

文 献 抄 録

Breiman, Leo : The Poisson Tendency in Traffic Distribution, *Ann. Math. Stat.*, **34** (1963), 308—311.

Thedeen, Torbjörn : A Note on The Poisson Tendency in Traffic Distribution, *Ann. Math. Stat.*, vol. **35** (1964), 1823—1824.

前者は1車線道路上を自由走行している車の任意の長さの空間内にある台数は初期の位置のいかに拘らず以下のべるような仮定のもとで時間が経過するにつれてポアソン分布に近づくことを証明し、後者は全く同じ仮定のもとで時間が経過するにつれて車の位置はポアソン過程になることを証明した。後者の示した定理は前者を含むものであるが、その証明の大半は前者と同様でありただ補助定理の証明が異なっているにすぎない。

時刻 $t=0$ での車の位置を負軸上で X_1, X_2, \dots とする。これらは stochastic point process の観測値である。この process について次の仮定 (a), (b), (c) を設ける。

(a)

$$P\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{区間}(0, -x) \text{ 内にある } X_k \text{ の個数} = \sigma}{x}\right] = 1$$

ただし $\sigma > 0$ は定数。

(b) 任意の区間 I (有限の長さの) に対して $\sum_k P\{X_k \in I\} \leq M$

ただし M は I の長さのみに関係する数。

X_k には速度 V_k が対応し、 $\{V_k\}$ は互に独立でかつ $\{X_k\}$ とも独立な確率変数列で共通分布

$$G(v) = \begin{cases} P\{V_k < v\} & (v > 0) \\ 0 & (v \leq 0) \end{cases}$$

に従う。

(c) $G(v) = \int_0^v g(u) du$, $g(u)$ は a.e. 連続で、

任意有限区間上で有界。

I_1, I_2, \dots, I_n を任意の互に重ならない空間上の区間とし、それぞれの長さ $|I_1|, |I_2|, \dots, |I_n|$ は有限とする。

$N_t(I_\nu)$ を時刻 t で区間 I_ν 内にある車の台数とすれば次の定理が成立する。

[定理] 仮定 (a), (b), (c) のもとで

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{N_t(I_\nu) = j_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\} = \prod_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^{j_\nu}}{j_\nu!} e^{-\lambda_\nu}$$

ここで $\lambda_\nu = \sigma |I_\nu|$

この定理の証明には、 $X_k(t)$ を時刻 t で k 番目の車の位置とし、 $X_k(t) \in I_\nu$ を k 番目の試行で ν 型の成功 S_ν が生ずる事象、 $X_k(t) \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ を失敗 F の生ずる事象とすれば、時刻 t で無限試行 $Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}, \dots$ を考え、試行は初期状態 X_1, X_2, \dots を固定するとき独立であるから結局

$$P\{Z_k^{(t)} = S_\nu\} = P_{k\nu}^{(t)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

$$P\{Z_k^{(t)} = F\} = 1 - \sum_{\nu=1}^n P_{k\nu}^{(t)}$$

についての或制限のもとで S_ν の起る回数 N_{it} が

$$(1) \lim P\{N_{it} = j_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\} = \prod_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^{j_\nu}}{j_\nu!} e^{-\lambda_\nu}$$

となればよい。従って補助定理として次の十分条件をあげている。

[補助定理]

$$(1) \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m P_{k\nu}^{(m)} = \lambda \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_k P_{k\nu}^{(m)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

ならば (1) が成立する。

これは次元ベクトル確率変数の母関数を用いて簡単に証明してある。 (鈴木武次)

P. I. Welding and D. J. Day : Simulation of Underground Railway Operation, *Railway Gazette International* June 4, 1965; 438~441

現在用いられている線路容量の式は、すべて正常な場合にしか使えない。車両・乗務員・運先掛・乗客のランダムな乱れを考えると、どうしても、シミュレーションに頼らざるを得ない。

間合いの要素

停車時分 ホームに到着して停車してから、再び発車するまでの時分。平均30秒(実績)。

プラットフォーム空き時分 ホームにあった列車が発発してから、つぎの列車が到着するまでの時

分. 平均60秒(実績).

到着ヘッド 第1の列車の停車時分+プラットフォーム空き間時分.

出発ヘッド プラットフォーム空き間時分+第2の列車の停車時分.

いずれにせよ, 停車時分+プラットフォーム空き間時分の和が3分をこえると乗客整理がむつかしくなる。

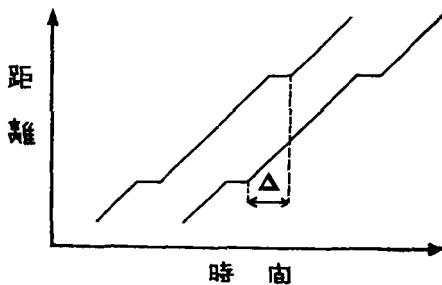
サービスの質の基本条件 列車の到着等間隔がどの位守られるか。始発駅の出発が等間隔でも, 駅間運売時分と停車時分の変動により, 途中から到着が不等間隔になる。

駅間運転時分

実態調査 1963年7月, Central Line の Marble Arch—Liverpool Street 間(東行)で5晩にわたり調査した。ダイヤ面では2分ヘッド, この区間9駅を16分で走行する。

先行列車による制約 図1のように (i-1) 列車が (j+1) 駅を出発する時刻から, i 列車が j 駅を出発する時刻を引いた時間差を Δ とする。

(図1)



この Δ とこの駅間の運行時分との関係をとると, 図2のようになり, Δ_{0j} までは t_j だが, Δ_{0j} を越すと越した時分だけ t_j が増えてゆく。そこで, この増分は, $\Delta_{ij} - \Delta_{0j}$ となる (Δ_{ij} は実際の遅延時分)。

実験計画法を用いて調査したが, 列車間の差や運転士間の差が大きききいていることがわかった。(この2要因の相乗作用より列車間の差の方が大きい)

運行時分モデル

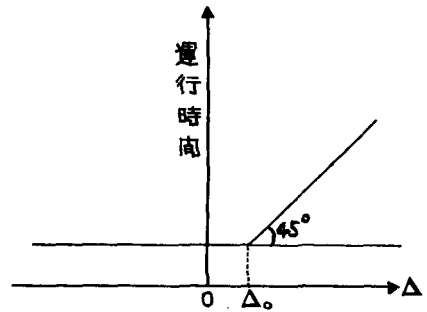
$$t_{ij} = T_j + (\Delta_{ij} - \Delta_{0j}) + d_i + e_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

ここで

T_j : 駅 j と (j+1) の間の平均自由運行時分(先行列車による制約がない場合の)

d_i : 運転士間のランダムな差の効果

(図2)



e_{ij} : 他のランダムな変化 (d_i と e_{ij} は平均値ゼロ, 標準偏差既知の正規分布)

停車時分モデル

ラッシュ時には停車時分は乗降により影響を受ける。また, 先行列車との間隔にも影響を受ける。調査の結果, 停車時分はプラットフォーム空き間時分に比例していることがわかった。実例から,

$$S_{ij} = a_j P_{ij} + b_j + g_i + r_{ij}$$

S_{ij} : i 列車の j 駅における停車時分

P_{ij} : j 駅におけるプラットフォーム空き間時分, (i-1) 列車出発後, i 列車が到着するまでの時分

a_j と b_j : j 駅における旅客の状態と駅的设计により決まる常数

g_i : 乗務員間のランダムな差の効果

r_{ij} : その他のランダムな差による効果

(g_i と r_{ij} とは, 平均値ゼロ, 標準偏差既知の正規分布である。なお, 先行列車によって影響される)

Central Line のシミュレーション

上記の関係式を用い, 列車の特性が等しく, 同一方向で停車駅もダイヤも同じ場合, ラッシュ時のシミュレーションができる。

ある時刻におけるある列車の位置は

1. 最初の駅をいつ出発したか?
2. 駅間の走行速度
3. その前の駅の停車時分
4. 先行列車の位置

で決められる。Ferranti Sirius に対してプログラムを組み, 30列車を1ブロックとして(各ブロックは1晩を表わす), Marble Arch—Bank 間東行でやってみた。始発駅の各列車出発時刻は, この駅の出発ヘッドの実際分布からサンプリングで求めた。

i 列車の位置を決めるためには, (i-1)列車の位

置……といった具合で、0列車の位置を決めなければならぬが、30列車のうちのはじめの5列車を除くと、得られた結果は任意に決めはじめの列車とは全く無関係になることがわかった。そこで各系列のはじめの5列車を除いた25列車について結果を求めた。10晩についてやってみたが、よく実情とあっている。

Victoria Line のシミュレーション

これから建設される Victoria Line (Victoria—Walthamstow 間12駅)のうち Victoria—Seven Sisters 間の9駅でやってみた。停車時は(2)式を用いたが、 a_j, b_j, c_i, r_{ij} は現行の線区から得られた数値を使った。

Victoria Line の特長と製表方式

この線には自動運転が行われることになっているのでこれも入れた。

製表は各列車の各駅における出発、到着時刻を表すものと、各駅における出発到着ヘッドの分布図との2様式とした。

シミュレーションの結果

第1の目的は、普通の状態で1時間に30本という列車計画で乱れがどれ位になるかを調べることであった。シミュレーションの結果から、基本的な2分ヘッドの場合、Oxford Circus 駅で北向では3分以上になると乗残しが生ずるが、こういうことは、たかだか4%しかないことがわかった(なお、列車の乱れは従来程度のものを予想している)。

第2の目的は、ラッシュ時の最小ヘッドを討ぶることであった。85秒、105秒、120秒と3種類とった。105秒以上では問題がないが、85秒ではムリで、平均のヘッドが14秒増加することが、わかった。

将来への応用

シミュレーションは、新設備完成前に業務の様子を予測するのに役立つ。しかし、もっと複雑な場合については、もっとプログラムを大中に拡張変更しなければならぬ。

と結んでいる。国鉄でも森口繁一教授にお願いして、通勤輸送のシミュレーションの研究を既に3年にわたりやっているので興味深かった。(矢部 真)

Hawkes, A.G.: Queueing for Gaps in Traffic, *Biometrika*, 52, 1 & 2, (1965), 79—85.

主道路に細い道路が交わっている交差点では、細い道路から来た車(又は歩行者)は主道路を通過し

ている車の間隔にある程度の開きがあるときのみ横断、割込み等を行うことができる。したがって、この種の横断に際して生ずる遅れ、または細い道路にできる行列等を議論するには、主要道路を走る車の間隔、つまり車頭間隔(時間を単位に測るときは車頭時間)の分布がまず問題になる。はじめに、この車頭間隔分布を取扱ったのは Garwood(1940)であり、その後 Tanner(1951), Mayne(1954), Weiss—Maradndin(1962), Oliver & Bisbee(1962), Gaver(1963)などによって扱われたことをまず簡単に紹介した後、この論文では Tanner(1962)による考え(主道路を通る車は、一般に“ダンゴ”を作っている)を継承していることを序論で明らかにしている。

ダンゴ(bunch という)の数は確率変数として与えられ、その母関数は $K(Z)$ であるとする。異なる bunch は互いに独立であるし、また他の変数にもすべて独立であるとする。bunch単位で考えると、それは平均到着率 λ_2 の Poisson 到着、交差点における「赤信号」(側線からの車が横断できない期間)の長さ R は分布関数 $F(t)$ にしたがう確率変数、「青信号」の長さは平均 $1/\lambda_1$ の指数分布にしたがうと仮定されている。側線からの車は「青信号」のときにのみ通過でき、かつそれに要する時間は0とする。しかし、その後 α という時間は、次の車は通過できない。

1台の車が交差点を通過した後、次の車が通過できるまでの時間(もしその機会をとらえるこのできる事があれば)は、待ち行列モデルにおけるサービス時間と考えられる。Gaver はこれを Completion time と称したが、この論文でもまずこの量 ϵ の分布の Laplace 変換を求め、それを用いて、待ち行列台数の母関数、待ち時間の Laplace 変換を、平衡分布が存在するとの仮定のもとで計算してある。これから、Pollagek の公式に似た平均待ち時間の公式がえられるが、これは仮定から当然予想される結果でもあろう。もし、1台づつ到着したときには平均待ち時間は

$$\bar{Q} = \frac{\lambda_1 E(R^2)}{2(1+\lambda_1 \bar{r})} + \frac{\lambda_2 E(\epsilon^2)}{2(1-\lambda_2 \bar{\epsilon})}$$

$\bar{r}, \bar{\epsilon}$ はそれぞれ $E(R), E(\epsilon)$ である。更に、到着が bunch で起る場合にはその平均待ち時間 \bar{W} は

$$\bar{W} = \bar{Q} + \frac{(\mu(2))}{\mu} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{2(1-\lambda_2 \mu \bar{\epsilon})} \right)$$

となる。ここで、 μ は bunch の平均個数、 $\mu^{(2)}$ はその2次の factorial moment である。

(森村英典)

Proschan, Frank and T. A. Bray : Optimum Redundancy under Multiple Constraints, *Opns. Res.*, **13**, 5, (1965).

さきに Kettelle は制約条件が1つだけの場合に系の信頼度を最大にする redundancy allocation の方法を示した (*Opns. Res.*, **10** (1962), 249—265)。この論文では、制約条件がもっと多い場合にまで Kettelle の方法を拡張している。すなわち、 k 段からなる系があって、この系は各段がいずれも正しく動作するときにかぎって動作するものとする。そして第 i 段は i 型の要素 n_i 個を並列に結んだものであり、また i 型の要素1個当りの r 種類の 'cost' c_{ij} ($i=1, \dots, k; j=1, \dots, r$) を考え、'cost' に関する r 個の線型の条件

$$\sum_{i=1}^k c_{ij} n_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, r)$$

のもとで系の信頼度

$$P(n) = \prod_{i=1}^k (1 - q_i^{n_i})$$

を最大にする n_1, \dots, n_k を決する1つの方法を示している。ここに q_i は i 型の要素の故障確率であり、もちろん各要素は独立にはたらくものと仮定している。

その方法はの Kettelle 論文の方針にそって redundancy allocation $n=(n_1, \dots, n_k)$ の dominating sequence S を求めていくものであるが、いまは cost の条件が r 個であるから domination の定義を次のようにする。まず $c_j(n) = \sum_{i=1}^k c_{ij} n_i$ とおくと、ある2つの redundancy allocation n^1 と n^2 に対して $P(n^1) \geq P(n^2)$ であり、かつすべての j ($j=1, \dots, r$) について $c_j(n^1) \geq c_j(n^2)$ がなりたつならば、 n^1 は n^2 を dominate するといひ、特にこれらの式のうち1つでも不等号がなりたつならば、 n^1 は n^2 を strictly に dominate するという。

この定義から、例えば第1段と第2段だけについての dominating sequence を求める方法は、第1段の cost $c_{1j} n_1$ ($j=1, \dots, r$) と reliability $(1 - q_1^{n_1})$ の $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$ における値を横にかき並べ、同様に第2段の cost $c_{2j} n_2$ ($i=1, \dots, r$) と reliability $(1 - q_2^{n_2})$ の $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$ に

おける値を縦にかき並べ、これから第1段で n_1 個の要素、第2段で n_2 個の要素を使ったときの cost $c_j(n_1, n_2) = c_{1j} n_1 + c_{2j} n_2$ ($j=1, \dots, r$) とその場合の unreliability $Q(n_1, n_2) = 1 - (1 - q_1^{n_1})(1 - q_2^{n_2})$ を n_1 と n_2 の各組合せについて計算し、こうして一枚の表をつくりあげる。この表で strictly dominated allocation (n_1, n_2) を消していくと残ったものが第1段と第2段の要素に関する dominating sequence である。この sequence を横にかき並べ、第3段の要素の cost と reliability を $n_3 = n_3^0, n_3^0 + 1, \dots$ について縦にかき並べ、これから第1段、第2段、第3段の要素に関する dominating sequence を求める手順は上と同様である。この手順を繰り返すことによって第1段から第 k 段までの dominating sequence が求められ、こうして得られた allocation はすべて strictly undominated であり、逆にすべての strictly undominated allocation はこの sequence に含まれることが証明されている。従ってこの sequence から与えられた cost c_1, \dots, c_r に対する optimum redundancy allocation が求められる。

この方法で、cost の条件の数は3以下、各段の要素の数は10以下で最大64段までの問題を IBM 70 90で計算する program がつくられており、その flow chart が示されているが、それに先立って各段の要素の数 n_i はある starting value n_i^0 以上で考えれば十分であり、また近似計算

$$Q(n_1, \dots, n_r) \cong Q(n_1, \dots, n_{r-1}) + q_r^{n_r}$$

を使うと、計算の精度をほとんど犠牲にすることなく、計算量を相当節約できること、さらにまた cost や reliability の比較にある tolerance limit を設け、その limit 以下の2つの数値を同じものとみなすと dominating sequence の数も少なくなり、扱いやすくなることが述べられ、実際に計算した経験的なデータも示されている。(阿部俊一)