることが示めされている．

1. K_1 は convex polyhedron で，K_2 は convex set である．
2. $K=K_1\cap K_2$ は convex set になる．
3. Ξ が有限個のときは，K は convex polyhedron になる．
4. $M=I$, Ξ が compact な場合は，$K_2=\{x \mid Tx\leqq\alpha\}$, ($\alpha$ は ξ の下限)，で $\forall\xi\in Z\ \xi-Tx\geqq 0 \rightleftarrows Tx\leqq\alpha$ である．
5. $M=(I,-I)$ の場合（このときを complete problem と呼ぶ）$K=K_1$ となる．

〔feasibility test〕

$x\in K_1$ が K_2 に属するためには，どんな $\xi\in\Xi$ に対しても問題(2)の制約をみたす $y\geqq 0$ が存在しなければならない．Farkas の lemma を使えば，これは，$U(x,\xi)=\{\min\ u(\xi-Tx) \mid uM\geqq 0\}$ とすると

6. $x\in K_2 \rightleftarrows \forall\xi\in Z,\ U(x,\xi)\geqq 0$

になる．この結果を test に使うためには一般には無限の LP を解かなければならないが，問題(1)の induced constraints のみを $Tx+My\geqq\xi$ に変えた問題に対しては，同様に Farkas の lemma を使ってもっと効率的な結果：

7. $x\in K \rightleftarrows x\in K_1 \wedge \forall\xi\in\Xi\ \ u(x,\xi)\geqq 0$, ただし $u(x,\xi)=\{\min\ u(\xi-Tx) \mid uM\geqq 0,\ u\geqq 0\}$

が得られる．すなわち Ξ が下限をもつときは $u\geqq 0$ なることを使えば，$\forall\xi\in\Xi$, $u(x,\alpha)\leqq u(x,\xi)$, α：ξ の下限，であるから

8. $x\in K \rightleftarrows x\in K_1 \wedge u(x,\alpha)\geqq 0$

となる．

〔equivalent convex program〕

$$(3)\qquad \min f(x),\quad x\in K$$

なる programming problem が (a) $f(x)$ が x だけで表現できる，(b) K が問題(1)の feasible solution の集合である，(c) この問題の最適解が問題(1)の最適解になっている，という条件をみたしているとき問題(3)を問題(1)の equivalent prog. problem という．問題(2)の dual を考えれば

$$Q(x,\xi)=\{\max\ \pi(\xi-Tx) \mid \pi M\leqq q\}$$

$$P(x,\xi)=\{\min\ qy \mid My=\xi-Tx,\ y\geqq 0\}$$

とするとき $P(x,\xi)=Q(x,\xi)$ であることがわかる．

$$Q(x)=E_\xi\{P(x,\xi)\}=E_\xi\{Q(x,\xi)\}$$

とすれば，問題(1)の equivalent prog. problem は

(4) min $z(x)=cx+Q(x)$, $x\epsilon K$

となる. Dantzig & Madansky が示しているように,

9. $Q(x)$ は convex である. したがって問題(4)は equivalent convex prog. となっている.

$Q(x, \xi)$ は x, ξ に関して piecewise linear なことから

10. $Q(x)$ は K_2 で連続関数になる.

また $z(x)$ の各点に於ける supporting byperplane が一意的に決まることから

11. $z(x)$ が K 上で微分可能であるための十分条件は, $F(\xi)$ が連続であることである.

最適解であるための必要十分条件を求めるために, 問題(2)の双対解 $\pi(x, \xi)$ を考える. Dantzig & Madansky による $x=\bar{x}$ に於ける $z(x)$ の supporting hyperplane が 〔$c-E_\xi\{\pi(x,\xi)\}T$〕 $x+E\{\pi(\bar{x},\xi)\xi\}$ になることを利用すれば,

12. $x°\epsilon K$ が最適解 ⇄ A$x\epsilon K$, 〔$c-E_\xi$ $\{\pi$ $(x°, \xi)\}T$〕 $x°\leqq$〔$c-E_\xi\{\pi(x°,\xi)\}$〕 x

となることが導かれる.

確率空間および制約式が持殊なケースの eqivalent program は, (a) Ξが有限のときは, LP になり decomposition algorithm によって計算できる。 (b) M が正則な正方行列で, Ξ が有界な場合にも, LP になる. (c) complete problem のときは,

Ξ : 有限の場合, LP, $F(\xi)$ が一様分布のとき Quadratic Programming, $F(\xi)$ が連続で, ξ が一様分布の確率変数の和で近似されるときも QP, $F(\xi)$ が一般のときはseparable convex programming になることが示めされている. (青沼龍雄)

Feeney, G.J. and C.C. Sherbrooke, "The (s—1, s) Inventory Policy Under Compound Poisson Demand", *Management Science*, **12**, 5 (1966), 391—411

〔在庫/待ち行列/理論的〕

単価が非常に高価で, その需要が一般に少ない, 例えば航空機の予備部品等, の場合には (s—1, s) 型の policy がモデルとして考えられる. これは需要があるたびに, すぐに発注する方策である.

Palm は需要が Poisson の時, 任意の resupply 分布 (納入期間の分布) に対して, resupply 中の品物の数の steady state 分布は Poisson によることを示した. 又 Hadley, Whitin は需要が Poisson 分布に従うとき, 任意の resupply 分布に対して, backorder, lost sale の両方の場合を扱った. Galliher, Morse, Simond は backorder の場合に需要分布を stuttering poisson に一般化したが, resupply 分布は, 単位分布, 指数分布の場合しか扱っていない.

この論文では, Palm の定理を任意の compound poisson 分布 (stuttering poisson は特例として含まれる) に一般化できることを示している.

定理. 「予備品 s, 需要は到着率 λ の compound poisson で, resupply time は任意の分布 $\phi(t)$ (平均値 T とする), また客が受入れられる時, その客のすべての需要に対して1つの resupply 時間が $\phi(t)$ からとり出されると仮定する。

backorder の場合には, resupply 中の数 x の steady state probabilities はパラメタ λT の compound poisson で与えられる.

すなわち,

$$h(x)=p(x|\lambda T)$$
$$=\sum_{y=0}^{x}((\lambda T)^y e^{-\lambda T}/y!)\ f^{y*}(x),$$
$$0\leqq x<\infty.$$

lost sale の場合には, 手持ち在庫 $s-x$ が客の需要量をこえる場合のみ, 客を受け入れる, という仮定の下で,

$$h(x)=p(x|\lambda T)/\sum_{\omega=0}^{s}p(\omega|\lambda T),$$
$$0\leqq x\leqq s.」$$

この定理をもとにして, backorder の場合には

$R(s)$: Ready rate——任意の時点で観測したとき, backorder がない確率

$F(s)$: Fills——手持ち在庫ですぐにうめられる品物の単位時間当りの需要の平均数

$S(s)$: Units in service——任意の時刻における resupply 中の品物の数

lost sale の場合の, 同様の量, $Fc(s)$, $Sc(s)$ を求め, さらに $G(s)$ をそのいずれかの perfomance 測度, k_1 を単位当りの利益, k_2 を在庫費用, C を単価とすれば,

$$H(s)=k_1G(s)-k_2cs$$

を最大ならしめる s を求めれば, 最適予備在庫量 s が求められる.

また供給が直ちに行なわれなくても, τ 時間内であればよい場合に一般化し, 少なくとも τ 時間, resupply process にある品物の数の steady state probabilites は backorder の場合には compound poisson になることも示されている．（反町廸子）

Agin, N., "A Min-Max Inventory Model," *Management Science*, **12**, 7 (1966), 517—529.
〔在庫／待ち行列／理論的〕

N期毎に発注をおこない，その量は，手持ち在庫とすでに発注済みの量の和がSになるように定める，という在庫モデルを考える．

NとSを定常状態における単位時間当りの平均費用を最小なるように定めたい．

このようなモデルで需要と納入期間が独立な確率変数列である場合に，費用を最小ならしめる N, S を解析的に決定する問題は解かれていない．

Hadley, Whitin は需要，納入期間の分布が持別な型をしている場合を扱った．それは，さらに納入期間が互に独立で，発注した順序で品物が到着するという仮定の下で拡張された．Morse はマルコフ過程として扱った，が，しかし納入期間が一般分布の場合は行なわれていない．Finch は納入期間が互に独立で，同じ分布を持ち発注した品物はその順序で到着しなくてもよい場合に，手持ち在庫量の母関数を求めた．がこれの逆変換は求められない．

そこでこの論文では，費用関数を，ある与えられた平均値，分散を持つ stock deficit（手持ち在庫量がS以下の時，Sから手持ち在庫量を引いた量のすべての分布に関して最大ならしめ（これは需要の平均値，分散のみが分れば求まる）さらに，それを最小ならしめる N_0, S_0 を求める．

需要分布が完全にわかっていない場合の在庫問題は新しくはないが，通常は，分布の型が既知で，パラメータが不明か，分布型が不明でパラメータのみが既知かのいずれかが仮定されていた。Dvoretzky, Kiefer, Wolfowitz は前者の場合を扱った．後者は，Scarf が1期の在庫モデルで，与えられた平均値，分散を持つ，すべての需要分布に関して最大ならしめるような費用関数を求め，それを最小ならしめる発注量を求めた．この論文は，Scarf の1期，1決定変数を多段階で，2決定変数の場合に拡張した．

C_p：単位時間当りの backorder された在庫の信用損失費用（penalty cost）（単価）

C_h：単位時間当りの在庫費用（単価）

C_w：単位時間当りの倉庫費用（単価）

C_k：発注のための固定経費

$\phi(x:N)$：発注がN期毎になされる時，stock deficit が x 以下である確率

$C(N,S)$：単位時間当りの平均費用

$$\begin{aligned}C(N,S)&=C_k/N+C_wS+C_h\int_0^s(S-x)d_x\phi(x:N)\\&\quad+C_p\int_s^\infty(x-S)d_x\phi(x:N)\\&=C_k/N+(C_h+C_w)\,S\\&\quad+C_p\int_0^\infty xd_x\phi(x:N)\\&\quad-(C_h+C_p)\int_0^\infty\min(x,S)d_x\phi(x:N)\end{aligned}$$

まず $C_0(N,S)=\max_{\phi\epsilon D}C(N,S)$ を求める．

ただし，D は

$$\int_0^\infty xd_x\phi(x:N)=\mu(N)$$
$$\int_0^\infty[x-\mu(N)]^2\,d_x\phi(x:N)=V(N)$$

であるような分布関数の集合．

$C_0(N,S)$ は $\int_0^\infty\min(x,S)d_x\phi(x,N)$ = minimum にするϕを求める問題に帰するが，Scarf の結果を用いて

$$C_0(N,S)=\begin{cases}C_k/N+(C_h+C_w)S+C_p\mu(N)\\\quad-(C_h+C_p)[\mu(N)]^2S/([\mu(N)]^2\\\quad+V(N))(S\leqq K(N)\text{の時})\\C_k/N+(C_h+C_w)S+C_p\mu(N)\\\quad-\frac{1}{2}(C_h+C_p)\cdot[(\mu(N)+S)\\\quad-([S-\mu(N)]^2+V(N))^{1/2}]\\\qquad(S>K(N)\text{の時})\end{cases}$$

ただし　$K(N)=([\mu]^2+V(N))/2\mu(N)$.

この $C_0(N,S)$ を N, S に関して最小ならしめる N_0, S_0 を求めると，$C_0(N,S_0)=C_0'(N)$ とおくと

Case I　$V(N)/[\mu(N)]^2\geqq(C_p-C_w)/(C_h+C_w)$ ならば

$$S_0=0,\quad C_0'(N)=C_k/N+C_p\,\mu(N)$$

Case II　$V(N)/[\mu(N)]^2<(C_p-C_w)/(C_h+C_w)$ ならば

$$S_0=\mu(N)+(V(N))^{1/2}(C_p-C_h-2C_w)/2((C_w+C_h)(C_p-C_h))^{1/2}$$
$$C_0'(N)=C_k/N+C_w\mu(N)+((C_w+C_h)(C_p-C_w))^{1/2}$$

最後に，ここで求めたN_0, S_0と真の最適値N^*, S^*とを計算機シミュレーションで比較している．それによると $C_h/(C_h+C_p)>0.7$ または <0.025 の場合には，需要分布に対する情報不足が非常に大きくえいきょうすると述べている．

（反町廸子）

Matt, G., "Bestimmung statistisch gesicherter Koeffizienten bei der exponentiellen Ausgleichung (Exponential Smoothing)," *Unternehmensforschung*, **10**, 1 (1966), 15—31
〔指数平滑法／平滑次数の決定／理論的〕

〔問題および要旨〕 指数平滑法では次の2点が問題になる．

(1) 平滑化定数をいかにして決めるか．

(2) 予測式として何次の指数平滑式を使うか．仮に時系列 y_t が，$y_t=\sum_{i=1}^{r} a_i t^{i-1}+\varepsilon_t$ としたとき，この r をいかにして定めるか．

この論文では第2の問題点に関するものである．Brown & Meyer は等間隔にデータを取ったときに指数平滑法によって母数 a_i をいかに推定するかを述べて，とくに$r=1$, 2, 3 の場合の a_i の推定量を与えているが，実はこの解は重みつき最小二乗推定になることが示される（このこと自身は D' Esopo の指摘したことである）．したがって誤差に正規性の仮定をおくことによって指数平滑法は回帰分析の一種と考えられるから，回帰分析の手法をそのまま援用して統計的に母数や次数を推定検定していくことができる．とくに変数選択法によって逐次的に回帰分析を行なって推定検定していくことができる．そうすれば y_t のパターンが変った場合でもうまく追従していくことができる．これがこの論文の趣旨である．つまり指数平滑法は一種の回帰分析であると指摘することがこの論文の骨子である．

〔仮　定〕 データの構造模型を次のようにする．

$$y_i=\sum_{h=1}^{r} a_h x_{hi}+\varepsilon_i, \qquad i=1\sim M$$

y_i：データ．

a_h：未知母数.

x_{hi}：既知定数（$x_{hi}=i^{h-1}$）

ε_i：平均 0，分散 σ^2/p_i の互いに独立な正規確率変数（$p_i=(1-\alpha)^i$）

上述の仮定の表にほとんど通常と同様に最大推定量を求めてゆけばよいので解析は省略する．

〔結　果〕

(1) a_h の推定量 $\hat{a}_h$ として不偏有効推定量が得られる．σ^2 の不偏推定量 $\hat{\sigma}^2$ が得られる．

(2) $\sum_{i=1}^{T}(1-\alpha)^i \varepsilon_i^2$ は x^2 分布をする．

(3) 推定量 $\hat{a}_h$ は正規分布をするから，$(a_h-\hat{a}_h)/\sqrt{\hat{\sigma}^2 a_h}$ は t 分布をする．

(4) 推定量 a_h は指数平滑法によって得られたものと一致する。(ただし，Brown & Meyer によって与えられたものは分布の仮定がないから分散の推定値が与えられない)．簡単のために $r\leqq 3$ とすると

$$S_0^{(n+1)}(y)=\alpha^{n+1}\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i\binom{i+n}{n}y_{-i}$$

$$S_0(y^2)=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i y^2_{-i}$$

とおくと（$\hat{a}_h$ の分散の推定量も与えられるが省略する）

(イ) $r=1$ のとき（$\hat{a}_1=\hat{a}_2=0$）

$$Y_t^{(1)}=a_0^{(1)} \qquad \hat{\sigma}_y^{(1)}=\sqrt{\frac{S_0(y^2)-[S_0(y)]^2}{1-\alpha}}$$

$$\hat{a}_0^{(1)}=S_0(y) \qquad 1>\alpha\geq 0$$

(ロ) $r=2$ のとき（$\hat{a}_2=0$）

$$Y^{(2)}=\hat{a}_0^{(2)}+\hat{a}_1^{(2)}t$$

$$\hat{a}_0^{(2)}=2S_0-S_0^{(2)}$$

$$\hat{a}_1^{(2)}=\frac{\alpha}{1-\alpha}(S_0-S_0^{(2)})$$

$$\sigma_y^{(2)}=\sqrt{\frac{S_0(y)-(S_0)^2-\frac{[S_0-S_0^{(2)}]^2}{1-\alpha}}{1-2\alpha}} \qquad \frac{1}{2}>\alpha\geq 0$$

(ハ) $r=3$ のとき

$$Y_t^{(3)}=\hat{a}_0^{(3)}+\hat{a}_1^{(3)}t+\hat{a}_2^{(3)}t^2$$

$$\hat{a}_0^{(3)}=3S_0-3S_0^{(2)}+S_0^{(3)}$$

$$\hat{a}_1^{(3)}=\frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_0-(10-8\alpha)S_0^{(2)}+(4-3\alpha)S_0^{(3)}]$$

$$\hat{a}_2^{(3)}=\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}[S_0-2S_0^{(2)}+S_0^{(3)}]$$

$$\hat{\sigma}_y^{(3)}=\sqrt{\frac{S_0(y^2)-(S_0)^2-\frac{[S_0-S_0^{(2)}]}{1-\alpha}-\frac{[S_0-2S_0^{(2)}+S_0^{(3)}]^2}{(1-\alpha)^2}}{1-3\alpha}} \qquad \frac{1}{3}>\alpha\geq 0$$

(5) 指数平滑法は回帰分析の一種であるから遂次的にあてはめを行なっていける（その解析が与えられている）．

(6) 新しい観測値が与えられてく，それを新しく取り入れて予測式を改良できる（その解析が与えられている）．　（加藤　満）