文 献 抄 録

Burt H. Leibowitz "Reliability Considerations for a Two Element Redundant System with Generalized Repair Times", *Operations Research*, **14**, 2 (1966), 233—241.

〔信頼性／待ち行列／理論的〕

2つの装置をもつシステムを考える。このシステムは，次のような性質をもっているものとする。

(1) 2つの同じような装置 A_1, A_2 が冗長性をもたせられてシステム内に配置されている。いまそのうちの1つの装置，例えば A_1 が故障したとすると，もう1つの方の装置 A_2 が仕事を続行する。そして A_1 はただちに修理にまわされる。もし A_2 が故障する前に A_1 の修理がおわると，A_1 は再びシステム内に配置される。

2つの装置が共に故障という状態に陥ったとき，このシステムは故障したと考える。

(注，並列冗長システムを扱っている。)

(2) 各装置の故障間隔分布の確率密度関数は，

$f(\tau)=\lambda e^{-\lambda\tau}$

である。ただし

λ＝故障率

τ＝1つの装置が作動しはじめてから故障するまでの時間，

(3) 修理時間分布の確率密度関数を $f_R(x)$ とする。x は，故障が検出されてから修理がおわるまでの時間である。

(4) 故障検出と装置の切換え動作は，瞬時におこなわれるものと考える。すなわち，error-free processes であるあるとみなす。

このようなシステムにおける，システムの平均故障間隔 MTBF は

$$\mathrm{MTBF}=(1/\lambda)\{1+\{1/2[1-L_R(\lambda)]\}\},\quad (R,\lambda>0)$$

となる。ただし，$f_R(x)$ のラプラス変換を $L_R(s)$ とする。この式からただちに

$$\mathrm{M}=\mathrm{MTBF}/(1/\lambda)$$

を求めることができる。Mは，ここで考えたように2つの装置に冗長性をもたせて配置したシステムの平均寿命と，ただ1つの装置しかもたないシステムの平均寿命との比を示している。したがってこれは，MTBF がどの程度改良されたかを知る1つの尺度である。M は R と λ との関数であるが，$R\lambda=\theta$ とおくと，θ だけの関数になる。そこで，各種の修理時間分布に対して M の式を求め，また各種の θ の値に応ずる M の値を計算して数表を作成している。 (牧野都治)

John G. Rau "Redundancy in Decision-Making Systems", *Operation Research*, **14**, 1(1966) 71—78.

〔信頼性／決定理論／理論的〕

2つの状態 $\{Y, N\}$ のうちどちらか一方が真であるとする。最終的には Y あるいは N に決定を下さなければならないとして，まずその前にある定められた回数の実験を行なうことができるとする。ただしここでいう実験とは次のような同一の分布に従う互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の値を観測することである。

$$P_r\{X_i=x_Y\,|\,Y\}=p_{YY},\ P_r\{X_i=x_N\,|\,Y\}=p_{NY}$$
$$P_r\{X_i=x_Y\,|\,N\}=p_{YN},\ P_r\{X_i=x_N\,|\,N\}=p_{NN}$$
$$p_{YY}+p_{NY}=1,\ p_{YN}+p_{NN}=1$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

そして n 個の観測結果のうちで，x_Y の数が k 個以上の時は Y に決定を下し，$(k-1)$ 個以下の時は N に決定を下すものとして，この決定方式を (k, n) と表わす。さらに決定方式 (k, n) に従った場合に正しい決定（Y が真である時には Y に決定を下し，また N が真である時には N に決定を下すことが正しい決定である）を下す確率を $P(k, n)$ とすれば，

$$P(k,n)=P_Y\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_{YY}^{\,i}(1-p_{YY})^{n-i}+P_N\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}p_{YN}^{\,i}(1-p_{YN})^{n-i}$$

となる。ここに P_Y, $P_N\,(=1-P_Y)$ はそれぞれ状態 Y, N に対する事前確率である。この論文の中心課題は，n, P_Y, p_{YY}, p_{YN} が与えられた時，$P(k, n)$ を最大にする k の値 k_n を求めることである。結果だけを示すと，

(a) $p_{YN}<p_{YY}$ ならば

$$k_n=\begin{cases} n & ([n']\geqq n)\\ [n']+1 & (1\leqq[n']<n)\\ 1 & ([n']<1)\end{cases}$$

ここに

$$n'=\frac{\log P_Y(1-p_{YY})^n-\log(1-P_Y)(1-p_{YN})^n}{\log p_{YN}(1-p_{YY})-\log p_{YY}(1-p_{YN})}$$

(b) $p_{YN}>p_{YY}$ ならば

$$k_n=\begin{cases}1 & (P(1,n)\geqq P(n,n))\\ n & (P(1,n)<P(n,n))\end{cases}$$

(c) $p_{YN}=p_{YY}$ ならば

$$k_n=\begin{cases}1 & (P_Y>P_N)\\ n & (P_Y<P_N)\end{cases}$$

となる。

(c) の場合，すなわち $p_{YN}=p_{YY}$ の場合には，実験の結果は未知なる状態について何らの情報をも提供しない。つまり $p_{YN}=p_{YY}$ ならば，実験結果の如何にかかわらず，ベイズの定理から計算される事後分布は事前分布に等しくなるのである。たとえば，n 個の実験の結果がすべて x_Y となったとしても，Y の方が N よりも確からしいとはいえないのであって，最終決定は事前確率のみに基いてなされなければならない。従って (c) は

$$\begin{cases}k_n=0 & (P_Y>P_N)\\ \quad N & (P_Y<P_N)\end{cases}$$

とすべきである。このようにみてくると，この論文で決定方式を単に $(k,\ n)$ に限定したこと，すなわち実験結果の如何に関せず常に N なる決定を下す可能性を除去してあることには問題があるように思われる。

この論文ではまた k を 1 と n に固定した場合に，$P(k,n)$ を最大にする n の値 n_1，n_2 を求める問題を扱っているが，上述の k_n を求める問題といい，この n_1，n_2 を求める問題といい，理論的にはさして新しいものではない。ただ，このような二者択一問題(Dichotomy)を軍事的あるいは工学的な実際の問題から導き出している点は注目にあたいする。

(梅沢　豊)

Joseph A. Hunt "Balancing Accuracy and Simplicity in Determining Reorder Points", *Management Science*, **12**, 4 (1965), 93—103.

〔在庫／確率，最適化／応用例〕

筆者がある重工業会社における部品の在庫管理システムを設計した際に起った問題を扱っかっている。問題は通例の発注点，発注量を各部品について定める事であるが，部品が約 2 万点に及ぶのでこれを在庫費用函数に基づいて正確に計算すると計算量が膨大になって問題になる。そこでより簡単な計算法を考え，更にこれに基づく在庫費用函数と元の在庫費用函数の差が無視出来ない場合の修正係数をいくつかの需要分布について求めている。この様な問題を batch で需要がある場合にも扱つかっている。まず需要が batch で起らない場合について考える。平均年間在庫費用 $C(q,r)$ は下式であらわされる。

$$C(q,r)=RC_1/q+(q/2+r)C_2+(R/q)C_3\int_r^\infty dF_d(x)$$

q，r は発注量，発注点をあらわし C_1 は一回当りの setup 費用，C_2 は在庫費用，C_3 は品切れが生じた時の費用，$F_d(x)$ はリードタイム中の需要分布函数である。式の意味は自明であろう。

最適発注量，発注点 q_s，r_s は次の式より求める。

$$q_s^2=2RC_1/C_2+(2RC_3/C_2)\int_{r_s}^\infty f_d(x)\ dx$$

$$f_d\ (r_s)=C_2\,q_s/(RC_3)$$

従って正確な q_s，r_s はこれを解く事によって得られ，一般には繰返し計算によって最適解が得られるが，数万部品についてこれをおこなう事は，膨大な計算時間をとる。そこで次の様な簡単な計算式を考える。まず

$$C_1(q)=(R/q)\ C_1+(q/2)\ C_2$$

を最小にする値 q_c は

$$q_c^2=2RC_1/C_2$$

又 $$C_2(r)=rC_2+(RC_3/q_c)\int_r^\infty f_d(x)dx$$

を最小にする値 r_c は

$$f_d(r_c)=C_2\ q_c/(RC_3)$$

となる。q_s, r_s の代りに q_c, r_c を用いれば計算は著しく簡単であるが，この際それぞれの在庫費用函数の差 $C(q_c,r_c)-C(q_s,r_s)$ が問題となる。

この差が著しい場合は問題なので

$$q_s=A(q_c,\ r_c)$$

$$r_s=B(q_c,\ r_c)$$

なる A，B について求める必要があるが，これは勿論 $f_d(x)$ が一般の分布の場合については，不可能である。この論文では，二，三の分布についてこれを求め，修正係数 s を決めて，これによって A，B 並びに費用差分 $C(q_c,\ r_c)-C(q_s,\ r_s)$ をあらわしている。例えば指数分布 $(f_d(x)=b\ e^{-bx})$ の場合は，修正係数 s は $1/(q_cb)$ で，これにより，$q_s\approx q_c\ e^s$，$r_s\approx r_c-s^2\ q_c$，$C(q_c,r_c)-C(q_s,r_s)=C_1(q_c)\ s^2/2$ となる。その他三角分布，一般指数分布についても計算して表にしている。又品切れ費用が発注サイクル中の平均品切れ数に基づく場合についても，この様な表をのせている。需要が batch で

起る場合については在庫費用函数を

$$C(q,r)=(R/q)C_1+[(q/2)+r]C_2+(R/q)C_3\sum_{x=r+1}^{\infty}\sum_{\eta=0}^{r}P_e(\eta)P_bd(x-\eta)+(R/q)C_5\sum_{\eta=r+1}^{\infty}P_e(\eta)$$

であらわしている。但しηは発注がなされた時の発洋点と在庫量との差をあらわし，この分布 $P_e(\eta)$ は Karlin の極限定理を用いて

$$P_e(\eta)=[1/E(\xi)][1-F_b(\eta)]$$

であらわしている。又 $P_bd(x)$ はリードタイム中の需要分布である。第3項は "normal stockout" 第四項はηがrより大きい時の "extraordinary" stockout 費用である。この Case Study では第四項を neglect した。更に最適量 q, r は実際の batch size distribution に基づいて，数値的に決められ，batch がない場合の発注量に対する修正量が計算された。この修正量はηその平均値で

$$r=r_s+\sum_{\eta=0}^{\infty}\eta P_e(\eta)$$

となった。この修正量は上のrが最大 batch size より小の場合は極めて正確である。この数値計算は batch size distribution が多くの部品について同じであるので重荷にはならない。多くの場合に修正量は3単位であった。　(山田敬吾)

Richard E. Barlow and Ernest M. Scheuer "Reliability Growth During a Development Testing Program", *Technometrics*, 8, 1 (1966) 53—60

〔信頼性／推定／理論的〕

機器の開発段階では何回も動作試験を繰り返し，不良箇所が発見されれば，その都度設計変更などをしてその機器の信頼度を向上させていく。この論文ではこのような試験と改良の繰返しによって信頼度がどこまで高くなったかをそれまでの試験データから最尤法を使って推定する方法および系の信頼度の下側信頼限界を小さ目に評価する方法などを述べている。

まず試験はK段階行なわれ，各段階では同種の機器が何台か試験され，第段階の結果は，inherent failure (現在の技術では除去できない故障) をおこしたもの a_i 台，assignable cause failure (原因を除去できる故障)をおこしたもの bi 台，正しく動作したもの ci 台，のように3つに分類されて記録されるものとする。またこのとき，任意の1台の機器が assignable cause failure をおこす確率を q_i とおき ($i=1, \cdots, K$), inherent failure をおこす確率はどの段階でもつねに q_0 とする。従って第i段階ではこの機器の信頼度は $r_i=1-q_i-q_0$ である。さてk段階の試験結果から q_0 と q_i を推定するための尤度函数は

$$\prod_{i=1}^{K}\frac{(a_i+b_i+c_i)!}{a_i!\,b_i!\,c_i!}\,q_0^{a_i}\,q_i^{b_i}(1-q_0-q_i)^{c_i}$$

であるから，最尤推定量として

$$\hat{q}_0=\Sigma_{i=1}^{K}a_i/\Sigma_{i=1}^{K}(a_i+b_i+c_i)$$

$$\hat{q}_i=(1-\hat{q}_0)\,b_i/(b_i+c_i),\ i=1,\ \cdots,\ K$$

を得る。ここで特に q_i が単調減少：$q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_K$ という条件のもとで qi の最尤推定量を求めるとそれは

$$\bar{q}_i=(1-\hat{q}_0)\max_{s\geqq i}\min_{r\leqq i}\frac{b_r+\cdots+b_s}{b_r+c_r+\cdots+b_s+c_s}$$

で与えられることをのべている。また数値例について $\bar{q}_i$ の求め方を示している。

され，q_i が単調減少のとき，信頼度 r_i には単調増加：$r_1 \leqq \cdots \leqq r_K$ であるが，r_K はこの K 段階の試験と改良が終ったときの信頼度であり，いま $S=\Sigma_1^K c_i$, $n=\Sigma_1^K n_i$ とおくとき，r_K の 100 $(1-\alpha)$ %下側信頼限界の小さな目の評価 r^0，すなわち

$$P[r_K \geq r^0 | r_1 \leq \cdots \leq r_K] \geq 1-\alpha$$

となる r^0 は

$$\sum_{j=1}^{s-1}\binom{n}{j}r^j(1-r)^{n-j}\geq 1-\alpha$$

をみたすrの最大値として与えられること，特に $r_1=\cdots=r_K$ ならば，上の r^0 は r_K の 100 $(1-\alpha)$ %の下側信頼限界そのものであるという意味で上の r^0 はその仮定のもとで得られる best なものであることなどを述べている。

以上のようにこの論文の特徴は $q_1 \geq \cdots \geq q_K$ すなわち $r_1 \leq \cdots \leq r_K$ を仮定して，与えられたデータから $r_1, \cdots, r_K$ を推定する方法を述べた点にあるが実際問題としてこの仮定が妥当かどうかは問題である。もっとも著者はこのような reliability growth の単調性を検定する方法についても述でている。

(阿部俊一)

L. H. Koopmans "A Statistical Study of the Derailment Hazard for U.S. Class I Railways", *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 1(1965) 95—118

〔鉄道／信頼性／応用例〕

1952年から1955年までのアメリカの1級鉄道における事故データを解析し，機関車が11両から130両までの貨車をけん引して10mph以上の速度で走っている場合の貨車の脱線確率を求めている。ただし，この確率は機関車の走行1mile当りの数値としてあらわされ，また与えられた事故データでは脱線をおこしたときの貨車のけん引両数は5両ごとのクラスに分けて示されているので，脱線確率もこの各クラスごとに求められており，さらに漸近的な95%信頼区間も計算されている。

事故のデータは大ていいつでもそうであるが，この場合も事故をおこしたときの記録だけしか残されておらず，例えば，機関車が第iクラスの速度と第jクラスのけん引両数で走っていたとき，貨車脱線をおこした件数R_{ij}はわかっているが，脱線をおこさなかった場合も含めて同じ条件で走った機関車の延べ走行mile数M_{ij}は直接にはわからないという。しかし，脱線確率π_{ij}の推定にはM_{ij}を必要とする。

この論文の特徴の1つはこのようなデーターの不備にもかかわらずπ_{ij}の推定を断念せず，ほかのデータから間接的にM_{ij}を推定する方法を考えたことである。事故データとしてはほかに機関車が第iクラスの速度と第jクラスのけん引両数で走っていて他の車両や線路上の障害物と衝突をおこした件数N_{ij}が与えられていた。そこで著者はこのような衝突のおこる確率p_{ij}は速度にもけん引両数jにも無関係な値pをとるという仮説を立て，この仮説のもとにすべての機関車の延べ走行mile数Mに比べて全衝突件数Nが十分小さいときにはM_{ij}の最尤推定量$\hat{M}_{ij}$は近似的に

$$\hat{M}_{ij}=N_{ij}\cdot M/N$$

で与えられることを示し，これから脱線確率π_{ij}の推定値は

$$\hat{\pi}_{ij}=R_{ij}/\hat{M}_{ij}$$

であることを示している。またこの$\hat{\pi}_{ij}$は漸近的に平均π_{ij}，分散V_{ij}の正規分布に従うことを示し，π_{ij}の$100(1-\alpha)$%信頼区間を求めている。ここにV_{ij}はM, N, N_{ij}, R_{ij}などであらわされる量である。

この論文の第2の特徴は解析が統計的に綿密なことであり，上のp_{ij}がiにもjにも無関係でpに等しいという仮説を，この仮説のもとで推定した貨車走行mile数の合計と実際の既知の走行mile数を比較することによって，検定する方法を示している。このとき，貨車の両数を5両ごとのクラスに分けたデータを用いたためにおこる誤差が問題になっている。この誤差に関する納得のいく前提のもとで上の仮説は受容されること，けん引両数が多くなると脱線確率が大きくなることなどが実際のデータに基づく計算結果として示されている。

この論文は荷主の立場から貨車の脱線確率を求めることを1つの目的としたものであるが，ここに示されている結果や統計的な方法は鉄道の経営者にとっても大いに参考になるであろう。　(阿部俊一)

D. R. Trilling "Job Shop Simulation of Orders that Are Networks", *The Journal of Industrial Engineering*, **17**, 2 (1966), 59—71

〔生産／シミュレーション手法／理論的〕

従来のジョップ・ショップ・シミュレーションは，それぞれの仕事がいくつかの機械で順々に加工されて最終的には製品となるといった，加工経路が直線的な場合にほとんど限られていた。しかし，現実のジョップ・ショップでは，いくつかの部品が組立てられたり，あるいは組立品が再び分解されたりしながら加工が進められるネットワーク状の経路を仕事が持っている場合が多い。

この論文では，仕事がそのようなネットワーク状の加工経路を持っている場合，シミュレーションに都合が良いように部品の関係，作業の種類や順序を表わす技術，つまりネットワークの表現の技術が述べられている。また，そのようなネットワーク型のジョップ・ショップにおける2，3の差立規則の効果についてもふれている。

(1) ネットワークの表現

部品の表示にはKerpelmanの提案によるbinary codeが用いられている。つまり，それぞれの部品には，2^k($k=0, 1, 2, 3\cdots m$)が与えられる。ここで，mは1つの仕事で必要とされる部品の総数から1を引いたものである。これをip-numberと呼び，組立品は構成部品のip-numberの合計で示される。たとえば，11100のcodeを有する組立品は，10000, 1000, 100のcodeを有する部品，つまり，16, 8, 4の部品から構成されていることがそのcodeから示される。

作業には，組立作業(assembly operation)，分解作業(disassembly operation)，呼び出し作業(call out operation)と単一作業(single operation)があり，前の3つの作業はネットワークの

node を作る性質の作業であるため nodal operation と呼ばれる。ここで，呼び出し作業は他の仕事の最終製品を部分品としてあるいは何らかの目的で必要とするような場合，それらを呼び出すためのものである。ところで，プログラミング上，1つの作業に2つ以上の nodal function を持たすことは許されないので，偽の作業 (pesudo operation) を仮想して，1作業には1種の function を持たすようにする。

また，作業はそれぞれその作業で取り扱う部品や組立品の code を持っているが，組立品が分解された場合，構成部品がネットワークに現われないことが生じる。そのために，実際に加工が行なわれない部品の存在を示すために，その部品の code を持った pesudo operation が想定される。

部品をいくつか結合する場合，常に最小の ip-number を有する部品を基本にする。つまり，最小の ip-number を有する部品の加工が終了した時，それと結合される他の部品の加工が終了したかどうかチェックされる。

作業順序は各作業に与えられた作業番号によって示されるが，番号と作業順序との間につぎのような関係を持たせる。

(i) 同一の部品や組立品に対する作業がいくつかある場合，先行作業に小さい作業番号が与えられる。

(ii) 部品がいくつか組立てられる場合，組立品に対する作業の番号は組立以前の構成部品に対する作業の番号より大きくする。

(iii) 組立品が分解される場合，分解以前の組立品に対する作業の番号は，分解後の構成部品に対する作業の番号より小さくする。

このようにしてネットワークは完全に表現され，多数のネットワークがシミュレーションにおいて互いに矛盾することなく処理され，しかもこの表現法によって computer の core の相当な節約ができる。

(2) 差立規則の効果

ネットワーク型のジョップ・ショップ・シミュレーションにおいて，Earlist-scheduled-start-date Rule や Slack-time Rule は，部品や組立品の相手方の待ち合せ時間，またそのために生じる仕掛品在庫，および納期遅れの減少に役立つことが示された。また，c_i/t_i Rule (c_i は仕事 i の納期遅れ費用，t_i は加工時間) は，大きな c_i/t_i を持った仕事を優先させることによっ，総納期遅れ費用を減すことに役立つことが明らかにされた　(黒田　充)

R.M. Loynes "On the Waiting-time Distribution for Queues in Series", *Royal Statistical Society* (*B*), **27**, 3 (1965), 491—496.

〔待ち行列/タンデム型/理論的〕

$M/E_2/1 \to M/1$ という2段タンデム型待ち行列で，第1段および第2段窓口での待ち行列はともに無制限に許されるものとするとき，平衡状態における待ち時間の特性関数は有理型にならないということを証明している。

そしてさらに，W.L. Smith (1953) の示した，「到着分布が何であろうと，サービス分布が指数型であれば，待ち時間の分布関数は指数型である。」という，単一窓口に対する主張とは対照的に，「$E_2/M/1 \to M/1$ システムでは，待ち時間分布の特性関数は，有理型にならないであろう。」ということを示唆している。

(牧野都治)

B. Avi-Itzhak and M. Yadin "A Sequence of Two Servers with No Intermediate Queue" *Management Science*, **11**, 5 (1965), 553—564

〔待ち行列/タンデム型/理論的〕

$M/G/1 \to G/1$ 型を扱っている。

客は，第1段窓口の前では無限長の行列を作ることが許されるが，第2段窓口では行列を作ることができない。このようなシステムでの，平衡状態における待ち時間分布および列の長さの分布を求めている。

そして，おもしろいことには，第1段・第2段ともに指数サービスの場合，および第1段・第2段ともにサービス時間一定の場合には，かりにサービス窓口の順序を逆にしても，システム内での待ち時間の分布は不変であるということを示している。また，第1段・第2段ともにサービス時間一定の場合には，第2段窓口の前に行列を作ることを許したとしても，システム内の待ち時間分布は，やはり不変であって，行列を許すかどうかで異なる点は，単に第1段窓口の前の行列人数がちがってくるにすぎない，と述べている。

(牧野都治)

Charles Stone "On Characteristic Functions and Renewal Theory," *Trans. Amer. Nath. Soc.*, **120**, 2 (1965) 327—342

m を任意の正整数とし，F を分布関数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^m\, dF(x)<\infty,\ \mu=\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)>0$$

とし，$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF(x)\quad (k\leqq m)$

$$f(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, dF(x)$$

とおき，$F^{(n)}$ を F の n 重コンボルーションとする。この時 renewal theory の renewal function の剰余項について A.O. Gelfond の結果より優れた評価が得られる。

（i） F が lattice なる場合，lattice 定数を1とし $P_n(k)$ を $F^{(n)}$ の k における jump を表わすものとし，$P_k=P_1(k)$,

$$q_k=\begin{cases}\sum\limits_{j>k} p_j & (k\geqq 0)\\ \sum\limits_{j\leq k} p_j & (k<0)\end{cases},\quad r_k=\begin{cases}\sum\limits_{j>k} q_j & (k\geqq 0)\\ \sum\limits_{j\leq k} q_j & (k<0)\end{cases}$$

$$s_k=\begin{cases}\sum\limits_{j>k} r_j & (k\geqq 0)\\ \sum\limits_{j\leq k} r_j & (k<0)\end{cases}$$

とおく。さらに

$$u_k=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(k)\quad,\quad h_k=\sum_{j=-\infty}^{k} u_j$$

とおく。

定理1．F が lattice で m (≧1) 次の有限なモーメントを有し1次モーメント $\mu>0$ とするとき，u_k は有限でかつ

$$\lim_{k\to\infty}\left(u_k-\frac{1}{\mu}\right)=\lim_{k\to-\infty} u_k=0$$

とくに $m\geqq 2$ ならば

(1) $$\lim_{k\to\infty} k^m\left(u_k-\frac{1}{\mu}-\frac{r_k}{\mu^2}\right)$$

$$=\lim_{k\to-\infty} k^m\left(u_k-\frac{r_k}{\mu^2}\right)=0,$$

h_k は有限で

(2) $$\lim_{k-\infty} k^{m-1}\left(h_k-\frac{k}{\mu}-\frac{\mu_2+\mu}{2\mu^2}+\frac{s_k}{\mu^2}\right)$$

$$=\lim_{k\to-\infty} k^{m-1}\left(h_k-\frac{s_k}{\mu^2}\right)=0$$

（ii） F が nonlattice の場合，（i）と同様に

$$R(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty}(1-F(y))\,dy & (x\geqq 0)\\ \int_{-\infty}^{x} F(y)\,dy & (x<0)\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty} R(y)dy & (x\geqq 0)\\ \int_{-\infty}^{x} R(y)dy & (x<0)\end{cases}$$

$$U(x,h)=\sum_{n=}^{\infty}{}^{0}[F^{(n)}(x+h/2)-F^{(n)}(x-h/2)],\ (h>0)$$

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x)$$

とおく。とくに F が $\lim\limits_{|\theta|}\ \inf\limits_{\to\infty} |1-f(\theta)|>0$ ならば strongly nonlattice という。

定理2．F が nonlattice で m(≧1) 次の有限なモーメントを有し，第1次モーメント $\mu>0$ とする。そうすると $U(x,h)$ は有限で

$$\lim_{x\to\infty}\left[U(x,h)-\frac{h}{\mu}\right]=\lim_{x\to-\infty} U(x,h)=0,$$

$(h>0)$

とくに $m\geqq 2$ の場合は，h を固定して

(3) $$U(x,h)-\frac{hR(x)}{\mu^2}\leqq 0\ (R(x)+|x|^{-m}),$$

$(x\to-\infty)$

$H(x)$ は有限で

$$\lim_{x\to\infty}\left(H(x)-\frac{x}{\mu}-\frac{\mu_2}{2\mu^2}\right)=0$$

(4) $$H(x)-\frac{S(x)}{\mu^2}\leqq 0(S(x)+|x|^{1-m}),$$

$(x\to-\infty)$

定理1と類似な定理として次が得られる。

定理3．F が strongly nonlattice で m(≧2) 次の有限なモーメントを有し，第1次モーメント $\mu>0$ とすると

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{\log x}\left[U(x,h)-\frac{h}{\mu}-\frac{hR(x)}{\mu^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^m}{\log|x|}\left[U(x,h)-\frac{hR(x)}{\mu^2}\right]=0,$$

$(h>0)$

両辺の収束は有界なhに対して一様であり，

(6) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m-1}}{\log x}\left[H(x)-\frac{x}{\mu}-\frac{\mu_2}{2\mu^2}+\frac{S(x)}{\mu^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{m-1}}{\log|x|}\left[H(x)-\frac{S(x)}{\mu^2}\right]=0$$

(1), (2), (3), (4), (5), (6) は新しい結果である。この定理の証明には評価しようとする式を特性関数で表現しフーリエ変換の諸性質を適用する。この論

文のつづきとしてその後同著者によるものをあげておく。

On moment generating functions and renewal theory, Ann. Math. Stat., 36 (1965) 1298—1301.

On absolutely continuous components and renewal theory, Ann. Math. Stat., 37 (1966) 271—275.

（鈴木武次）

Howard E. Thompson "Sales Forecasting Errors and Inventory Fluctuations: Random Errors and Random Sales", *Management Science*, **12**, 5, 1966.

〔在庫/確率/理論的〕

販売予測の誤差が在庫変動や生産量にどの様に影響するかを論じている。これは在庫変動の標準偏差もしくは生産量の標準偏差の販売の標準偏差に対する比を計算する事によってなされる。これによって予測誤差に変動がある場合，ない場合（予測誤差がいつも同じという意味ではない。後に説明される）或いは販売に系列的に相関がある場合等の影響が調べられる。モデルの構造は次の様になっている。

$$I_t = I_{t-1} + P_t - S_t \qquad \cdots(1)$$

I_t：t 期末在庫量，P_t：t 期生産量，

S_t：t 期販売量

$$P_t = S_t^e + \delta\ (I_t^* - I_{t-1}) \qquad \cdots(2)$$

S_t^e：t 期期待販売量，I_t^*：t 期末希望在庫量

δ：修正係数

$$I_t^* = \alpha + \beta\ S_{t+1}^e \qquad \cdots(3)$$

$$S_t^e = S_{t-1} + \rho_{1t}(S_t - S_{t-1}) \qquad \cdots(4)$$

$$S_{t+1}^e = S_{t-1} + \rho_{2t}(S_{t+1} - S_{t-1}) \qquad \cdots(5)$$

ρ_{1t}，ρ_{2t}：予測誤差の性格づけをするパラメータ

(1)～(5)から次の差分方程式を得る。

$$I_t = (1-\delta)\ I_{t-1} + (1-\rho_{1t}+\delta\beta-\delta\beta\rho_{2t})\ S_{t-1}$$
$$+ (\rho_{1t}-1)\ S_t + \delta\beta\rho_{2t}\ S_{t+1} + \delta\alpha \qquad \cdots(6)$$

この方程式を使って P_t 又は $\triangle I_t = I_t - I_{t-1}$ に対する販売予測誤差の影響を調べる事が出来る。更に $\triangle I$, p に対してその amplification $Ar(\triangle I)$, $Ar(p)$ を次の様に定義している。

$$Ar(\triangle I) = (\triangle I^u - E(\triangle I)) / (S^u - E(S))$$

$$Ar(p) = (p^u - E(p)) / (S^u - E(S))$$

ただし

$$\triangle I^u = \mathrm{Max}(\triangle I', \triangle I''),$$

$$\int_{-\infty}^{\triangle I'} g(\triangle I)d\triangle I = \omega$$

$$\int_{-\triangle I''}^{\infty} g(\triangle I)d\triangle I = \omega$$

$$\int_0^{s^u} f(s)ds = \omega \quad \int_0^{p^u} h(p)dp = \omega$$

（f, g, h は S, $\triangle I$, p の確率密度）

しかし以下の解析に於てはそれぞれの標準偏差の比をとっている。又解析を２つの場合にわけている。

（Ⅰ）販売量が期毎に独立な正規分布をして居り更に error parameter が常数の場合（$\rho_{1t} = \overline{\rho_1}$, $\rho_{2t} = \overline{\rho_2}$）。

この場合は在庫変動（又は生産量）は正規分布になる。何故ならばこれらは正規分布をなす変量の線形結合をしているからである。これから $\triangle I$ 及び p の分散 $V(\triangle I)$ 及び $V(p)$ が各種パラメータの函数として求まり

$$Ar(\triangle I) = (V(\triangle I) / V(S))^{\frac{1}{2}}$$

$$Ar(p) = (V(p) / V(s))^{\frac{1}{2}}$$

が計算される。そして各種のパラメータの種々の値に対して $Ar(\triangle I)$ 及び $Ar(p)$ の値を計算した表をのせてこれから下の様ないくつかの結論を出している。

1. δ 及び β が小になるほど amplification は小になる。
2. 完全予測（$\overline{\rho_1} = \overline{\rho_2} = 1.0$）の場合も必らずしも最小の amplification になるとは限らない。β が大になるにつれて販売予測が下目の場合（$\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho_2} < 1$）の方が完全予測の場合より amplification は小になる。
3. 予測が上目の場合（$\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho_2} > 1.0$）及び予測方向が間違っている場合（$\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho_2} < 0$）の方が過少予測の場合より amplification は大きい。
4. パラメータ β はそれが大になるにつれて，平均在庫レベルをます効果をもつ。更に β が大になるにつれ在庫変動の amplification もます。

（Ⅱ）販売に相関があり更に error parameter が変動する場合。

この様な場合は，（Ⅰ）の様に解析的に求める事は不可能となってくるので compter simulation によって解析をおこなった。そうして error parameter が相関をもつ場合とそうでない場合及び販売が相関をもつ場合とそうでない場合の四つの組合せのうち三つについて（一つは（Ⅰ）の場合になる）（Ⅰ）と同様に各種パラメーターの値に対す表をのせて，いくつかの結論を導びき出している。

（山田敬吾）