文献抄録

D. P. Gaver, Jr.; A Probability Problem Arising in Reliability and Traffic Studies, Opns. Res., Vol. 12 (1964), 519—653

reliability や traffic の問題を取扱っている際に，ここで扱う確率の問題がでてくる。reliability でいえば，故障をすれば修理を受け，しかも，間歇的に用いる必要の生ずるシステムの動作状態を評価する場合に出てくるもので，ここで disappointment time' T と呼ばれる時間の分布を求めることである。このTは‘システムが使われているときに故障するか，または，動いていないときに需要が発生するか，そのどちらかが起るまでの時間’を意味する。もちろん，Tはそのシステムが稼動状態になった瞬間から測るものとする。

ここでは次の仮定をおく。(a)はじめはシステムが稼動可能状態にあるとし，これが A_1 つづく。(b)その後 B_2 の間は修理期間，(c)時点 A_1+B_1 でシステムは稼動可能状態に戻り A_2 だけその状態がつづく。このように $\{A_n\}$，$\{B_n\}$ という長さずつ，稼動可能状態と，修理状態とを繰返す。(d) $\{A_n\}$，$\{B_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ は互いに独立な，独立確率変数列であって，分布関数 $\alpha(x)=P(A_n\leq x)$，$\beta(x)=P(B_n\leq x)$ をもつ。ここで，$\alpha(+0)=\beta(0+)=0$ とおく。(e)このシステムを使いたいという要求が $(t, t+dt)$ の間に起る確率は $\lambda dt+o(dt)$ であって，そのシステムの状態には依存しない。(f)，この要求の続く期間も‘random’である。つまり，$(t, t+dt)$ の間にシステムを不要とする確率は $\mu dt+o(dt)$ であって，システムの状態に無関係である。この要求の‘発生中’の期間も‘休止中’の期間も $\{A_n\}$，$\{B_n\}$ とは独立である。

以上の仮定のもとで，Tの積率母関数は

$$E(e^{-ST})=$$

$$\frac{\{\mu/(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(s)+\lambda/(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(s+\lambda+\mu)\}\times\{\lambda/(\lambda+s)[1-\hat{\beta}(s+\mu)]\}+\lambda/(\lambda+\mu)\{\hat{\alpha}(s)-\hat{\alpha}(s+\lambda+\lambda+\lambda)\}}{1-\{\mu/(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(s)+\lambda(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(s+\lambda+\lambda)\}\hat{\beta}(\lambda+\mu)}$$

となり，更にこれから

$$E(T)=$$

$$\frac{E(A)+\{\mu/(\lambda+\mu)+\lambda/(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(\lambda+\mu)\}[1-\hat{\beta}(\lambda)]/\lambda\}}{1-\{\mu/(\lambda+\mu)+\lambda/(\lambda+\mu)\hat{\alpha}(\lambda-\mu)\}\hat{\beta}(\lambda)}$$

であることが得られる。ここで，$\hat{\alpha}(s)$，$\hat{\beta}(s)$ はそれぞれ $\hat{\alpha}(x)$，$\hat{\beta}(x)$ の Laplace-Stiltjes 変換であり，$\hat{\beta}(\lambda)$ はその $s=\lambda$ における値，$E(A)$ は $E(A_n)$ のことを意味する。

この結果から $\lambda\to 0$ のとき，近似的に

$$\frac{1}{F(T)}\sim\lambda E(B)/[E(A)+E(B)]+\lambda E(A)/[E(A)+E(B)]\left\{[1-\hat{\alpha}(\mu)]/\mu E(A)\right\}$$

が得られるが，この結果は renewal theory から簡単に導くことが出来る。この他，$\lambda E(T)$ について，$\lambda\to 0$ のときの極限を上，下から押さえる評価式を与え，またいくつかの特別な分布を仮定して $E(T)/E(A)$ の値の数値評価を例示している。

(森村英典)

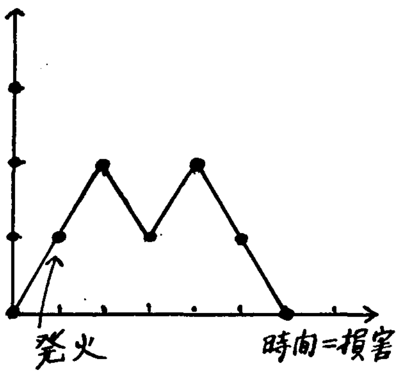
Benoit Mandelbrot; Random Walks, Fire Damage Amount and Other Paretian Risk Phenomena, Opns. Res., Vol. 12 (1964), 582—585.

火災保険の保険金設定のための一つの理論的アプローチであって，まず，火災損害額に対して経験的に得られていた Pareto の双曲線法則をランダム・ウォークのモデルから導いている。この法則は，ある家の火災において損害額が最小閾値 $m=\$20$ 以上，最大損害額（燃え得るものみんなが燃えたときの値M）以下ならば，その額が x である確率密度は $s(n)=\alpha x^{-\alpha-1}m^{\alpha}$ で与えられるというのである。この密度関数を M 以上∞まで積分すると $(M/m)^{-\alpha}$ となるが，この値は，最大損害額に相当するものがみんな燃えつくしてしまった（全焼）という確率に当たるとも言われているようである。

ストックホルム以外のスウェーデン各地における調査では α の値が0.45〜0.56の間をふらつくので，$\alpha={}^1/_2$ として理論を展開するのは尤もらしい。

‘時間’を損害総額とした1次元の simple なランダム・ウォークを考える。ランダム・ウォークの取り得る state は0, 1, 2, … であって，これを火災の強さと考える。火災の強さが0ということは，発火しないか，消火したこと（焼け落ちたことも含める）を意味し，強さ1ということが火災の発生を意味する。新しい‘もの’に火が移って燃え出

すことは確率 $1/2$ で起こり，火勢は1だけ増加するものとみなす。燃えるべき新しいものがなかったり，消火がうまく行って火勢が1だけおとろえることも，確率 $1/2$ で起こるとする。たとえば，左図で



は，発火後，次の物に燃え移り，その後少し消火の甲斐あって火勢がおとろえたが，再び次の物に燃え移り，その後，順調に消火作業が進んで鎮火したことになる。図では時間は6だけ進んで，state 0 に戻ったことになるが，燃えたものは都合3である。したがって横軸の‘時間’の長さは燃えた‘量’又は‘額’の2倍に当たっている。

このことから，0から0までの duration を考えれば火災の損害額になるが，実はこの分布は，よく知られたように

$$P_r(\text{損害額}=x)=2\binom{1/2}{x/2}(-1)^{x/2-1}$$

で与えられる。x がある程度大きくなると，この右辺は $x^{-3/2}$ に比例する。したがって，損害額 m 以上ならば，Pareto の双曲線法則が導かれたことになる。また，この式から期待損害額が $2\sqrt{Mm}-m$ であることも容易に得られる。

他方，Savitsch & Benktander が，1年間の1軒当り火災数は M の1次関数であることを見出しているので，もし，これが本当ならば，M の大きな場合火災保険料は $\sqrt{M}$ に比例させるべきだということになろう。

M の分布が知られていれば，全体の火災損害の分布がわかるということや，ランダム・ウォークの進み方を与える確率 P が $1/2$ に等しくないときなどについての若干の考察もつけ加えている。

(森村英典)

JOHN G. RAU : REDUNDANCY AND TRICHOTOMOUS SYSTEMS, J. Soc. INDUST. APPL. MATH., Vol. 12, No. 4, December, 1964

題名の示しているように multi-component system で redundancy も多くして reliability を高くしようとするのであるが，特に各 component が3つの可能な状態をとるものと仮定し，いわゆる “k out of n” system の reliability を求め，与えられた n に対して reliability を最大にする k を与えている。またさらに基本的な series-parallel および parallel-series system の場合にもふれている。すなわち，ここで component のとり得る3つの状態とは，type 1は故障，type 3は正常な動作，type 2は前2者の中間的な状態で，ダイオードのショートした場合が例としてあげられている。従って，これらの component からなる system の状態も同様に3つの type に分けられる。この場合，n 個の component からなる (order n の) (k, n) system を次の2つの性質をもつものとして定義する：(1) $n_2+n_3\geq k$ および $n_2<k$ のとき，かつこのときにかぎって system は type 3 の動作をする；(2) $n_2\geq k$ のとき，かつこのときにかぎって system は，type 2 の動作をする；ただし，ここに n_i は type i の状態の component の個数とする。さて，各 conponent の動作は独立で共通の分布をもち，状態 i をとる

●確率を P_i また (k, n) system が状態 i となる確率を P_i $(k\check{}\ n)$ とすると $(i=1, 2, 3)$,

$$P_1(k, n)=\sum_{j=n-k+1}^{n}\binom{n}{j}p_{2j}(1-p_1)^{n-j}$$

$$P_2(k, n)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p_2{}^j(1-p_2)^{n-j}$$

$$P_3(k, n)=\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{j}\binom{j}{i}p_1{}^{n-j}\,p_2{}^i\,p_3{}^{j-i}$$

となる。この (k, n) system の reliability は type 3 の動作をする確率 $P_3(k, n)$ とし，これを $R(k, n)$ とかくことにすると，$R(1, n)=(1-p_2)^n-p_1{}^n$ は parallel system の reliability，また $R(n, n)=(1-p_1)^n-p_2{}^n$ は series system の reliability であるが，$p_2=0$ ならば，従来よく知られている故障か動作かという二者択一の component からなる system の結果になり，その場合には n が大きいほど，$R(1, n)$ は大きくなり，逆に $R(n, n)$ は小さくなることは周知のとおりである。ところで $p_2>0$ の場合は，$R(1, n)$ や $R(n, n)$ ばかりでなく，一般に $R(k, n)$ は，k, p_1 および p_2 を固定するときは，$n=[n_0]+1$ で最大値をとり，

ここで$[n_0]$ は n_0 をこえない最大の整数であり

$$n_o = k\frac{\log p_1 p_2 - \log[(1-p_1)(1-p_2)]}{\log p_1 - \log(1-p_2)} - 1$$

となること；また n, p_1 および p_2 を固定するとき，$R(k, n)$ は $k=[k_o]+1$ で最大値をとり，

$$k_o = n\frac{\log(1-p_2) - \log p_1}{\log[(1-p_1)(1-p_2)] - \log p_1 p_2}$$

となることなどの結果を5つの定理と3つの系で述べている。著者はまた $(1, n)$ sub-system からなる order m の series system の reliability $R(A)$ および (n, n) sub-system からなる order m の parallel system の reliability $R(B)$ において，n, p_1 および p_2 を固定して m を大きくするとき，$R(A)$ および $R(B)$ が大きくなるための必要十分条件示し，ついでにそれらを最大にする m の値 m_A および m_B を与えた Barlow, Hunter and Proschan の結果にも言及している。

（阿部俊一）