＜総合報告＞

標本調査の理論概説

佐藤総夫*
小林竜一*

§ 0. **はじめに** 従来，標本調査，バルクマテリアルサンプリングなどで，個別に解説されていたサンプリングの理論の基本的な部分を，ある1つの数学モデルをもとにして統一して処理できることがわかった。この理論の発端については§7.を見られたい。また，§1.の数学モデルは比推定，回帰推定等には適用されない。

§ 1. **数学モデル** いま，データが次のような構造式をもつものとする。

(1.1) $x_{i_1 i_2\cdots i_n}=\mu+e_{i_1}+e_{i_1 i_2}+\cdots+e_{i_1 i_2\cdots i_n}$

ここで，μはパラメータ，各 $e_{i_1\cdots i_k}$ $(1\leqq k\leqq n)$ は誤差をあらわす確率変数で，次の各条件を満たすものとする。

(i) $\sum\limits_{i_k} e_{i_1\cdots i_k}=0$*)

(ii) $e_{i_1\cdots i_{k-1} i_k}$ と $e_{i_1\cdots i_{k-1} l}$ $(k\neq l)$ は相関係数 ρ_k をもつ。これ以外に特に断わりのないものはすべて互に独立とする。

(iii) $E(e_{i_1\cdots i_k})=0$, $V(e_{i_1\cdots i_k})=\sigma_k{}^2$*)

これを

(iii′) $e_{i_1\cdots i_k}\in N(0, \sigma_k{}^2)$ **)

で置きかえると，分散分析法でF検定が行える。

このモデルがそれぞれ次のような特別のタイプをとる場合を考えよう。

(A) $x_i=\mu+e_i$

仮定 (i) $\sum\limits_i e_i=0$

(ii) e_i と e_j $(i\neq j)$ の相関係数は ρ

(iii) $E(e_i)=0$, $V(e_i)=\sigma^2$

これは単純ランダムサンプリングに対応するモデルである。

(B) $x_{ij}=\mu+\alpha_i+e_{ij}$

---

* 立教大学 1966年6月2日受理 「経営科学」第9巻第4号

*) $\sum\limits_{i_k}$ は i_k について有限和をあらわす。

*) E は期待値，V は分散をあらわす記号。

**) $e_{i_1\cdots i_k}\in N(0, \sigma_k{}^2)$ とは $e_{i_1\cdots i_k}$ が平均 0，分散 $\sigma_k{}^2$ の正規分布に含まれることを意味する。

ただし，α_i はパラメータである。

仮定（i） $\sum_i N_i \alpha_i=0$, $\sum_j e_{ij}=0$

ただし，N_i は i に関係する定数。

（ii） e_{ij} と e_{ik} $(j \neq k)$ の相関係数は ρ

（iii） $E(e_{ij})=0$, $V(e_{ij})=\sigma^2$

これは，層別ランダムサンプリングに対応するモデルである。

（C） $x_{ij}=\mu+e_i+e_{ij}$

仮定（i） $\sum_i e_i=0$, $\sum_j e_{ij}=0$

（ii） e_i と e_j $(i \neq j)$, e_{ij} と e_{ij} $(j \neq k)$ はそれぞれ相関係数 ρ_1, ρ_2 をもつ

（iii） $E(e_i)=0$, $V(e_i)=\sigma_1^2$

$E(e_{ij})=0$, $V(e_{ij})=\sigma_2^2$

これは，２段サンプリングに対応するモデルである。

これより多段サンプリングに対応するモデルも容易に想像されるであろう。

さらに，各集落が同数のサンプリング単位を含むとき，これは集落サンプリングに対応するモデルとなる。また，この場合の解析法は系統的サンプリングにも適用される。

§2. **基礎理論** これから後で使われるいくつかの定理と証明の要点を述べておく。

lemma. $x_i \in N(\mu, \sigma^2)$, x_i と x_j $(i \neq j)$ の相関係数を ρ（一定）とする $(i, j=1, 2, \cdots, n)$。このとき，$x. \underline{\triangle} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $S \underline{\triangle} \sum_{i=1}^n (x_i-x.)^2$

$V \triangle \dfrac{S}{n-1}$ とおけば *)

（i） $x. \in N\left(\mu, \dfrac{1+(n-1)\rho}{n} \sigma^2\right)$

（ii） $V(x_i-x.)=\dfrac{n-1}{n}(1-\rho)\sigma^2$

さらに，$\rho<0$ と仮定すれば **)

（iii） $\dfrac{S}{(1-\rho)\sigma^2} \in x^2(n-1)$ ***)

（iv） $E(V)=(1-\rho)\sigma^2$

〔証明〕（iii） $x_i \perp\!\!\!\perp x$ ****) かつ $x \in N(0, -\rho\sigma^2)$ なる確率変数 x をえらび，$y_i \underline{\triangle} x_i+x$ と

---

*) $\underline{\triangle}$は定義式をあらわす記号。

**) この仮定は証明法を変えれば除くことができる。

***) $\chi^2(\phi)$ は自由度 ϕ のカイ二乗分布。

****) $\perp\!\!\!\perp$は確率変数の独立をあらわす記号。

おくと，$y_1 \perp\!\!\!\perp y_i\ (i \perp\!\!\!\perp j)$ となる。これは，y_i も正規分布に従い，$\mathrm{cov}(y_i,\ y_j)=0$ よりわかる。

したがって，$S \underline{\triangle} \sum_n (x_i-x.)^2=\sum_n (y_1-y.)^2$

$V(y_1)=(1-\rho)\sigma^2$

より　$S/\{(1-\rho)\sigma^2 \in x^2\}(n-1)$

corollary 1. $x_i \in N(\mu,\sigma^2)$，x_1 と $x_j\ (i \cdot j)$ の相関係数を ρ（一定，$\rho<0$）とする $(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$。ここでは，μ，σ^2，ρ は未知とする。このとき

$$S \underline{\triangle} \sum_{i=1}^{n}(x_1-x.)^2,\quad V \underline{\triangle} \frac{S}{n-1}$$

に対して $E(V)$ が求まれば

$$S/E(V) \in x^2\,(n-1)$$

corollary 2. m 組の確率変数

$$x_i^{(1)} \in N(\mu_1,\ \sigma^2) \qquad (i=1,\cdots,\ n_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(m)} \in N(\mu_m,\sigma^2) \qquad (i=1,\cdots\cdots,n_m)$$

があって，$x_i^{(k)}$ と $x_j^{(k)}$ $(i \cdot j)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ の相関係数を ρ（k に関係しない一定数），かつ

$x_i^{(k)} \perp\!\!\!\perp x_j^{(l)}$ $(k \neq l)$ とする。このとき

$$x.^{(k)} \underline{\triangle} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{nk} x_i^{(k)}\ ,\quad S^{(k)} \underline{\triangle} \sum_{i=1}^{nk}(\,x_i^{(k)}-x.^{(k)})^2$$

とおき，不偏分散 $V^{(k)} \underline{\triangle} \dfrac{S^{(k)}}{n_k-1}$ をつくると

（i） $E(V^{(k)})=(1-\rho)\sigma^2$

（ii） $\sum_k S^{(k)}/\{(1-\rho)\sigma^2\} \in X^2\,(\sum_{i=1}^{m} n_i-m)$

（iii） $V \underline{\triangle} \sum_k S^{(k)}/(\sum_{i=1}^{n} n_i-m)$ とおけば

$$\sum_k S^{(k)}/E(V) \in x^2\,(\sum_{i=1}^{m} n_i-m)$$

〔証明〕 lemma の（iii）と X^2 分布の再生性より明らか。

corollary 3. Corollay 1. において

$S \triangleq \alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - x.)^2$ （α は任意の正の実数）とおいても，結論は変らない。また，x_i のかわりに $x_i' = \alpha x_i$ としても同じ結論が得られる。

corollary 4. lemma において，x_i を $x_i - x.$ でおきかえても，lemma はそのまま成り立つ。

（注）x_i と x_j $(i \neq j)$ の相関係数を ρ，x_i の分散を σ^2 として，$x_i - x.$ と $x_j - x.$ の相関係数 $\tilde{\rho}$，$x_i - x.$ の分散 $\tilde{\sigma}^2$ を求めると

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{n-1}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}(1-\rho)\sigma^2$$

lemma の ρ，σ^2 のかわりにこの $\tilde{\rho}$，$\tilde{\sigma}^2$ を使えばよい。

§3. **分散分析法** ここでは§1. の数学モデルに対して§2. の lemma と corollaries を使って分散分析を行う。ただし，議論をわかりやすくするため，数学モデルは4段分割を使う。

(3.2) $x_{ijkl} = \mu + e_i + e_{ij} + e_{ijk} + e_{ijkl}$

ここで，μ はパラメータ，e_i，e_{ij}，e_{ijk}，e_{ijkl} は誤差をあらわす確率変数で，次の仮定を設ける。

(i) $e_i \in N(0, \sigma_1^2)$ $(i=1, 2, \cdots, n_1)$

$$\sum_{i=1}^{n_1} e_i = 0$$

e_i と e_j $(i \neq j)$ の相関係数を ρ_1 とする。

(ii) $e_{ij} \in N(0, \sigma_2^2)$ $(i=1, 2, \cdots, n_1;\ j=1, 2, \cdots, n_2)$

$$\sum_{j=1}^{n_2} e_{ij} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n_1)$$

e_{ij} と e_{ik} $(j \neq k)$ の相関係数を ρ_2 とする。

$e_{ij} \perp\!\!\!\perp e_{st}$ $(i \cdot s)$，$e_i \perp\!\!\!\perp e_{jk}$ （$e_i \perp\!\!\!\perp e_{ij}$ を含む）

(iii) $e_{ijk} \in N(0, \sigma_3^2)$ $\begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, n_1;\ j=1, 2, \cdots, n_2 \\ k=1, 2, \cdots, n_3 \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=1}^{n_3} e_{ijk} = 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n_2)$$

e_{ijk} と e_{ijt} $(k \neq t)$ の相関係数を ρ_3 とする。

$e_{ijk} \perp\!\!\!\perp e_{stu}$ （$i \neq s$ または $j \neq t$）

$e_{ij} \perp\!\!\!\perp e_{lmn}$，$e_i \perp\!\!\!\perp e_{jkl}$ （$e_{ij} \perp\!\!\!\perp e_{ijk}$，$e_i \perp\!\!\!\perp e_{ijk}$ を含む）

(iv) $e_{ijkl} \in N(0, \sigma^2)$ $\begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, n_1; j=1, 2, \cdots, n_2 \\ k=1, 2, \cdots, n_3; l=1, 2, \cdots, r \end{pmatrix}$

e_{ijkl} は互に独立。また e_{ijke} は e_i, e_{ij}, e_{ijk} とも互に独立。

このとき

$$\begin{cases} x_{ijk\cdot} \underline{\triangle} \dfrac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{ijkl} \\ x_{ij\cdot\cdot} \underline{\triangle} \dfrac{1}{m_3} \sum_{k=1}^{m3} x_{ijk\cdot} \\ x_{i\cdots} \underline{\triangle} \dfrac{1}{m_2} \sum_{j=1}^{m2} x_{ij\cdot\cdot} \\ x_{\cdots\cdot} \underline{\triangle} \dfrac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m1} x_{i\cdots} \end{cases}$$

とおけば，(3.2) より

$$\begin{cases} x_{ijk\cdot} = \mu + e_i + e_{ij} + e_{ijk} + e_{ijk\cdot} \\ x_{ij\cdot\cdot} = \mu + e_i + e_{ij} + e_{ij\cdot} + e_{ij\cdot\cdot} \\ x_{i\cdots} = \mu + e_i + e_{i\cdot} + e_{i\cdot\cdot} + e_{i\cdots} \\ x_{\cdots\cdot} = \mu + e_{\cdot} + e_{\cdot\cdot} + e_{\cdots} + e_{\cdots\cdot} \end{cases}$$

したがって

$$(3.3) \quad \begin{cases} x_{ijkl} - x_{ijk\cdot} = e_{ijkl} - e_{ijk\cdot} \\ x_{ijk\cdot} - x_{ij\cdot\cdot} = (e_{ijk} - e_{ij\cdot}) + (e_{ijk\cdot} - e_{ij\cdot\cdot}) \\ x_{ij\cdot\cdot} - x_{i\cdots} = (e_{ij} - e_{i\cdot}) + (e_{ij\cdot} - e_{i\cdot\cdot}) \\ \qquad\qquad + (e_{ij\cdot\cdot} - e_{i\cdots}) \\ x_{i\cdots} - x_{\cdots\cdot} = (e_i - e_{\cdot}) + (e_{i\cdot} - e_{\cdot\cdot}) \\ \qquad\qquad + (e_{i\cdot\cdot} - e_{\cdots}) + (e_{i\cdots} - e_{\cdots\cdot}) \end{cases}$$

これよりデータは

$$(3.4) \quad x_{ijkj} = x_{\cdots\cdot} + (x_{i\cdots} - x_{\cdots\cdot}) + (x_{ij\cdot\cdot} - x_{i\cdots}) + (x_{ijk\cdot} - x_{ij\cdot\cdot}) + (x_{ijkl} - x_{ijk\cdot})$$

と分解される。

まず，相関係数 ρ_1, ρ_2, ρ_3 は，仮定 $\sum_{i=1}^{n1} e_i = 0$, $\sum_{j=1}^{n2} e_{ij} = 0$, $\sum_{k=1}^{n3} e_{ijk} = 0$ より

$$\rho_1 = -\frac{1}{n_1 - 1}, \quad \rho_2 = -\frac{1}{n_2 - 1}, \quad \rho_3 = -\frac{1}{n_3 - 1}$$

となる。

ところで，(3.4) の右辺の確率変数の組

$\{x_{i\cdots} - x_{\cdots\cdot}\}$, $\{x_{ij\cdot\cdot} - x_{i\cdots}\}$, $\{x_{ijk\cdot} - x_{ij\cdot\cdot}\}$, $\{x_{ijkl} - x_{ijk}\}$

は異なる組の確率変数同志は互に共分散が0となる。そこで正規分布の場合にはお互いに独立であることがわかる。ここでは$x_{i\ldots}-x_{\ldots.}$ と $x_{ij..}-x_{i\ldots}$ の共分散が0であることだけを示しておく。その他はこの§の附表Iを参照して同様に考えればよい。$V\{(x_{i\ldots}-x_{\ldots.}),\ (x_{ij..}-x_{i\ldots})\}=0$ を示すには (3.3) から$V\{(e_{ij}-e_{i.}),(e_{i.}-e_{..},)\}=0V\{(e_{ij.}-e_{i..}),\ (e_{i..}-e_{\ldots},V\{(e_{ij..}-e_{i\ldots}),(e_{i\ldots}-e_{\ldots.})\}=0$ を示せばよい。これは$V\{(e_{ij}-e_{i}),\ (e_{i.}-e_{..}$ がわかれば*)，残りの独立関係も直ちにわかる。附表Iより

$e_{ij}-e_{i.}),(e_{..},),(e_{ij}-e_{i.}V\{),((e_{i.}-e_{..})+e_{..})\}=0$ならば$V\{(e_{ij}-e_{i.}),(e_{i}-e_{..})\}=0$

ところで，仮定（i），（ii），（iii）と (3.3) より

$$(3.5)\quad \begin{cases} E(x_{\ldots.})=\mu \\ E(x_{i\ldots}-x_{\ldots.})=0 \\ E(x_{ij..}-x_{i\ldots})=0 \\ E(x_{ijk.}-x_{ij..})=0 \\ E(x_{ijkl}-x_{ijk.})=0 \end{cases}$$

また，(3.3) と附表Iより

$$(3.6)\quad \begin{cases} V(x_{\ldots.})=\dfrac{n_1-m_1}{m_1(n_1-1)}\sigma_1^2+\dfrac{n_2-m_2}{m_1m_2(n_2-1)}\sigma_2^2+\dfrac{n_3-m_3}{m_1m_2m_3(n_3-1)}\sigma_3^2 \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{m_1m_2m_3r}\sigma^2 \\ V(x_{i\ldots}-x_{\ldots.})=\dfrac{m_1-1}{m_1}\left\{\dfrac{n_1}{n_1-1}\sigma_1^2+\dfrac{n_2-m_2}{m_2(n_2-1)}\sigma_2^2+\dfrac{n_3-m_3}{m_2m_3(n_3-1)}\sigma_3^2\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{1}{m_2m_3r}\sigma^2\right\} \\ V(x_{ij..}-x_{i\ldots})=\dfrac{m_2-1}{m_2}\left\{\dfrac{n_2}{n_2-1}\sigma_2^2+\dfrac{n_3-m_3}{m_3(n_3-1)}\sigma_3^2+\dfrac{1}{m_3r}\sigma^2\right\} \\ V(x_{ijk.}-x_{ij.})=\dfrac{m_3-1}{m_3}\left\{\dfrac{n_3}{n_3-1}\sigma_3^2+\sigma^2\right\} \end{cases}$$

さらに，$(x_{i\ldots}-x_{\ldots.})$ と $(x_{j\ldots}-x_{\ldots.})$ $(i\neq j)$ の相関係数

$$\tilde{\rho}_1=-\frac{1}{m_1-1}$$

$(x_{ij..}-x_{i\ldots})$ と $(x_{ik}-x_{i\ldots})$ $(j\neq k)$ の相関係数

$$\tilde{\rho}_2=-\frac{1}{m_2-1}$$

$(x_{ijk.}-x_{ij..})$ と $(x_{ijl.}-x_{ij..})$ $(k\neq l)$ の相関係数

---

*) 一般に，確率変数 x, y, z について，その共分散を計算すれば

$V(x,\ y)=0\ V(x,\ y+z)=0$ ならば $V(x,\ x)=0$

であることがわかる。

$\tilde{\rho}_3=-\dfrac{1}{m_3-1}$ となる。(附表 I 参照)

(3.4) から

$$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l x_{ijkl}^2=S+S_1+S_2+S_3+S_3$$

ただし

$$(3.7)\quad \begin{cases} S \underline{\triangle}\ m_1m_2m_3rx^2_{\cdots\cdot} \\ S_1 \underline{\triangle}\ m_2m_3r\sum_i (x_{i\cdots}-x_{\cdots\cdot})^2 \\ S_2 \underline{\triangle}\ m_3r\sum_i\sum_j (x_{ij\cdot\cdot}-x_{i\cdot\cdot})^2 \\ S_3 \underline{\triangle}\ r\sum_i\sum_j\sum_k (x_{ijk\cdot}-x_{ij\cdot\cdot})^2 \\ S_4 \triangle\ \sum_i\sum_j\sum_k\sum_l (x_{ijkl}-x_{ijk\cdot})^2 \end{cases}$$

このとき，各平方和の自由度 ϕ_{si} ($i=1, 2, 3, 4$) は

$$\begin{cases} \phi_s=1 \\ \phi_{s1}=m_1-1 \\ \phi_{s2}=m_1(m_2-1) \\ \phi_{s3}=m_1m_2(m_3-1) \\ \phi_{s4}=m_1m_2m_3(r-1) \end{cases}$$

となる。また (3.5) を考えれば，(3.6) より

$$\begin{cases} E(S)=m_1m_2m_3\,r\,\mu^2+\dfrac{(n_1-m_1)m_2m_3r}{n_1-1}\sigma_1^2+\dfrac{(n_2-m_2)m_3r}{n_2-1}\sigma_2^2 \\ \qquad +\dfrac{(n_3-m_3)r}{n_3-1}\sigma_3^2+\sigma^2 \\ E(S_1)=(m_1-1)\left\{\dfrac{n_1m_2m_3r}{n_1-1}\sigma_1^2+\dfrac{(n_2-m_2)m_3r}{n_2-1}\sigma_2^2+\dfrac{(n_3-m_3)r}{n_3-1}\sigma_3^2+\sigma^2\right\} \\ E(S_2)=m_1(m_2-1)\left\{\dfrac{n_2m_3r}{n_2-1}\sigma_2^2+\dfrac{(n_3-m_3)r}{n_3-1}\sigma_3^2+\sigma^2\right\} \\ E(S_3)=m_1m_2(m^3-1)\left\{\dfrac{n_3r}{n_3-1}\sigma_3^2+\sigma^2\right\} \\ E(S_4)=m_1m_2m_3(r-1)\,\sigma^2 \end{cases}$$

したがって不偏分散

$$(3.8)\quad \begin{cases} V_1 \underline{\triangle}\ \dfrac{S_1}{m_1-1} \\ V_2 \underline{\triangle}\ \dfrac{S_2}{m_1(m_2-1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_3 \triangleq \dfrac{S_3}{m_1 m_2 (m_3 - 1)} \\ V_4 \triangleq \dfrac{S_4}{m_1 m_2 m_3 (r-1)} \end{cases}$$

の期待値は

$$(3.9)\quad \begin{cases} E(V_1) = \dfrac{n_1 m_2 m_3 r}{n_1 - 1}\sigma_1{}^2 + \dfrac{(n_2 - m_2) m_3 r}{n_2 - 1}\sigma_2{}^2 + \dfrac{(n_3 - m_3) r}{n_3 - 1}\sigma_3{}^2 + \sigma^2 \\ E(V_2) = \dfrac{n_2 m_3 r}{n_2 - 1}\sigma_2{}^2 + \dfrac{(n_3 - m_3) r}{n_3 - 1}\sigma_3{}^2 + \sigma^2 \\ E(V_3) = \dfrac{n_3 r}{n_3 - 1}\sigma_3{}^2 + \sigma^2 \\ E(V_4) = \sigma^2 \end{cases}$$

となる。

以上の結果に，lemma の corollaries 1, 2, 3 を適用すれば，次のような分散分析表にまとめて，F検定を行うことができる。

まず，直ちに

$$(3.10)\quad \begin{cases} S_1/E(V_1) \in x^2(m_1 - 1) \\ S_2/E(V_2) \in x^2(m_1(m_2 - 1)) \\ S_3/E(V_3) \in x^2(m_1 m_2(m_3 - 1)) \end{cases}$$

であることがわかる。

また，正規分布の仮定の下では確率変数の組 $\{x_{i\cdots} - x_{\cdots\cdot}\}$，$\{x_{ij\cdot\cdot} - x_{i\cdots}\}$，$\{x_{ijk\cdot} - x_{ij\cdot\cdot}\}$，$\{x_{ijkl} - x_{ijk\cdot}\}$ は互に独立であったから，S_1，S_2，S_3，S_4 も互に独立である。したがって，x^2 分布からF分布が導かれる過程を考えればF検定を行うことができる。

この場合，F検定に2つの代表的な場合が考えられる。

（i） $n_1 > m_1$，$n_2 > m_2$，$n_3 > m_3$ の場合

（ii） $n_1 = m_1$，$n_2 = m_2$，$n_3 = m_3$ の場合

（i）の場合は帰無仮説として

$$E(V_3) = E(V_4),\ E(V_2) = E(V_3),\ E(V_1) = E(V_2)$$

をとり，方式（I）のような分散分析表が得られる。（ii）の場合は帰無仮説として

$$E(V_3) = E(V_4),\ E(V_2) = E(V_4),\ E(V_1) = E(V_4)$$

をとり，方式（II）のような分散分析表が得られる。（分散分析表はこの§の別表IIを参照）

次に，$\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 + \sigma^2$ の推定法について考えよう。

（i） $\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 + \sigma^2$ の点推定

これには不偏分散の一次結合

$$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4$$

が

$$E(\sum_{i=1}^{4} c_i V_i)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma^2$$

を満たすように数 c_i ($i=1, 2, 3, 4$) を決めて， $\sum_{i=1}^{4} c_iV_i$ を $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma^2$ の点推定量とすればよい。Satterthwaite の方法にしたがい連立方程式を解けば各は c_i 次のように求まる。

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{n_1-1}{n_1m_2m_3r} \quad (>0) \\ c_2=\dfrac{n_1n_2(m_2-1)+(n_2-m_2)}{n_1n_2m_2m_3r} \quad (>0) \\ c_3=\dfrac{n_1n_2n_3(m_3-1)+(n_3-m_3)}{n_1n_2n_3m_3r} \quad (>0) \\ c_4=\dfrac{n_1n_2n_3(r-1)+1}{n_1n_2n_3r} \quad (>0) \end{cases}$$

(ii) $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma^2$ の区間推定

信頼度 $(1-\alpha)$ $(0<\alpha<1)$ で $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma^2$ の区間推定を行うために，は Satterthwaite の方法で近似的に行う。これは，方式（I），（II）共に使うことができる。

まず，次式で自由度 ϕ を求める。

$$\frac{1}{\phi}=\frac{1}{(c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4)^2}\left\{\frac{c_1^2V_1^2}{m_1-1}+\frac{c_2^2V_2^2}{m_2(m_2-1)}+\frac{c_3^2V_3^2}{m_1m_2(m_3-1)}+\frac{c_4^2V_4^2}{m_1m_2m_3(r-1)}\right\}$$

したがって，求める信頼区間として

$$\left(\phi\frac{c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4}{X^2(\phi;\frac{\alpha}{2})},\quad \phi\frac{c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4}{X^2(\phi;\ 1-\frac{\alpha}{2})}\right)$$

を得る。

附 表 (I)

補助計算 その1

$$V(e.)=V\left(\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m1} e_i\right)=\frac{1+(m_1-1)\rho_1}{m_1}\sigma_1^2=\frac{n_1-m_1}{m_1(n_1-1)}\sigma_1^2$$

$$V(e_i.)=V\left(\frac{1}{m_2}\sum_{j=1}^{m2} e_{ij}\right)=\frac{1+(m_2-1)\rho_2}{m_2}\sigma_2^2=\frac{n_2-m_2}{m_2(n_2-1)}\sigma_2^2$$

$$V(e..)=V\left(\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m1} e_i.\right)=\frac{1}{m_1}V(e_i.)=\frac{n_2-m_2}{m_1m_2(n_2-1)}\sigma_2^2$$

$$V(e_{ij\cdot})=V\left(\frac{1}{m_3}\sum_{k=1}^{m_3}e_{ijk}\right)=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_3}\sigma_3{}^2=\frac{n_3-m_3}{m_3(n_3-1)}\sigma_3{}^2$$

$$V(e_{i\cdot\cdot})=V\left(\frac{1}{m_2}\sum_{j=1}^{m_2}e_{ij\cdot}\right)=\frac{n_3-m_3}{m_2m_3(n_3-1)}\sigma_3{}^2$$

$$V(e_{\cdots})=V\left(\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}e_{i\cdot\cdot}\right)=\frac{1}{m_1}V(e_{i\cdot\cdot})=\frac{n_3-m_3}{m_1m_2m_3(n_3-1)}\sigma_3{}^2$$

$$V(e_{ijk\cdot})=V\left(\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r}e_{ijkl}\right)=\frac{1}{r}\sigma^2$$

$$V(e_{ij\cdot\cdot})=V\left(\frac{1}{m_3}\sum_{k=1}^{m_3}e_{ijk\cdot}\right)=\frac{1}{m_3r}\sigma^2$$

$$V(e_{i\cdots})=V\left(\frac{1}{m_2}\sum_{j=1}^{m_2}e_{ij\cdot\cdot}\right)=\frac{1}{m_2m_3r}\sigma^2$$

$$V(e_{\cdots\cdot})=V\left(\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1}e_{i\cdots}\right)=\frac{1}{m_1m_2m_3r}\sigma^2$$

補助計算　その２

$$\mathrm{Cov}(e_{i\cdot},\ e_{ij})=\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{m_2}\sum_{k=1}^{m_2}e_{ik},\ e_{ij}\right)=\frac{1+(m_2-1)\rho_2}{m_2}\sigma_2{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{i\cdot},\ e_{i\cdot})=V(e_{i\cdot})=\frac{1+(m_2-1)\rho_2}{m_2}\sigma_2{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{\cdot\cdot},\ e_{ij})=\frac{1}{m_1}\mathrm{Cov}(e_{i\cdot},\ e_{ij})=\frac{1+(m_2-1)\rho_2}{m_1m_2}\sigma_2{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{\cdot\cdot},\ e_{i\cdot})=\frac{1}{m_1}V(e_{i\cdot})=\frac{1+(m_2-1)\rho_2}{m_1m_2}\sigma_2{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{i\cdot\cdot},\ e_{ij\cdot})=\frac{1}{m_2}V(e_{ij\cdot})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{i\cdot\cdot},\ e_{i\cdot\cdot})=V(e_{i\cdot\cdot})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{\cdots},\ e_{ij\cdot})=\frac{1}{m_1}\mathrm{Cov}(e_{i\cdot\cdot},\ e_{ij\cdot})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_1m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{\cdots},\ e_{i\cdot\cdot})=\frac{1}{m_1}V(e_{i\cdot\cdot})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_1m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Coy}(e_{i\cdots},\ e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_2}V(e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{i\cdots},\ e_{i\cdots})=V(e_{i\cdots})=\frac{1}{m_2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(e_{\cdots\cdot},\ e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_1}\mathrm{Cov}(e_{i\cdots},\ e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_1m_2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{\cdots\cdot};\ e_{i\cdots})=\frac{1}{m_1}V\,(e_{i\cdots})=\frac{1}{m_1m_2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{ij\cdot},\ e_{ijk})=\frac{1+(m_3-1)\sigma_3{}^2}{m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{ij\cdot},\ e_{ij\cdot})=V\,(e_{ij})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{i\cdot\cdot},\ e_{ijk})=\frac{1}{m_2}\mathrm{Cov}\,(e_{ij\cdot},\ e_{ijk})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{i\cdot\cdot},\ e_{ij\cdot})=\frac{1}{m_2}V\,(e_{ij\cdot})=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{ij\cdot\cdot},\ e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m_3}V\,(e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{ij\cdot\cdot},\ e_{ij\cdot\cdot})=V\,(e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{i\cdots},\ e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m_2}\mathrm{Cov}(e_{ij\cdot\cdot},e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m^2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Doy}\,(e_{i\cdots},\ e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_2}V\,(e_{ij\cdot\cdot})=\frac{1}{m_2m_3r}\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{\cdots},\ e_{ijk})=\frac{1}{m_1}\mathrm{Cov}\,(e_{i\cdot\cdot},\ e_{ij}k)=\frac{1+(m_3-1)\rho_3}{m_1m_2m_3}\sigma_3{}^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(e_{\cdots\cdot},\ e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m_1}\mathrm{Cov}\,(e_{i\cdots},\ e_{ijk\cdot})=\frac{1}{m_1m_2m_3\,r}\sigma^2$$

附表（II）　　分散分析表　その(I)　($n_1>m_1$ and $n_2>m_2$ and $n_3>m_3$)

要因	平方和	自由度	不偏分散	F_0	帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1
母平均	$m_1m_2m_3\,r\,x^2_{\cdots\cdot}$	1			
第1段誤差	$m_2m_3\,r\,\Sigma(x_{i\cdots}-x_{\cdots\cdot})^2$	m_1-1	V_1	$\frac{V_1}{V_2}$	$H_0:\frac{n}{n_1-1}\sigma_1{}^2=\frac{1}{n_2-1}$　$H_1:\frac{n_1}{n_1-1}\sigma_1{}^2>\frac{1}{n_2-1}\sigma_2{}^2$
第2段誤差	$m_3\,r\sum_{i,j}(x_{ij\cdot\cdot}-x_{i\cdots})^2$	$m_1(m_2-1)$	V_2	$\frac{V_2}{V_3}$	$H_0:\frac{n_2}{n_2-1}\sigma_2{}^2=\frac{1}{n_3-1}$　$H_1:\frac{n_2}{n_2-1}\sigma_2{}^2>\frac{1}{n_3-1}\sigma_3{}^2$
第3段誤差	$r\sum_{i,j,k}(x_{ijk\cdot}-x_{ij\cdot\cdot})^2$	$m_1m_2(m_3-1)$	V_3	$\frac{V_3}{V_4}$	$H_0:\sigma_3{}^2=0$　$H_1:\sigma_3{}^2>0$
第4段誤差	$\sum_{i,j,k,l}(x_{ijkl}-x_{ijk\cdot})^2$	$m_1m_2m_3(r-1)$	V_4		

分散分析表　その(II)　($n_1=m_1$ and $n_2=m_2$ and $n_3=m_3$)

要因	平方和	自由度	不偏分散	F_0	帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1
母平均	$n_1n_2n_3 r x^2_{....}$	1			
第1段誤差	$n_2n_3 r \sum_i (x_{i...}-x_{....})^2$	n_1-1	V_1	$\frac{V_1}{V_4}$	$H_0:\sigma_1^2=0$　　$H_1:\sigma_1^2>0$
第2段誤差	$n_3 r \sum_{i,j} (x_{ij..}-x_{i...})^2$	$n_1(n_2-1)$	V_2	$\frac{V_2}{V_4}$	$H_0:\sigma_2^2=0$　　$H_1:\sigma_2^2>0$
第3段誤差	$r \sum_{i,j,k} (x_{ijk.}-x_{ij..})^2$	$n_1n_2(n_3-1)$	V_3	$\frac{V_3}{V_4}$	$H_0;\sigma_3^2=0$　　$H_1:\sigma_3^2>0$
第4段誤差	$\sum_{i,j,k,l} (x_{ijkl}-x_{ijk.})^2$	$n_1n_2n_3(r-1)$	V_4		

§4. ランダムサンプリング

4.1. 単純ランダムサンプリング　母集団が N 個の元から構成されているとき，これより n 個 ($n<N$) のサンプルを等確率で撰ぶ方法である。ここでは，n 個のサンプルがすべて異なる場合だけを考えよう。このとき，データ x_i は次の構造式をもつ。

(4.1.1)　$x_i=\mu+e_i,\quad i=1, 2, \cdots, n$

ここで μ は母平均，e_i は誤差をあらわす確率変数で，次の性質をもつものとする。

(i)　$\sum_{i=1}^{N} e_i=0$

(ii)　e_i と e_j $(i\neq j)$ の相関係数は ρ

(iii)　$E(e_i)=0,\ V(e_i)=\frac{N-1}{N}S^2$

ただし，$S^2 \triangleq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$

(i)より　$\rho=-\frac{1}{N-1}$ を得る。

また，容易に

(4.1.2)　$E(x_i)=\mu$

(4.1.3)　$V(x_i)=\frac{N-n}{N}\ \frac{S^2}{n}$

(4.1.4)　$E(s^2)=S^2$

であることがわかる。ただし，$s^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum^{N}(x_i-x.)^2$

4.2. 層別ランダムサンプリング　サンプルによる推定の精度は，その大きさと母分散（母集

団内の変動さをあらわす測度）に関係してくるから，母集団の中を等質のもの同志をあつめ数個の部分集団にわける方法をとって，推定の精度をあげることができる。層別ランダムサンプリングはこのために行われる。

いま，母集団Πが次のように，各部分母集団 Π_i に分割されているものとする。

$$\Pi=\bigcup_{i=1}^{M}\Pi_i,\quad \Pi_i\cap\Pi_j=\phi^{*)}\qquad (i\neq j)$$

このとき，各 Π_i の内部はできるだけ等質に，異なる Π_i の間はできるだけ異質となるように分割しなければならない。こうしたとき，各 Π_i を層という。このすべての層から，それぞれいくつかのサンプルをランダムにとる手法を層別ランダムサンプリングという。

母集団と各層 Π_i はそれぞれ N 個，N_i 個の元から構成されているものとする。この層 Π_i から n_i 個のサンプルをランダムにとる。また，第 i 層において第 j 番目のサンプルの特性を x_{ij} であらわすとき，x_{ij} は次の構造式をもつ。

(4.2.1) $x_{ij}=\mu+\alpha_i+e_{ij},\qquad i=1,\ 2,\cdots,\ M$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=1,\ 2,\cdots,\ n_i$

ここで，μ は母平均，α_i はパラメータ，e_{ij} は誤差をあらわす確率変数で次の性質をもつものとする。

（i） $\sum_{j=1}^{Ni}e_{ij}=0,\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ M)$

（ii） e_{ij} と e_{ik} $(j\neq k)$ の相関係数は ρ_i

$e_{ij}\ \perp\!\!\!\perp\ e_{lk}$ $(i\neq l)$

（iii） $E(e_{ij})=0,\ V(e_{ij})=\dfrac{N_i-1}{N_i}S_i^2\ (i=1,\ 2,\cdots,M)$

（iv） $\sum_{i=1}^{M}N_i\alpha_i=0$

ただし，$S_i^2\triangleq\dfrac{1}{N_i-1}\sum_{j=1}^{Ni}(x_{ij}-\mu_i)$

$\mu_i\triangleq\dfrac{1}{N_i}\sum^{Ni}x_{ij}$

（i）より $\rho_i=-\dfrac{1}{N_i-1}$ $(i=1,\ 2,\cdots,\ M)$ を得る。

(4.2.2) $y\triangleq\sum_{i=1}^{M}\dfrac{N_ix_{i\cdot}}{N}$

ただし，$x_{i\cdot}\triangleq\dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{ni}x_{ij},\ N=\sum^{M}N_i$

---

*) ϕは空集合をあらわす記号。

とおけば，容易に

(4.2.3)　$E(y)=\mu$

(4.2.4)　$V(y)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i}$

であることがわかる。

次に，層別ランダムサンプリングで，各層 $\amalg_i$ において

(4.2.5)　$\frac{n_i}{N_i}=\frac{n}{N}=$一定 $(i=1,\ 2,\cdots,\ M)$

ただし，$n=\sum_{i=1}^{M} n_i$

となっているとき，比例サンプリングという。このとき，$x_{..}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$　とおけば

$x_{..}=y$　したがって

(4.2.6)　$E(x_{..})=\mu$

また，$n_i=\frac{nN_i}{N}$ だから (4.2.4) より

(4.2.7)　$V(x_{..})=(1-\frac{n}{N})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M}\frac{N_i}{N}S_i^2$

を得る。

4.3.　**集落サンプリング**　母集団$\amalg$を次のようにいくつかの層に分割する。

$$\amalg=\bigcup_{i=1}^{M}\amalg_i,\quad \amalg_i\cap\amalg_j=\phi\quad (i\neq j)$$

ただし，各層はサンプリングの最終単位をいくつか集めたもので，これらの層を集落という。このとき，各集落の内部はできるだけ異質的に，また，各集落の間はできるだけ等質となるように分ける点が層別ランダムサンプリングの場合と違う。いま，これらの集落のなかからいくつかの集落をランダムに撰び，撰んだ集落については全数調査を行う手法を集落サンプリングという。ここで，第 i 番目の集落に含まれる第 j 番目の元の特性 x_{ij} をであらわす。さらに実用上から $N_i=\overline{N}$(一定) $(i=1,\ 2,\cdots,\ M)$ の場合についてその結果を述べておく。いま，m個の集落をランダムにとったとすると，データ x_{ij} は次の構造式をもつ。

(4.3.1)　$x_{ij}=\mu+e_i+e_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \overline{N}$

ここで μ は母平均，e_i，e_{ij} は誤差をあらわす確率変数で次の性質をもつものとする。

(i)　$\sum_{i=1}^{M} e_i=0$；$\sum_{j=1}^{\overline{N}} e_{ij}=0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

(ii)　e_i と $e_j\,(i\neq j)$，e_{ij} と $e_{ik}\,(j\neq k)$ はそれぞれ相関係数 ρ_1，ρ_2 をもつ

$e_i\amalg e_{ij},\quad e_{ij}\amalg e_{lk}\ (i\neq l)$

(iii) $E(e_i)=0, \quad E(e_{ij})=0$

$$V(e_i)=\sigma_1^2, \quad V(e_{ij})=\sigma_2^2$$

(iii)より

(4.3.2) $E(x_{..})=\mu$

また，ランダムにとったm個の集落については全数調査を行うのだから，$x_{..}$ の分散は (3.6) の最初の式において $n_1=M$, $m_1=m$, $m_2=n_2$ とおいて第2項までとればよい。したがって

(4.3.3) $$V(x_{..})=\frac{M-m}{M-1}\frac{\sigma_1^2}{m}$$

ここで

(4.3.4) $$\sigma_1^2 \triangleq \sigma_b^2 \triangleq \frac{1}{M}\sum^{M}(\mu_i-\mu)^2$$

$$\text{ただし，}\ \mu_i \triangleq \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}x_{ij} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$$

とおけば，(4.3.3) は

(4.3.5) $$V(x_{..})=\frac{M-m}{M-1}\frac{\sigma_b^2}{m}$$

となる。

集落サンプリングにおける母平均の推定の精度は，集落の大きさ，集落内の分散により左右されるから，これをはかる測度として級内相関係数

(4.3.6) $$\rho \triangleq \frac{E\{(x_{ij}-\mu)(x_{ik}-\mu)\}}{E(x_{ij}-\mu)^2} \qquad (j \neq k)$$

が使われる。(4.3.1) と仮定(i)〜(iii)より

(4.3.7) $$\rho=\frac{\sigma_1^2+\rho_2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \quad -\frac{1}{\overline{N}-1} \leqq \rho \leqq 1$$

を得る。ここで，

$$\sigma^2 \triangle V(x_{ij})=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

とおくと (4.3.7) より

$$\sigma_1^2=\frac{1+(\overline{N}-1)\rho}{\overline{N}}\sigma^2$$

を得る。したがって (4.3.3) より

(4.3.8) $$V(x_{..})=\frac{M-m}{M-1}\frac{1+(\overline{N}-1)\rho}{\overline{N}}\frac{\sigma^2}{m}$$

を得る。

§5. **系統的サンプリング** 母集団が N 個の元を含み，これより n 個のサンプルを次のようにしてとりだす方法を，抽出間隔 k の系統的サンプリングという。ここでは，$N=nk$ の場合

について考える。まず，母集団の各元に1から N まで番号がつけられているものと考えよう。1から k までの乱数を1つとって抽出起点を定め，それから先は一定間隔 k で n 個のサンプルをとる。この n 個のサンプルをひとまとめにして，n 個の元からなる一つの集落がつくられるものと考えれば，いまの場合系統的サンプリングは，k 個の集落からランダムに1個の集落をとりだす集落サンプリングと考えることができる。したがって，母平均推定量の形は単純ランダムサンプリングの場合と同一で，その分散は (4.3.8) において，$m=1$，$\overline{N}=n$，$M=k$ とおけば

(5.1) $$V(x..)=\frac{1+(n-1)\rho}{n}\sigma^2$$

と求められる。

ただし，ρ は k 個の系統的サンプル内の段内相関係数で，$-\frac{1}{n-1}\leqq\rho\leqq 1$

§6. **2段サンプリング** まず第1段階として母集団をいくつかの層に分割する。これらの層を1次単位という。1次単位からいくつかの層をランダムに撰ぶ。次に，第2段階としてこれらの層からそれぞれいくつかのサンプルをランダムに撰ぶ。これらを2次単位という。この手法を段サンプリングという。この§では1次単位，2次単位ともにそれぞれ単位の個数がすべて等しい場合だけを考える。

いま，母集団が N 個の1次単位からなり，各1次単位はそれぞれ M 個の2次単位を含んでいるものとする。第1段階として，N 個の1次単位からランダムに n 個を撰び，第2段階としてこれら n 個の1次単位からそれぞれ m 個の2次単位をランダムに撰ぶものとする。このときデータ x_{ij} は次の構造式をもつ。

(6.1) $$x_{ij}=\mu+e_i+e_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

ここで，μ は母平均，e_i，e_{ij} は誤差をあらわす確率変数で，次の性質をもつものとする。

(i) $\sum_{i=1}^{N}e_i=0$；$\sum_{j=1}^{M}e_{ij}=0$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

(ii) e_i と e_j $(i\neq j)$，e_{ij} と e_{il} $(j\neq l)$ の相関係数はそれぞれ ρ_1，ρ_2 とする。その他特に断りのないものは互に独立とする。

(iii) $E(e_i)=0$,　$E(e_{ij})=0$

$$V(e_i)=\frac{N-1}{N}\sigma_b^2,\quad V(e_{ij})=\frac{M-1}{M}\sigma_\omega^2$$

ただし，$\sigma_b^2\triangleq\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mu_i-\mu)^2$

$$\sigma_\omega^2\triangleq\frac{1}{N(M-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(x_{ij}-\mu_j)^2$$

$$\mu_i \triangleq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

（i）より直ちに　$\rho_1=-\frac{1}{N-1}$，$\rho_2=-\frac{1}{M-1}$ を得る。

また (6.1) より，容易に

(6.2)　$E(x..)=\mu$

(6.3)　$V(x..)=\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{\sigma_b{}^2}{n}+\left(1-\frac{m}{M}\right)\frac{\sigma_\omega{}^2}{nm}$

を得る。

もし抜取比 $\frac{n}{N}$，$\frac{m}{M}$ が無視できるときは

$$V(x..)=\frac{\sigma_b{}^2}{n}+\frac{\sigma_\omega{}^2}{nm}$$

となる。

多段サンプリングについても，2段サンプリングから容易に推察されるであろう。

§7.　バルクマテリアサンプリング

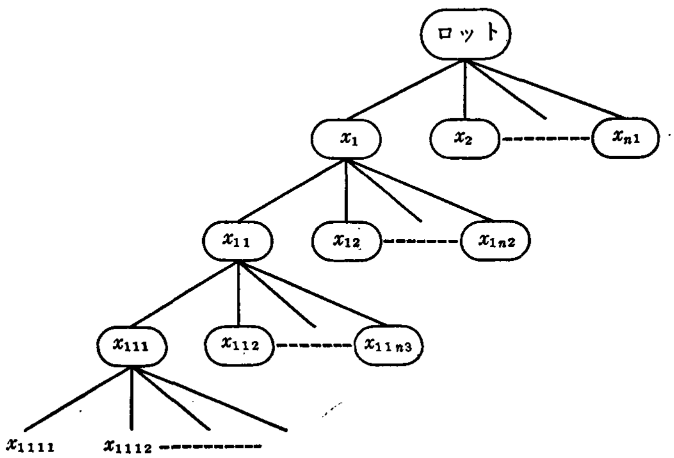
鉄礦石や石炭の山からその成分量やカロリーを測定する場合，ロットに含まれている測定したい成分量を μ とし，3段階のサンプリング（または縮分）の方法を次のように仮定する。

第1段階。ロットを n_1 個に分割する。そのなかから m_1 個だけを資料としてとる。

第2段階。m_1 個の資料の1つ1つをそれぞれ n_2 個に分割する。そのなかから m_2 個だけをとる。

第3段階。m_2 個の資料の1つ1つをそれぞれ n_3 個に分割する。そのなかから m_3 個だけをとる。

この m_3 個の資料からもとのロットに含まれる成分量 μ を推定する。略図で示すと次図のようになる。



このとき，資料を n_1 個（$i=1, 2, \cdots, n_1$）に分割するときはできるだけ等分割となるように工夫した装置を使うものとする。したがって x_i と x_j（$i \neq j,\ i,\ j=1, 2, \cdots, n_1$）を任意に入れかえてもかまわない。第2段以下においても同様に考えるものとする。

測定段階。全部の資料（$m_1m_2m_3$個）を r 回繰返し測定する。

いま，データを x_{ijkl} であらわす。i は第1段のサンプリング（または縮分）での第 i 番目のサンプルであることを示す。j は第2段，k は第3段のサンプリング（または縮分）でのそれぞれ第 j 番目，第 k 番目のサンプルであることを示し，l は測定の繰返しをあらわす。このときデータ x_{ijkl} は次の構造式をもつ。

$$(7.1)\quad x_{ijkl}=\frac{\mu}{n_1n_2n_3}+e_i+e_{ij}+e_{ijk}+e_{ijkl}$$

ここで，e_i，e_{ij}，e_{ijk}，e_{ijkl} はそれぞれ第1段，第2段，第3段におけるサンプリング（または縮分）の誤差，e_{ijkl} は測定誤差をあらわす確率変数で，§3.の（i），（ii），（iii）と全く同一の仮定を設ける。したがって，§3. の結果はそのままここで使うことができる。

あとがき　これまでに取上げた問題はサンプリングの全く基本的な部分だけであって，標本調査，バルクマテリアルサンプリングの何れにおいても，とりあげなければならない問題は未だ多く残されている。それらのなかの一部分はここで述べた数学モデルで解決できるのぞみがあり，他は又別の数学モデルをつくる必要がありそうである。また，ここで述べた考え方は，標本調査，サンプリングだけに限らずシミュレーションなどのＯＲ分野への応用も考えられる。

終りに本論文を精読されて種々貴重な示唆を与えられた東京大学竹内啓助教授に感謝の意を表わしたい。

〔参　考　文　献〕

〔1〕 中山伊知郎編「現代統計学大辞典」(1962) 東洋経済新報社

〔2〕 森口繁一「統計解析」岩波講座現代応用数学 B, 10-b

〔3〕 W.G. Cochran「Sampling Techniques」(1959) John Wiley

〔4〕 H. Scheffe「The Analysis of Variance」(1964) John Wiley

〔5〕 K. Ishikawa「Some Mobels in Sampling Experiments」(1965) Report on seminar on sampling of bulk materials, N.S.F.J.S.P.S. pp, 183～186

〔6〕 M, Kanamatsu「Structural Mobel of Rebuction Error for Bulk Materials」(1965) Ibib. pp. 261～275