信頼性を考慮した流れ網の構成法

中　村　義　作*

1. はしがき

多くの都市間を結ぶ通信網，鉄道網，道路網などの流れ網（flow network）では，網の路を通して運ばれる内容にこそ差はあれ，そこに要求される網の特性には共通の性質が見られる。それは，任意の2点間を結ぶ路が少なくとも1つ存在し，その間に流れ（flow）の可能なことである。これは網が連結であることを要求する。現実の流れ網では，もちろんこの条件が満足される。しかし，網内のどこかに障害が発生すると事情は一変する。障害の発生箇所によっては，幾つかの2点間を結ぶ路が皆無となる。

近年，各種の機器，部品にたいする信頼性の要求が高まると同時に，これらの流れ網にたいしても信頼性が強く要求されるようになった。これは各種の流れ網にたいする重要性が高まったことと，網が大規模になるにつれて障害の波及範囲が広まったことによる。この報告では，網内にある種の障害が発生してもすべての2点間にたいする流れが可能であるような条件を検討し，任意の連結網からこの条件を満たす経済的網構成の方法を示す。

2. 問題の提起と2, 3の考察

方向性のない網において，2点 x_s, x_t を結ぶ路が少なくとも1つ存在するとき，この間に流れが可能であると解釈する。点を都市，枝を都市間を結ぶ道路と解釈すれば，流れは都市間の輸送などに当る。網に方向性のないことは，x_s から x_t への路が x_t から x_s への路でもあることを示す。図 2—1 で x_1, x_2 を結ぶ路として，枝の系列 (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_2) を考える。網から枝 (x_3, x_4) を取去るとこの路はなくなる

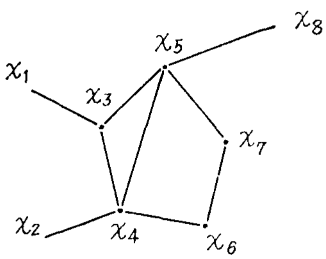


図 2－1

日本電信電話公社　電気通信研究所　昭和39年11月5日第16回研究発表会（39年11月5日甲南大学）で発表
昭和40年4月20日受理　「経営科学」第9巻1号

が，x_1，x_2 間の流れは可能である。例えば，枝の系列 (x_1, x_3)，(x_3, x_5)，(x_5, x_4)，(x_4, x_2) が所要の路を構成するからである。しかし枝 (x_1, x_3) を取去ると，もはやこの間の流れは不可能になる。同じ考察を x_3，x_6 間の流れについて行なうと，今度はどの１つの枝を取去っても流れが可能である。このように特定の１つの枝を取去ると流れが不可能になる点の対と，どの１つの枝を取去っても流れが可能な点の対とが一般には網内に存在する。前者を保証されない点の対，後者を保証された点の対と呼ぶ。そして，すべての点の対が保証された網を保証網と名付ける。

網から枝を取去るという操作は，何らかの原因で枝が障害を起し，その機能が果されなくなったことに対応する。また，１つの枝だけを取去ることは，２つ以上の枝が同時に障害を起さないとの解釈である。枝の罹障率が小さければ，この解釈は近似的に成立する。ある種の通信，鉄道などの流れ網では，枝の障害で幾つかの２点間にたいする流れが不可能になると，大きな打撃をこうむる。軍用が特にそうである。このため，経済的保証網の構成が重要となる。

さて，問題の提起に移ろう。連結網〔X, A〕を任意に与える。ここに X は点の集合，A は枝の集合を表わす。X 内に任意の２点 x_i，x_j をとるとき，費用 c_{ij} を投じてこの間の枝 (x_i, x_j) を網に追加できる。枝 (x_i, x_j) がすでに A に含まれていれば枝の並設となり，含まれていなければ新設となる。いま，追加する枝の集合 B を適当にとって〔X, A〕から保証網〔X, $A\cup B$〕を導びく。このとき，追加に要する費用

$$c(B)=\sum_{(x_i, x_j)\in B} c_{ij} \tag{2.1}$$

を最小にするような B を求めるのがここの問題である。これは与えられた連結網から最小費用の保証網を導びくことである。２つの問題が含まれる。第１は与えられた連結網〔X, A〕が保証網かどうかを判定する問題であり，第２は保証網でないと判定されたとき最小費用の保証網を導びく問題である。この節では第１の問題にたいする解を与える。

視察から知られるように，網が保証網であるための条件はつぎの形で与えられる。

〔条件Ⅰ〕：連結網が保証網であるための必要十分条件は，網内に少なくとも１つのループが存在し，すべての枝がいずれのかのループに属することである。

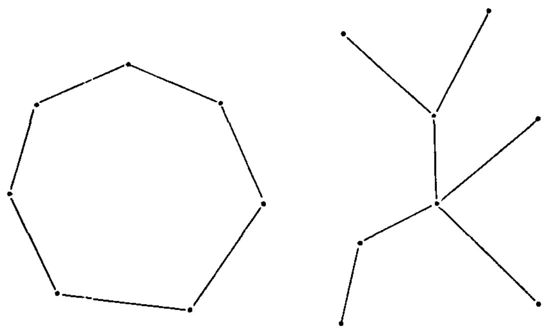
〔証明〕：まず必要条件を証明する。いずれのループにも属さない枝があるとし，その１つを (x_i, x_j) と記す。ループの定義から x_i，x_j を結ぶ路は枝 (x_i, x_j) に限られる。よって枝 (x_i, x_j) を取去れば，この流れが不可能になる。すなわち，連結網〔X, A〕が保証網であるためには，A のすべての枝がいずれのかループに属さねばならない。つぎに十分条件を証明する。A のすべての枝がいずれかのループに属すれば，どの１つの枝を取去っても残りの網は連網結である。これは〔X, A〕が保証網であることを示す。（終）

もっとも単純な保証網は，網内にただ１つのループが存在し，すべての枝がそれに属する場合である。これは，網自身がループであることを示す。逆に，もっとも単純な非保証網は網内に１

つもループのない場合である。これは木である。

網が保証網かどうかの判定は，別の方法でもなされる。それは Maximum flow-minimum cut theorem[1] を用いる方法で，つぎのように述べられる。

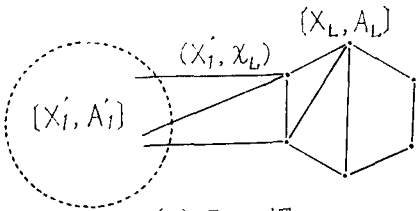
〔**条件II**〕：網が保証網であるための必要十分条件は，どの２点にたいする最小カットの枝の数も２以上（２を含む）となることである。



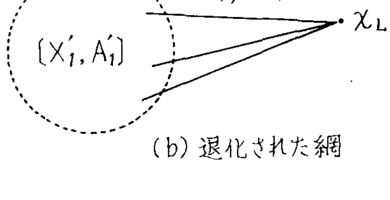
(a) ループ　(b) 木

図 2－2

この条件は Maximum flow-minimum cut theorem の特殊な場合に当るので，証明は不要である。２つの条件は同値であるが，今後の考察には共に有効である。うえのいずれかの条件を用いれば，連結網〔X, A〕が保証網かどうか判定される。しかし，これを忠実に実行するのは非能率である。というのは，他に能率的方法が存在し，これを用いれば保証網でないと判定されたとき，判定の手順がそのまま最適保証網の構成手順につながるからである。このため，ループの退化を説明しよう。



(a) 元の網



(b) 退化された網

図 2－3

いま，連結網〔X, A〕にループが含まれているとし，その１つを L で表わす。ループ L に属する点の集合を X_L とし，X を X_L と残りの集合 X'_1 に分割する。そして，X'_1 内の点を結ぶ枝の集合を A'_1，X_L 内の点を結ぶ枝の集合を A_L で表わす。一般に A_L はループを構成する以外の枝も含む。すると，A は A'_1，A_L および X'_1 と X_L のカット（X'_1, X_L）* に分割される。ここで部分網として〔X'_1, A'_1〕，〔X_L, B_L〕を考えると，与えられた連結網〔X, A〕は図 2―3（a）のように表わされる。いまループ L に着目し，別の連結網〔X_1, A_1〕をつぎのように作

* (X'_1, X_L) は X_1' と X_L 間を結ぶ枝の集合を表わす。

る。X_1 は，X'_1 と X に属さない新らしい点 x_L の和 $X_1 \cup x_L$ で定義される。A_1 は，X'_1 内の点を結ぶ枝の集合 A'_1 と，X'_1 の点と x_L を結ぶ枝の集合 A''_1 の和 $A'_1 \cup A''_1$ で定義される。ここに，A''_1 はカット (X'_1, X_L) に対応するもので，X'_1 から X_L にいたる枝が X'_1 から x_L にいたる枝に保存される。このようにして作られた連結網〔X_1, A_1〕は，〔X, A〕のループ L を退化した網と呼ばれる。元の網と退化した網の関係は図2—3 に示される。ループ L の退化を直観的に解釈すれば，他の個所を変えることなく部分網〔X_L, A_L〕を1点に収縮し，X'_1 の点から X_L の点にいたるすべての枝を x_L に結集したことに当る。網の退化と保証網の関係はつぎの定理で与えられる。

〔**定理1**〕: 任意の網〔X, A〕が保証網であるための必要十分条件は，〔X, A〕のループを退化した網が保証網であることである。

〔**証明**〕:〔X, A〕に属する1つのループを L, L を退化した網を〔X_1, A_1〕とする。この他，既出の概念〔X_L, A_L〕, x_L などは踏襲する。まず，〔X, A〕が保証網なら〔X_1, A_1〕も保証網となることを示す。〔条件II〕により，X_1 のどの2点にたいする最小カットの枝の数も2以上であればよい。X_1 の任意の2点を x_i, x_j とし，これの最小カットを $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)_1$ とする。退化の定義により，これに対応して網〔X, A〕内にカット (X_i, X_j) が存在する。〔X, A〕は保証網であるから，(X_i, X_j) の枝の数は2以上である。

つぎに，〔X_1, A_1〕が保証網なら〔X, A〕も保証網となることを示す。X の任意の2点を x_i, x_j とし，これの最小カットを $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ で表わす。x_i, x_j が共に X_L に属せば，部分網〔X_L, A_L〕が保証網のため $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ の枝の数は明らかに2以上である。そこで，少なくとも1点が X_L に属さない場合を考える。このとき，$(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ が A_L の枝を含まなければ，〔X_1, A_1〕内でも対応したカット $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)_1$ が存在する。また A_L の枝を含めば，$(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ はその部分集合として〔X_L, A_L〕にたいする1つのカットを含む。いずれの場合も $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ の枝の数は2以上である。（終）

さて，網〔X, A〕が保証網かどうかの判定手順に移ろう。まず網〔X, A〕にループが含まれているかどうか調べる。点の数を n, 枝の数を m とすれば，

$$m=n-1$$

のときループは存在せず，

$$m>n-1$$

のときループは存在する(2)。ただし，この判定は視察でも容易になされる。ループが含まれなければ〔X, A〕は木であり，保証網でない。ループが含まれれば，これを退化して〔X_1, A_1〕を求める。〔X_1, A_1〕についてもループの存否を調べ，存在すればさらに退化して〔X_2, A_2〕を作る。このようにしてループの存在するかぎり退化の操作を続ければ，ついにはループを含まない網〔X_T, A_T〕がえられる。〔X, A〕は連結網であるから〔X_T, A_T〕は木である。このとき

〔X_T, A_T〕がただ1点よりなる自明な木であれば*,〔定理1〕から元の網〔X, A〕は保証網となる。自明な木でなければ保証網でない。

3. 等　価　な　木

前節でも触れたように,〔X, A〕が保証網と判定されれば最適保証網を構成する第2の問題は生じない。そこで〔X, A〕は保証網でないとして議論を進める。このことは,退化の操作で2点以上を含む木〔X_T, A_T〕がえられることを意味する。いま,〔X, A〕と〔X_T, A_T〕にある対応も考える。このため,X_T の点 x_i に退化された〔X, A〕の部分網を〔X_i, A_i〕で表わす。明らかに〔X_i, A_i〕は保証網である。x_i と〔X_i, A_i〕の対応を考えると

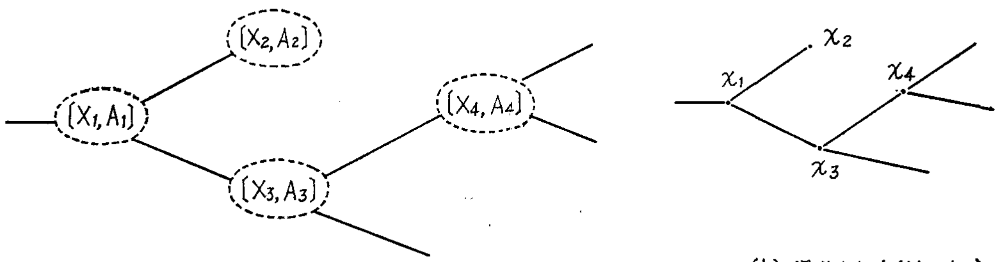
$$x_i \neq x_j \rightleftarrows [X_i,\ A_i] \cap [X_j,\ A_j] = 0$$

$$\cup x_i = X_T \rightleftarrows \cup X_i = X$$

である。つぎに,X_i と X_j のカット (X_i, X_j) を〔X, A〕の中で考えると,これは〔X_T, A_T〕内の枝 (x_i, x_j) としてそのまま保存される。すなわち

$$(x_i,\ x_j) \rightleftarrows (X_i,\ X_j)$$

である。このことから,〔X, A〕と〔X_T, A_T〕の対応が図3—1のようにつけられる。



(a) 元の網〔X, A〕　(b) 退化した木〔X_T, A_T〕

図 3−1 〔X, A〕と〔X_T, A_T〕の対応

さて,この対応を保証網の構成問題に拡張する。いま枝の集合 B_T と B に

$$(x_i,\ x_j) \in B_T \rightleftarrows (x_u,\ x_v) \in B,\ x_u \in X_i,\ x_u \in X_j \tag{3.1}$$

の対応を与え,〔X_T, A_T〕に B_T を追加して〔X_T, $A_T \cup B_T$〕をうることと,〔X, A〕に B を追加して〔X, $A \cup B$〕をうることを対応させる。つぎの定理がえられる。

〔定理2〕:〔X, $A \cup B$〕が保証網であるための必要十分条件は,〔X_T, $A_T \cup B_T$〕が保証網となることである。

〔証明〕:まず〔X, $A \cup B$〕が保証網なら〔X_T, $A_T \cup B_T$〕も保証網となることを示す。X_T の任意の2点を x_i, x_j とし,この最小カットを $(\overline{X}_i,\ \overline{X}_j)_T$ で表わす。これに対応して〔X, $A \cup B$〕の中にカット (X_i, X_j) が存在し,これに含まれる枝の数は2以上である。よって,

* ただ1点からなる網(もちろん枝を含まない)も,特別な場合として木と解釈した。

〔X_T, $A_T \cup B_T$〕は保証網である。つぎに〔X_T, $A_T \cup B_T$〕が保証網なら〔X, $A \cup B$〕も保証網となることを示す。X の任意の2点を x_i, x_j とし，この最小カットを $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ で表わす。退化の操作で x_i, x_j が X_T の異なる点になれば，$(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ は〔X_T, $A_T \cup B_T$〕の最小カット $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)_T$ に対応し，枝の数は2以上となる。同じ点になれば x_i, x_j はある部分網〔X_k, A_k〕に属し，しかも〔X_k, A_k〕は保証網となる。いずれの場合でも $(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ の枝の数は2以上で〔X, $A \cup B$〕は保証網となる。（終）

〔定理2〕によって保証網〔X_T, $A_T \cup B_T$〕の構成が保証網〔X, $A \cup B$〕の構成に一意に対応する。そして B の追加に要する費用 $c(B)$ は

$$c(B) = \sum_{(x_u, x_v)\in B} c_{uv}$$

と表わされる。最適保証網を導びくには，$c(B)$ を最小にしたい。これには，式 (3.1) の対応で費用最小の枝 (x_u, x_v) を選ぶ必要がある。そこで，木〔X_T, A_T〕に追加する枝 (x_i, x_j) に

$$c_{ij} = \min_{\substack{x_u \in X_i \\ x_v \in X_j}} c_{uv} \tag{3.2}$$

の費用を付加する。すると，最適保証網の構成問題が木〔X_T, A_T〕にたいしても与えられ，しかもその最適解が〔X, A〕の最適解にそのまま対応する。当然のことながら，問題を木について考察した方が容易である。追加する枝の長さが式 (3.2) で与えられた木〔X_T, A_T〕は，等価な木と呼ばれる。

ここで，枝の費用 c_{ij} について1つの注意を与えよう。c_{ij} は非負の値として与えられたが，一般性を失なうことなくこれを正に限定できる。これは以下のように示される。A_T のすべての枝について c_{ij} を式 (3.2) から計算する。これがすべて正であれば問題ない。いま0となる枝もあるとし，この集合を B_0 で表わす。B_0 を木に追加して網〔X_T, $A_T \cup B_0$〕を作り，これに含まれるループにたいして退化の操作を行なう。この結果，ただ1点よりなる自明な木がえられれば，〔X_T, $A_T \cup B_0$〕は最適保証網である。自明な木にならなければ，それを改めて等価な木とみなす。この木では，追加する枝の費用はすべて正である。次節以下では，c_{ij} を正に限定して議論を進める。

4. 最適保証網の構成

まず予備考察から始める。木〔X_T, A_T〕に任意の枝 (x_i, x_j) を追加する。x_i, x_j を結ぶ路 $P_A(x_i, x_j)$* は〔X_T, A_T〕の中で一意に定まるから[2]，これと追加する枝 (x_i, x_j) でループができる。いま $P_A(x_i, x_j)$ に属する枝の集合を，路と区別する意味で $R_A(x_i, x_j)$ と表わす。$R_A(x_i, x_j)$ の枝は (x_i, x_j) の追加で保証される。さて，B_T の追加で〔X_T, A_T

* $P_A(x_i, x_j)$ の添字 A は，路が〔X_T, A_T〕に属することを示す。

$\cup B_T$〕が保証網になったとしよう。〔条件 I〕は

$$\bigcup_{(x_i,\ x_j)\in B_T} R_A(x_i,\ x_j)=A_T \tag{4.1}$$

を要請する。したがって，式 (4.1) の下に

$$c(B_T)=\sum_{(x_i,\ x_j)\in B_T} c_{ij} \tag{4.2}$$

を最小にするのがここの問題となる。つぎの定理がえられる。

〔**定理 3**〕：B_T を追加する枝の最適集合とする。これに属する任意の2つの枝を $(x_i,\ x_j)$，$(x_k,\ x_l)$ とすれば

$$\begin{cases} R_A(x_i,\ x_j)\not\supset R_A(x_k,\ x_l) \\ R_A(x_k,\ x_l)\not\supset R_A(x_i,\ x_j) \end{cases}$$

である。

〔**証明**〕：2つの式は対称なので第1式を証明する。

$$R_A(x_i,\ x_j)\supset R_A(x_k,\ x_l)$$

を仮定し，矛盾を導びく。B_T から $(x_k,\ x_l)$ を除いたものを B'_T と記す。式 (4.1) から

$$\bigcup_{(x_i,\ x_j)\in B'_T} R_A(x_i,\ x_j)=A_T$$

である。$(x_k,\ x_l)$ の長さは正であるから，これは B_T が最適集合でないことを示す。（終）

この定理は，図4—1に示される枝 $(x_k,\ x_l)$ が B_T に属しえないことを保証する。ただし，点線は木〔X_T，A_T〕の一部を示す。つぎの系は，定理から直ちに導びかれる。

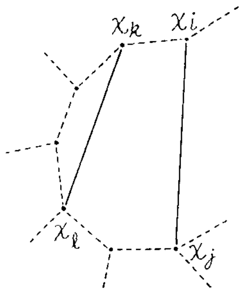


図 4 －1

〔系〕：共通集合をもたない B_T の部分集合を B_i，B_j とすると

$$\left.\begin{aligned} \bigcup_{(x_i,\ x_j)\in B_i} R_A(x_i,\ x_j)\not\supset \bigcup_{(x_k,\ x_l)\in B_j} R_A(x_k,\ x_l) \\ \bigcup_{(x_k,\ x_l)\in B_j} R_A(x_k,\ x_l)\not\supset \bigcup_{(x_i,\ x_j)\in B_i} R_A(x_i,\ x_j) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

である。

さて，ただ1点よりなる自明な木を除けば，木には少なくとも2つの端点が含まれる。以下の考察は端点数の少ない順になされる。

4.1. 2端点の木

この場合の考察がもっとも単純で，かつ他の基本となる。2端点を x_1，x_n とし，木〔X_T，A_T〕を図4—2(a)のように表わす。X_T の任意の2点 x_i，x_j において，x_i が x_j より x_1 側に位置することを「x_i は x_j より低順位」または「x_j は x_i より高順位」にあると呼び，$x_i < x_j$ で表わす。この関係は添字の大小関係と一致するので判りやすい。追加する枝の最適集合を

B_T とし，これの性質を考察する。式 (4.1) により (x_1, x_2) を保証する枝が B_T に属す。これがただ1つに限ることを示そう。この枝を (x_1, x_3') とし，他にも (x_1, x_2) を保証する枝 (x_1, x''_3) があったとする。すると，$x''_3<x'_3$ または $x'_3<x''_3$ に応じて

$$R_A(x_1,\ x'_3)\supset R_A(x_1,\ x''_3) \text{ または } R_A(x_1,\ x''_3)\supset R_A(x_1,\ x'_3)$$

が成立する。これは〔定理3〕に反する。

x'_3 が端点 x_n と一致すれば，B_T の枝は (x_1, x_n) だけである。これは

$$R_A(x_1,\ x_n)=A_T$$

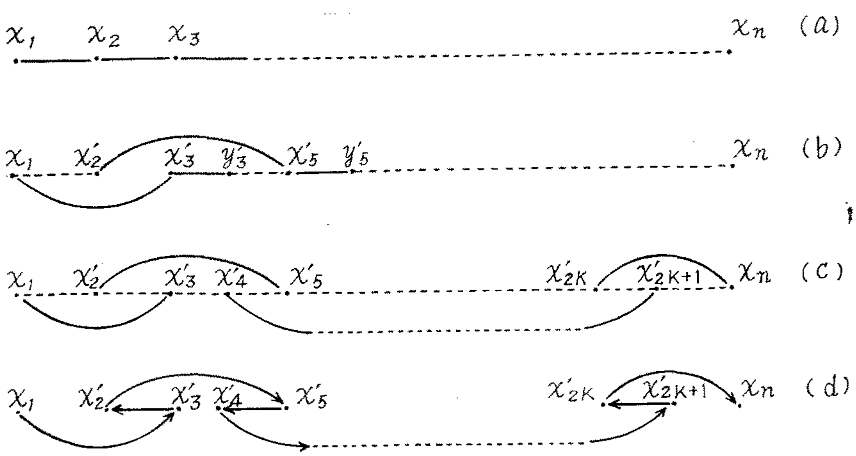


図 4－2

から明らかである。x'_3 が x_n と一致しなければ，x'_3 より1つ高順位の点 y'_3 が存在し〔図4—2(b)〕，(x'_3, y'_3) を保証する枝が B_T に属す。これもただ1つに限ることを示そう。この枝を (x'_2, x'_5) とし，他にも (x'_3, y'_3) を保証する枝 (x''_2, x''_5) があったとする。すると，$x''_5<x'_5$ または $x'_5<x''_5$ に応じて

$$R_A(x_1,\ x'_3)\cup R_A(x'_2,\ x'_5)=R_A(x_1,\ x'_5)\supset R_A(x''_2,\ x''_5)$$

または

$$R_A(x_1,\ x'_3)\cup R_A(x''_2,\ x''_5)=R_A(x_1,\ x''_5)\supset R_A(x'_2,\ x'_5)$$

がえられる。これは〔定理3〕の系に反する。

x'_5 が端点 x_n と一致すれば，

$$R_A(x_1,\ x'_3)\cup R_A(x'_2,\ x_n)=A_T$$

から B_T の枝は (x_1, x'_3) と (x'_2, x_n) である。一致しなければ，x'_5 より1つ高順位の点 y'_5 が存在し操作が続行される。一般に A_T の枝 (x'_{2k+1}, y'_{2k+1}) を保証する枝 (x'_{2k}, x'_{2k+3}) が B_T のにただ1つ存在し

$$x'_{2k-1} < x'_{2k} \leqq x'_{2k+1} < y'_{2k+1} \leqq x'_{2k+3}, \quad k \geqq 1 \tag{4.4}$$

を満足する。ただし，x_1 と x'_1 は同じ点とする。かくして，この操作を続行すれば，X_T が有限集合のため $x'_{2K+3}=x_n$ を満たす整数 K が見出される。すると，B_T は $(x_1,\ x'_3)$，$(x'_2,\ x'_5)$，…，$(x'_{2K},\ x_n)$ の各枝より構成される〔図4―2(c)〕。

いま，方向性のある枝の系列 $(x_1,\ x'_3)$，$(x'_3,\ x'_2)$，$(x'_2,\ x'_5)$，…，$(x'_{2K+1},\ x'_{2K})$，$(x'_{2K},\ x_n)$ で路 $\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$ を作る*。ただし，式 (4.4) から x'_{2k} と x'_{2k+1} が一致することもあり，このときは $(x'_{2k+1},\ x'_{2k})$ を除くものとする。このようにして作られた路 $\overrightarrow{P}_B(x_1, x_n)$ は B_T から一意に定まる。ここで，B_T の枝を低順位の点から高順位の点に向う方向性のある枝と考えてみよう。すると，B_T の枝はすべて $\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$ に属する。一方，B_T に属さない $\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$ の枝はすべて高順位の点から低順位の点に向っている。そこで，方向性のある完全網〔$X_T,\ B_C$〕を導入し，任意の枝 $(x_j,\ x_i)$ に

$$d_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & x_i < x_j \\ 0, & x_j < x_j \end{cases} \tag{4.5}$$

の費用を付加する。ここに完全網の定義から，任意の2点 x_i，x_j にたいして枝 $(x_i,\ x_j)$，$(x_j,\ x_i)$ が共に B_C に含まれる。$\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$ に属する枝の総費用を $c(P_B)$とすると，$c(P_B)=c(B_T)$ である。いままでの結果を総合すれば，最適保証網を導びく枝の集合 B_T から $\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$ が一意にえられ，B_T に属する枝の総費用 $c(B_T)$ が $\overrightarrow{P}_B(x_1, x_n)$に属する枝の総費用 $c(P_B)$ にそのまま保存された。

つぎに逆の操作として，x_1 から x_n にいたる任意の路 $\overrightarrow{P}_B\ (x_1,\ x_n)$ を完全網〔$X_T,\ B_C$〕から任意にとる。すると，これに対応して保証網〔$X_T,\ A_T \cup B'_T$〕を導びく枝の集合 B'_T が一意にえられ，$\overrightarrow{P}_{B'}(x_1,\ x_n)$ に属する枝の総費用 $c(P_{B'})$ が B'_T に属する枝の総費用 $c(B'_T)$ に等しくなることを示す。$P_{B'}(x_1,\ x_n)$ から正の枝だけを選んで集合 B'_T を作るとき，〔$X_T,\ A_T \cup B'_T$〕が保証網となることを示せばよい。A_T の任意の枝を $(x_i,\ x_{i+1})$ とし，これが B'_T のいずれかの枝で保証されることを示す。X_T を x_i より低順位の点の集合 X_i (x_i を含む) と，x_{i+1} より高順位の点の集合 X_{i+1} (x_{i+1} を含む) に分割する。$x_1 \in X_i$，$x_n \in X_{i+1}$ である。したがって x_1 から x_n にいたる路には，X_i の点から X_{i+1} の点にいたる枝が少なくとも1つ含まれる。この枝は $(x_i,\ x_{i+1})$ を保証し，かつ費用が正の枝であるから B'_T に属す。

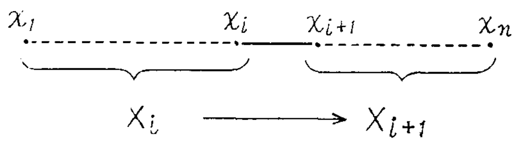


図4－3

かくして，方向性のある完全網〔$X_T,\ B_C$〕の各枝に式 (4.5) の費用を付加すれば，B_T から $\overrightarrow{P}_B(x_1,\ x_n)$が一意にえられ，逆に

* $\overrightarrow{P}_B\ (x_1,\ x_n)$ の添字 B は，路が B_T の枝を含んで構成されることを示す。また矢印は方向性を示す。

任意の $\overrightarrow{P}_{B'}(x_1, x_n)$ から B'_T が一意にえられた。しかも，この対応で両者に属する枝の総費用は一致する。このことは，式 (4.5) の d_{ij} を長さと解釈したとき $\overrightarrow{P}_B(x_1, x_n)$ が x_1 から x_n にいたる最短路であることを示す。最短路の求め方は知られているので[3]，2端点の木にたいする最適保証網の構成問題は完全に解かれた。

最後に注意することは，x_n から x_1 にいたる最短路 $\overrightarrow{P}_B(x_n, x_1)$ としても同じ解がえられることである。ただし，式 (4.5) と反対に高順位から低順位に向う枝の費用が正となる。最短路をいずれの方向にもとりうるという思想は，節 4.4 の考察に有効である。

4.2. 3端点の木

3端点の木にたいする最適保証網が構成されると，これを一般の木に拡張するのはそう困難でない。そこで，この場合を詳しく検討する。3端点を x_e, x_f, x_g とすれば，等価な木〔X_T, A_T〕は図4—4と表わされる。ここに，x_b は分岐点である。節 4.1 と同様に追加する枝の最適集合を B_T とし，これの性質を調べる。まず若干の定義を与える。〔X_T, A_T〕に属する3つの路 $P_A(x_e, x_b)$, $P_A(x_f, x_b)$, $P_A(x_g, x_b)$ をとり，それぞれの枝に属する集合を A_e, A_f, A_g で表わす。また，各路の経由する点の集合を X_e, X_f, X_g で表わす。ただし，分岐点 x_b はいずれにも属さないものとする。これを含めるときは $X_e \cup x_b$, $X_f \cup x_b$, $X_g \cup x_b$ とかいて区別する。もちろん

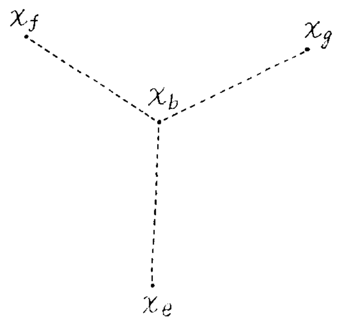


図 4－4

$$\left.\begin{aligned} A_T &= A_e \cup A_f \cup A_g \\ X_T &= X_e \cup X_f \cup X_g \cup x_b \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

である。以下の考察は，端点から分岐点にいたる各路に節 4.1 の方法を適用することで進められる。

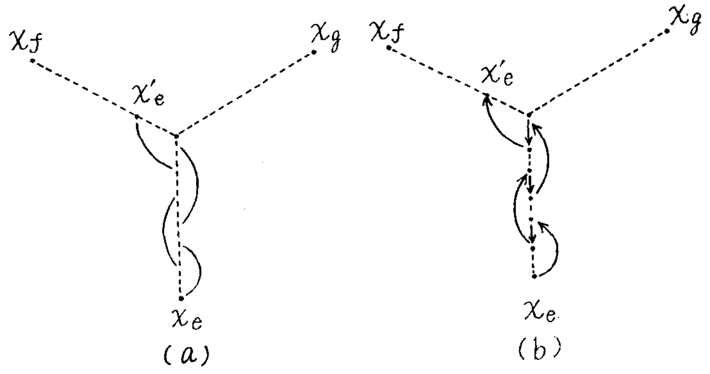


図 4－5

まず，$P_A(x_e,\ x_b)$ について考える。A_e を保証する枝を B_T から選び，集合 B_e を作る〔図4—5(a)〕。すると B_eに対応して，x_e から x'_e にいたる路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_e)$ が一意にえられる。ただし，x'_e は $X_f \cup X_g \cup x_b$ に属すれば任意の点でよい〔図4—5(b)〕。B_e に属する $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_e)$ の枝はすべて端点 x_e から x'_e の方向に向う。つぎに，$P_A(x_f,\ x_b)$ について考える。ここで一般性を失なうことなく，$x'_e \in X_f \cup x_b$ と仮定できる。必要なら，X_f と X_g の役割を交換すればよいからである。A_f において $P_A(x'_e,\ x_b)$ に属する枝はすでに B_e で保証されている。そこで，$P_A(x_f,\ x'_e)$ の枝を保証するものを B_T から選び，集合 B_f を作る。すると B_f に対応して，x_f から x'_f にいたる路 $\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_f)$ が一意にえられる。ただし，x'_f は $P_A(x_f,\ x'_e)$ の経由する点（x'_e を除く）でなければ任意の点でよい。B_f に属する $\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_f)$ の枝はすべて端点 x_f から x'_f の方向に向う。最後に，$P_A(x_g,\ x_b)$ について考える。x'_f が X_g に属するか否かで場合を分ける。まず X_g に属するときは，$P_A(x'_f,\ x_b)$ に属する A_g の枝はすでに B_f で保証されている。そこで $P_A(x_g,\ x'_f)$ の枝を保証する集合 B_g を B_T から選び，x_g から x'_g にいたる路を $\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_g)$ 作る〔図4—7(a)〕。x'_g は $P_A(x_g,\ x'_f)$ の経由する点（x'_f を除く）でなければ任意の点でよい。つぎに X_g に属さないときは，A_g の枝を保証する集合 B_g を B_T から選び，x_g から x'_g にいたる路 $\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_g)$ を作る〔図4—7(b)〕。x'_g は $X_e \cup X_f \cup x_b$ に属する任意の点でよい。x'_f が X_g に属すると否とにかかわらず，3つの路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_e)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_f)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_g)$ には共通の枝が含まれず，また終点 x'_e，x'_f，x'_g 以外には同じ点も経由しない。ただし，3つの終点は一致することもしないこともある。

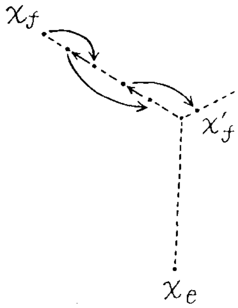
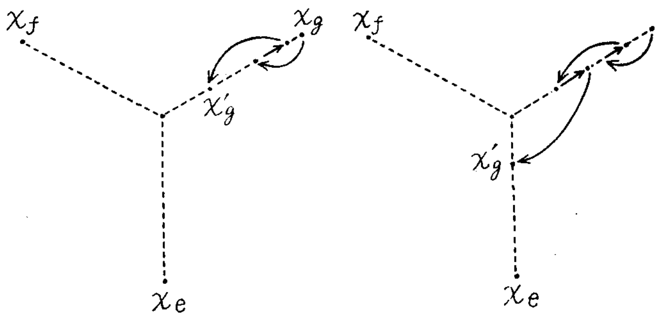


図 4－6



(a)

図 4－7

さて，A_T のすべての枝は B_e，B_f，B_g のいずれかで保証されるから，〔定理3〕の系によって

$$B_T = B_e \cup B_f \cup B_g$$

をうる。かくして，B_T はたがいに枝を共有しない3つの部分集合 B_e, B_f, B_g に分割され，それらから路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_e)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_f)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_g)$ が一意に求められた。以下では，これらの路を部分網にもつ1つの木〔X_o, B_o〕を導びき，枝の総費用 $c(B_o)$ が $c(B_T)$ に一致するよう，木の各枝に適当な費用を付加する。

最初に導びかれる木〔X_o, B_o〕の性質と，枝に付加する費用を説明する。〔X_o, B_o〕は3端点をもち，それらは x_e, x_f, x_g に一致する。B_o の各枝は端点から1つの分岐点 x'_b に向って，図4—8(a)の実線のように方向づけられる。これは，3つの路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_b)$ $\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_b)$ で〔X_o, B_o〕が構成されることを意味する。x'_b は X_T の任意の点でよく，また

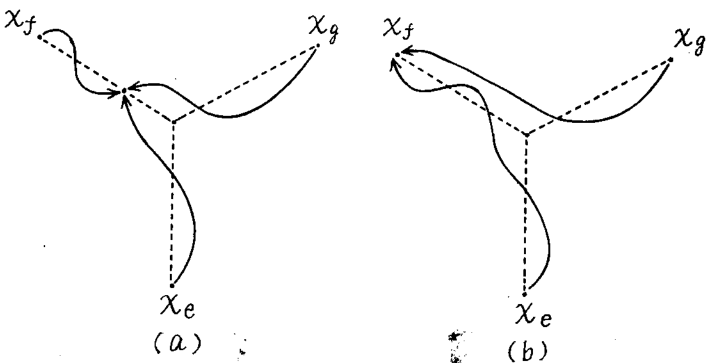


図 4－8

X_o は3端点を含めば X_T の任意の部分集合でよい。さらに特別の場合として，x'_b がいずれかの端点に一致することを許す。このときは分岐点がなくなるが，例えば端点 x_f から分岐点 x'_f にいたる仮想の路を想定すれば同様に取扱かいができる〔図4—8(b)〕。

枝に付加される費用は，枝が $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_b)$ のいずれに属するかで異なる。しかし付加の方法が対称のため，$\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b)$ に属する場合を述べれば十分であろう。まず，X_T の点につぎの順位を与える。〔X_T, A_T〕に属する路 $\overrightarrow{P}_A(x_e,\ x_f)$ は $X_e \cup x_b \cup X_f$ の各点を経由する。これから2点 x_i, x_j をとるとき，先に経由する点 x_i を低順位にあるといい，$x_i < x_j$ で表わす。これは，節4.1における順位の拡張である。同様にして，$X_e \cup x_b \cup X_g$ の点にも $\overrightarrow{P}_A(x_e,\ x_g)$ の経由する順に順位を与える。ただし，X_f の点と X_g の点との間には順位をつけない。低順位の点から高順位の点の方向に矢印で示すと，図4—9となる。順位をこのように定義すると，$\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b)$ の枝 $(x_i,\ x_j)$ に付加される費用 d_{ij} は

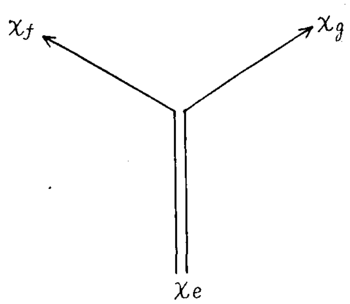


図 4－9

$$d_{ij}=\begin{cases}0, & x_j<x_i \text{ または } x_i=x_b,\ x_j=x'_b\\ c_{ij}, & \text{上記以外}\end{cases} \tag{4.7}$$

と定義される。ここに注意することは，$x_b<x'_b$ でも (x_b, x'_b) の費用は0となることである。この特例は後の考察から明らかとなる。

以上の準備により，既に求めた路 $\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_e)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f, x'_f)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_g)$ から木〔X_o, B_o〕を導びき，$c(B_o)$ を $c(B_T)$ に一致するようにしよう。考察に先立って注意することは，いかなる木が導びかれようと，上の3つの路を部分集合に含むかぎり $c(B_e \cup B_f \cup B_g)$ だけで既に $c(B_T)$ に一致していることである。したがって，費用が0の枝だけを追加して所要の木〔X_o, B_o〕を導びかねばならない。以下はこの観点で考察する。

3点 x'_e, x'_f, x'_g に着目し，これらが一致するか否かで場合を分ける。ただし，3点すべてが一致するときは，新らしい枝を追加せずに図4—8の木がえられるから問題ない。

a. x'_e, x'_f, x'_g の2点が一致する場合

x'_e と x'_f, x'_e と x'_g, x'_f と x'_g の一致する3通りがある。いずれの場合も，一致する点を〔X_o, B_o〕の分岐点 x'_b にする。まず x'_e と x'_f の一致するときは，$\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_e)$ の作り方から $x'_b \in X_f \cup x_b$ である。一方，$\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_g)$ の作り方から $x'_g \notin X_g$ である。したがって，費用が0の2つの枝 (x'_g, x_b), (x_b, x'_b) を追加すれば所要の木〔X_o, B_o〕がえられる（図4—10）。ただし，$x_b=x'_b$ のときは枝 (x_b, x'_b), $x_b=x'_g$ のときは枝 (x'_g, x_b) の追加をそれぞれ省略する。

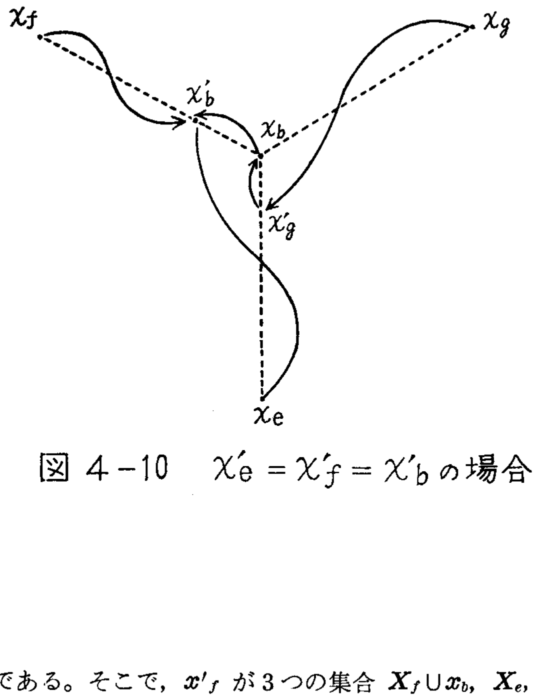
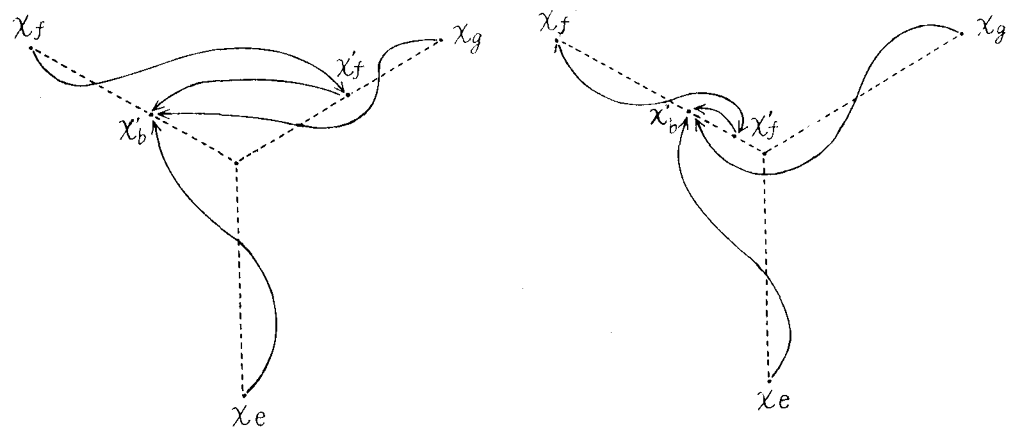


図 4−10　$\chi'_e=\chi'_f=\chi'_b$ の場合

つぎに x'_e と x'_g が一致するときは，$\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_e)$ の作り方から $x'_b \in X_f \cup x_b$ である。一方，x_f は $X_e \cup X_g \cup x_b$ の点か，x'_b より高順位の X_f の点（x'_b を含まず）である。いずれの場合も，費用が0の枝 (x'_f, x'_b) を追加すればよい。最後に x'_f と x'_g の一致するときは，個々の場合を検討すると図4—10, 4—11のいずれかの形に帰着される。

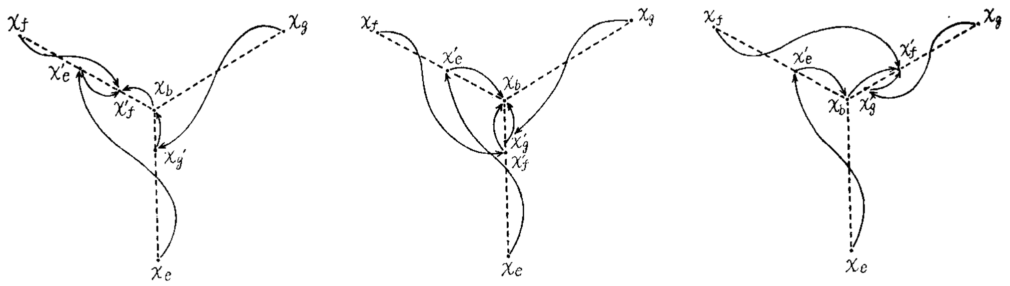
b. x'_e, x'_f, x'_g がすべて一致しない場合

$\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_e)$ の作り方から，$x'_e \in X_f \cup x_b$ である。そこで，x'_f が3つの集合 $X_f \cup x_b$, X_e, X_g のいずれに属するかで場合を分ける。まず $x'_f \in X_f \cup x_b$ ならば，$\overrightarrow{P}_A(x_e, x_f)$ において x'_e は x'_f より高順位の点となる。一方，$x'_g \notin X_g$ である。よって，費用が0の3つの枝 (x'_e, x'_f), (x'_g, x_b), (x_b, x'_f) を追加すれば，$x'_f=x'_b$ を分岐点とする木がえられる〔図4—12



(a) $x'_f \notin X_f$　　　(b) $x'_f \in X_f$

図 4-11　$x'_e = x'_g = x'_b$ の場合



(a) $x'_f \in X_f \cup x_b$　　　(b) $x'_f \in X_e$　　　(c) $x'_f \in X_g$

図 4-12　$x'_e \neq x'_f \neq x'_g$ の場合

(a)〕。ただし，$x_b = x'_f$ のときは枝 $(x_b,\ x'_f)$，$x_b = x'_g$ のときは枝 $(x'_g,\ x_b)$ の追加をそれぞれ省略する。つぎに $x'_f \in X_e$ ならば，費用が 0 の 3 つの枝 $(x'_e,\ x_b)$，$(x'_f,\ x_b)$，$(x'_g,\ x_b)$ を追加すればよい〔図4—12(b)〕。ただし x'_e，x'_g がそれぞれ x_b に一致するときは，対応する枝の追加を省略する。最後に $x'_f \in X_g$ ならば，$\overrightarrow{P}_A(x_g,\ x_e)$ において x'_g は x'_f より高順位の点となる*。よって，費用が 0 の 3 つの枝 $(x'_e,\ x_b)$，$(x_b,\ x'_f)$，$(x'_g,\ x'_f)$ を追加すればよい〔図4—12(c)〕。ただし，$x'_e = x_b$ のときは枝 $(x'_e,\ x_b)$ の追加を省略する。

いままでの結果を要約すると，最適保証網を導びく枝の集合 B_T から x_e，x_f，x_g を端点とする木〔X_o，B_o〕がえられ，B_o の枝に式 (4.7) の費用を付加すると $c(B_o) = c(B_T)$ となることが判った。そこで，逆に x_e，x_f，x_g を端点とする任意の木〔X'_o，B'_o〕を完全網〔X_T，B_C

---

* ただし，$x'_g \in X_e \cup X_g \cup x_b$ とした。$x'_g \cup X_f \cup X_g \cup x_b$ ならば $\overrightarrow{P}_A(x_g,\ x_f)$ を考えればよい。

からとるとき，1つの保証網〔X_T, $A_T \cup B'_T$〕がえられ，B'_o の各枝に式 (4.7) の費用を付加するとき $c(B'_o)=c(B'_T)$ となしうることを示そう。節4.1と同様に B'_o から費用が正の枝を選んで集合 B'_T を作るとき，これが A_T の枝を保証すればよい。

木〔X'_o, B'_o〕の分岐点を y'_b とする。一般性を失なうことなく，$y'_b \in X_f \cup x_b$ となしうる。必要なら X_e, X_f, X_g の役割を交換すればよいからである。まず A_e の枝が B'_T のいずれかの枝で保証されることを示す。A_e の任意の枝を (x_i, x_{i+1}) とする。ただし，$\overrightarrow{P}_A(x_e, x_b)$ において x_{i+1} は x_i より高順位の点とする。いま，X_T を x_i より低順位の点の集合 X_i (x_i を含む) と残りの集合 X_{i+1} に分割する。$x_e \in X_i$, $y'_b \in X_{i+1}$ である。したがって，路 $\overrightarrow{P}_{B'}(x_e, y'_b)$ には X_i から X_{i+1} にいたる枝が少なくとも1つ存在する (図4—14)。これは (x_i, x_{i+1}) を保証し，かつ式 (4.7) から枝の費用は正である。すなわち B'_Tに属す。A_g の枝が保証されることも同様に証明される。

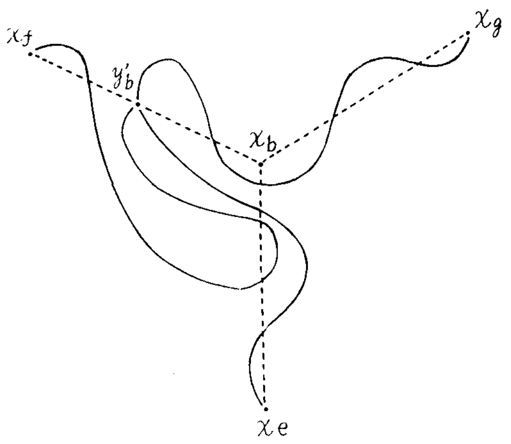


図 4-13 木〔X'_0, B'_0〕

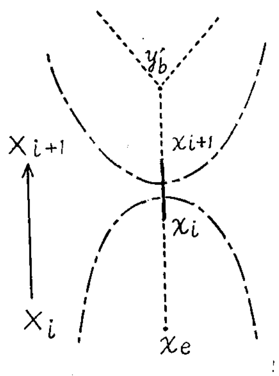


図 4-14

最後に，A_f の枝について証明する。$y'_b=x_b$ ならば上と同じ証明がなされるので，$y'_b \in X_f$ と仮定する。$P_A(x_f, x_b)$ を y'_b で $P_A(x_f, y'_b)$, $P_A(y'_b, x_b)$ に2分し，それぞれに属する枝の集合を A'_f, A''_f と記す。$A'_f \cup A''_f = A_f$ である。すると，A'_f が B'_T の枝で保証されることは，〔X'_o, B'_o〕の路 $\overrightarrow{P}_{B'}(x_f, y'_b)$ を考えれば明らかである。A''_f にたいしては，まず $\overrightarrow{P}_{B'}(x_e, y'_b)$ を考える。これが枝 (x_b, y'_b) を含まなければ問題ない。含むときは，A''_f が (x_b, y'_b) だけで保証されることもありうる。式 (4.7) から枝の費用は0のため，(x_b, y'_b) は B'_T に属さない。このときは $\overrightarrow{P}_B(x_g, y'_b)$ を考えると，もはやこれは x_b を経由しない。〔X'_o, B'_o〕が木だからである。よって，今度は A''_f の枝が保証される。

3点 x_e, x_f, x_g を端点とする木〔X'_o, B'_o〕は，等価な木〔X_T, A_T〕の保証木と呼ばれる。これは，B'_o から費用が正の枝を選んで B'_T を作るとき〔X_T, $A_T \cup B'_T$〕が保証網となるためである。さて，いままでの考察を要約するとつぎのようになる。最適保証網〔X_T, $A_T \cup B_T$〕を導びく枝の集合 B_T から保証木〔X_o, B_o〕がえられ，任意の保証木〔X'_o, B'_o〕から保証網

〔X_T, $A_T \cup B'_T$〕を導びく枝の集合 B'_T がえられる。しかも両者の対応で，枝の総費用は保存される。かくして最適保証網を構成する問題は，枝の費用を長さと解釈するとき，各端点を結ぶ最短保証木の問題に還元される。

4.3. 3点を結ぶ最短保証木

この節では3端点 x_e, x_f, x_g を結ぶ最短保証木の求め方を示す。このため最短保証木〔X_o, B_o〕がえられたとし，その性質を調べる。〔X_o, B_o〕の分岐点を x'_b とする。一般性を失なうことなく，$x'_b \in X_f \cup x_b$ と仮定できる。各端点から x'_b にいたる3つの路 $\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f, x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b)$ を考える。すると，枝の長さ（費用）が式（4.7）で定義された完全網〔X_T, B_C〕において，$\overrightarrow{P}_B(x_f, x'_b)$ は x_f から x'_b にいたる最短路となる。さもなければ，これを最短路に置きかえて〔X_o, B_o〕より短かい木がえられるからである。しかし，残りの路 $\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b)$ は必らずしも最短路とならない。というのは，低順位の点から高順位の点に向う枝であるにもかかわらず，(x_b, x'_b) の費用が0となるためである。このため x_e, x_g から x'_b にいたる2つの最短路を求めると，共に (x_b, x'_b) を含むことが可能となる（図4—15）。ただし，この枝を含まなければ，$\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b)$ はいずれも最短路である。さて，3つの路を最短路に帰着させるため，式（4.7）を修正して完全網の各枝 (x_i, x_j) に

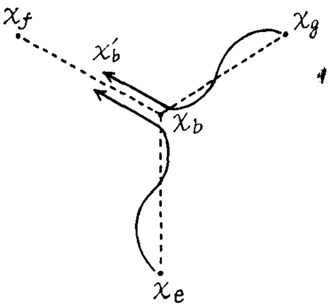


図 4－15

$$d_{ij}=\begin{cases}0, & x_j < x_i \\ c_{ij}, & \text{上記以外}\end{cases} \tag{4.8}$$

の費用を付加する。ただし，順位の高低はどの端点からの路を考えるかで変ることに注意する。このように費用を修正しても $\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b)$ が共に (x_b, x'_b) を含まなければ，それらは最短路である。また (x_b, x'_b) を含むとすれば，保証木〔X_o, B_o〕の作り方からその一方だけが含んでいる。これを $\overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b)$ としよう。すると，この路は x_g から x_b にいたる最短路に枝 (x_b, x'_b) を加えたものでなければならない。そして $\overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b)$ は x_e から x'_b にいたる最短路となる。かくして $x'_b \in X_f \cup x_b$ のとき，つぎの3通りが可能となる。

(i) $\begin{cases} \overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b): x_e \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_f, x'_b): x_f \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b): x_g \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \overrightarrow{P}_B(x_e, x'_b): x_e \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_f, x'_b): x_f \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_g, x'_b): x_g \text{ から } x_b \text{ にいたる最短路に枝} \\ \qquad (x_b, x'_b) \text{ を加えたもの} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b) : x_e \text{ から } x_b \text{ にいたる最短路に枝} \\ \qquad (x_b,\ x'_b) \text{ を加えたもの} \\ \overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_b) : x_f \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_b) : x_g \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \end{cases}$

したがって，$x'_b \notin X_f \cup x_b$ のときを考慮すれば，

(iv) $\begin{cases} \overrightarrow{P}_B(x_e,\ x'_b) : x_e \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \\ \overrightarrow{P}_B(x_f,\ x'_b) : x_f \text{ から } x_b \text{ にいたる最短路に枝} \\ \qquad (x_b,\ x'_b) \text{ を加えたもの} \\ \overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_b) : x_g \text{ から } x'_b \text{ にいたる最短路} \end{cases}$

の場合を加えて４通りとなる。

いま X_T から任意の１点 y'_b をとり，各端点から y'_b にいたる最短路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ y'_b)$，$P_B(x_g, y'_b)$ と各端点から x_b にいたる最短路 $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x_b)$ を求める。そして

(i) : $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ y'_b)$

(ii) : $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x_b)$

(iii) : $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ y'_b)$

(iv) : $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ y'_b)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x'_b)$

の各場合について，３つの路に含まれる枝の総費用を計算する。この最小値を $c(y'_b)$で表わそう。すると，最適集合 B_T の総費用 $c(B_T)$ は

$$c(B_T) = \min_{y'_b \in X_T} c(y'_b) \tag{4.9}$$

となる筈である。かくして，X_T のすべての点について $c(y'_b)$ を計算すれば，その最小値を与える点 x'_b が最短保証木の分岐点となる。

最短保証木を求めるには，表4—1のように計算すると系統的で判りやすい。まず X_T の点を X_e，X_f，X_g，x_b に分類して最左列に列記する。(Ⅰ)～(Ⅲ)列には，各端点から x_i，x_j，x_k，x_b にいたる最短路の総長（総費用）を計算する。この表では，各端から x_b にいたる最短路の総長を D_{eb}，D_{fb}，D_{gb} で表わした。(Ⅳ)～(Ⅶ)の各列には上欄の和を計算する。これらの和の中で，最小値が $c(B_T)$に一致する。最適保証木はこれに対応して容易にえられる。例えば，x_i 行(Ⅳ)列が最小値となれば $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x_i)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x_i)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x_i)$ が最短保証木を構成し，x_j 行(Ⅴ)列が最小値となれば $\overrightarrow{P}_B(x_e,\ x_j)$，$\overrightarrow{P}_B(x_f,\ x_j)$，$\overrightarrow{P}_B(x_g,\ x_b)$ と枝 $(x_b,\ x_j)$ が最短保証木を構成する。この計算で注意することは，３つの最短路（と必要に応じて$(x_b,\ x'_b)$ を加えたもの）の和として求められる網は必らずしも木にならないことである。しかし，最小値に対応する網はつねに木である。さもないと，適当なループの枝を取去って更に総長の少ない木がえられるからである。表4—1による具体的計算例は節５で示される。

表 4—1

		(Ⅰ) x_e	(Ⅱ) x_f	(Ⅲ) x_g	(Ⅳ)=(Ⅰ)+(Ⅱ)+(Ⅲ)	(Ⅴ)=(Ⅰ)+(Ⅱ)+D_{gb}	(Ⅵ)=(Ⅰ)+D_{fc}+(Ⅲ)	(Ⅶ)=D_{eb}+(Ⅱ)+(Ⅲ)
X_e の点	x_i							
X_f の点	x_j							
X_g の点	x_y							
分岐点	x_b	D_{eb}	D_{fb}	D_{gb}				

4.4. k 端点の木

最適保証網の構成を k 端点の木に拡張することは，原理的にはさほど困難でない。まえの考察から予想されるように，この問題は k 個の点を結ぶ最短保証木の問題に還元される。これを示すため若干の予備考察をしよう。与えられた等価な木を〔X_T, A_T〕とし，これに含まれる端点の集合を X_e，分岐点の集合を X_b で表わす。端点が3以上の場合，X_b は空集合でない。$X_b \cup X_e$ から任意の2点 x_b，x_c をとると，この間を結ぶ路 $P_A(x_b, x_c)$ が木〔X_T，A_T〕の中で一意に定まる。このとき $P_A(x_b, x_c)$ が x_b，x_c 以外の分岐点を経由しなければ，2点 x_b，x_c は隣る点と呼ばれる。この概念は通常点* の無視にもとづく。図4—16において，x_b と x_c が隣る点である。隣る点にたいしてつぎの定理が成立つ。

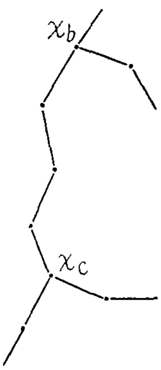


図 4 -16

〔**定理4**〕：分岐点を含む木では，2つ以上の端点と隣る分岐点が存在する。

〔**証明**〕：1つの分岐点 x_a を任意にとる。これが2つ以上の端点と隣ればそれでよい。さもないときは，分岐点の定義から x_a と隣る分岐点 x_b が存在する。x_b が2つ以上の端点と隣ればそれ

* 点に結ばれる枝の数は枝数（degree）と呼ばれる。枝数1の点が端点，2の点が通常点，3以上の点が分岐点である。

でよい。さもないときは，x_b と隣る分岐点 x_c が存在する。このようにして隣る分岐点を順次求めれば，ついに2つ以上の端点と隣る分岐点が見出される。さもないと，有限集合 X_T では既に経由した分岐点に再び到達し，木にループが含まれるからである。（終）

さて，最適保証網の構成に移る。まず最適集合 B_T から保証木〔X_o, B_o〕のえられることを示す。(k-1) 以下の端点について証明されたと仮定し，k 端点の場合を示す。2つ以上の端点と隣る分岐点を x_b，これと隣る2つの端点を x_e, x_f とする。木に属する路 $P_A(x_e, x_b)$, $P_A(x_f, x_b)$ を考え，それぞれに属する枝の集合を A_e, A_f, 残りの集合を A_g とする。また各路の経由する点の集合を X_e, X_f, 残りの集合を X_g, で表わす。ただし，分岐点 X_b はいずれにも属さないとする。A_T, X_T は分割されて

$$\begin{cases} A_T = A_e \cup A_f \cup A_g \\ X_T = X_e \cup X_f \cup X_g \cup x_b \end{cases}$$

とかかれ，式 (4.6) と形式的に対応する。以下の考察はほぼ節4.2と対応するので，叙述を簡略にする。A_e, A_f を保証する枝を B_T から選び，これらを B_e, B_f と表わす。B_e, B_f を用いて x_e, x_f からの路 $\vec{P}_B(x_e, x'_e)$, $\vec{P}_B(x_f, x'_f)$を作る〔図4—17(a)〕。このとき $x'_e \in X_e, x'_f \notin X_f$ である。すると $P_A(x_e, x_e')$, $P_A(x_f, x'_f)$ に属する A_T の枝はそれぞれ B_e, B_f で保証される。よって，いずれにも属さない枝は (B_T-B_e-B_f) で保証される筈である。いま〔X_T, A_T〕において $P_A(x_e, x'_e)$, $P_A(x_f, x'_f)$ を1点に退化する〔図4—17(b)〕。この操作でえられる網は，(k—1) 以下の端点を含む木である。よって，これにたいする保証木〔X_g, B_g〕は (B_T-B_e-B_f) からえられる。すると，$\vec{P}_B(x_e, x'_e)$, $\vec{P}_B(x_f, x'_f)$, 〔X_g, B_g〕から所要の保証木〔X_o, B_o〕を導びくことは，節4.2の考察とほぼ同様になされる。

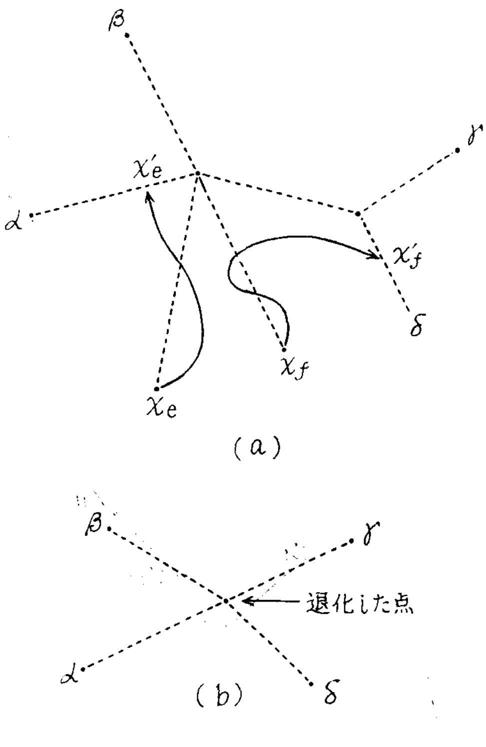


図 4−17 路の退化

つぎに任意の保証木〔X'_o, B'_o〕から保証網〔X_T, $A_T \cup B'_T$〕の導びかれることを示す。A_T の任意の枝を (x_i, x_{i+1}) とする。〔X'_o, B'_o〕は X_e のすべての端点を結ぶ木であるから，隣る2点 x_g, x_h を適当にとるとき，$P_A(x_g, x_h)$ は (x_i, x_{i+1}) を含む。すると図4—14と同様にして，$\vec{P}_B(x_g,$

x_h）の中に（x_i, x_{i+1}）を保証する B_T の枝が存在する。かくして，最適集合 B_T に保証木〔X_o, B_o〕が対応し，任意の保証木〔X'_o, B'_o〕に保証網を導びく枝の集合 B'_T が対応した。

k 点を結ぶ最短保証木は，組合わせ的方法で（k-1）点を結ぶ最短保証木に還元される。X_T から任意の点 y'_b をとり，最短路 $\overrightarrow{P}_B(x_e, y'_b)$, $\overrightarrow{P}_B(x_f, y'_b)$ を求める。一方，（k-1）個の点（$X_T-x_e-x_f$）$\cup y'_b$ を結ぶ最短保証木がえられれば，

$$x_e,\ x_f \in X_e,\ y'_b \in X_T$$

のすべての組合わせにたいして枝の総費用を比較するとき，その最小値が c（B_T）に一致する。この方法は組合わせ的であり，しかも分岐点にたいする配慮を節4.2と同様に行なうと，計算量は莫大になる。したがって，少し大きい k にたいしては電子計算機の助けが必要となろう。

5. 計　　算　　例

最後に計算例を示す。与えられた流れ網〔X, A〕を図5—1，追加する枝の費用を表5—1とす

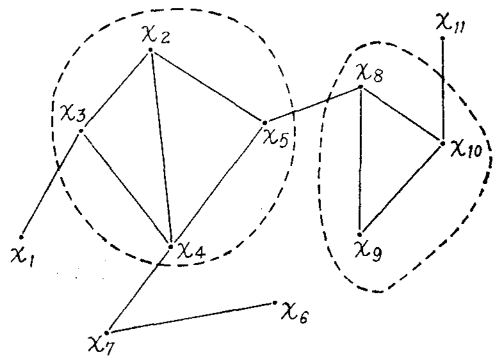


図 5－1

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_1	9	8	9	12	15	7	10	10	13	11
x_2		2	5	4	16	10	17	20	19	10
x_3			4	6	12	5	9	16	15	14
x_4				5	8	4	10	10	12	12
x_5					8	12	7	8	11	9
x_6						3	10	6	8	8
x_7							13	9	15	12
x_8								9	5	1
x_9									7	7
x_{10}										3

表 5—1

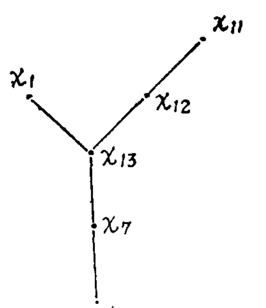


図 5－2 等価な木

	x_6	x_7	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_1	15	7	11	10	8
x_6		3	8	6	8
x_7			12	9	4
x_{11}				1	9
x_{12}					7

表 5—2

る。まず等価な木〔X_T, A_T〕を求める。これには図5—1の点線部をそれぞれ退化し，図5—2を作る。これにたいする枝の費用は式（3.2）から計算されて，表5—2となる。さて，木の端点は3つであるから，表4—1が利用される。各端点から X_T のすべての点にいたる最短路を求めるため，枝の費用を式 (4.8) で再評価する。このとき，どの端点を基準にして路を考えるかで，同じ枝でも費用の異なることに注意する。表5—3はこの結果である。これから最短路の長さを計算し，表５－４の(Ⅰ)～(Ⅲ)列に記入する。(Ⅳ)～(Ⅶ)列の計算は容易である。かくして最短保証木の総長は14となる。表中の*印がそれを示す。最短保証木は図５－３の３通りとなるが，費用が正の枝を選んで B_T を作ると同じになる（図５－４)。これから最短保証木の作り方は何通りもあることが知られる。元の網〔X, A〕にたいする最適保証網は，表５－１，５－２の比較から容易にえられる（図５－５）。ただし，B_T の枝は点線で示して区別した。

表　5—3

	x_1	x_6	x_7	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_1	—	15	7	11	10	8
x_6	0	—	0	8	6	0
x_7	0	3	—	12	9	0
x_{11}	0	8	12	—	0	0
x_{12}	0	6	9	1	—	0
x_{13}	0	8	4	9	7	—

（a） x_1 を基準

	x_1	x_6	x_7	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_1	—	0	0	11	10	0
x_6	15	—	3	8	6	8
x_7	7	0	–	12	9	4
x_{11}	11	0	0	—	0	0
x_{12}	10	0	0	1	—	0
x_{13}	8	0	0	9	7	—

（b） x_6 を基準

	x_1	x_6	x_7	x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_1	—	15	7	0	0	0
x_6	15	—	0	0	0	0
x_7	7	3	–	0	0	0
x_{11}	11	8	12	—	1	9
x_{12}	10	6	9	0	—	7
x_{13}	8	8	4	0	0	—

（c） x_{11} を基準

表 5—4

		(Ⅰ) x_1	(Ⅱ) x_6	(Ⅲ) x_{11}	(Ⅳ)＝(Ⅰ)＋(Ⅱ)＋(Ⅲ)	(Ⅴ)＝(Ⅰ)＋(Ⅱ)＋$D_{11,13}$	(Ⅵ)＝(Ⅰ)＋$D_{6,13}$＋(Ⅲ)	(Ⅶ)＝$D_{1,13}$＋(Ⅱ)＋(Ⅲ)
X_1の点	x_1	0	10	11	21	17	17	
X_6の点	x_6	10	0	7	17	17		14*
	x_7	7	3	7	17	17		17
X_{11}の点	x_{11}	11	7	0	18		17	14*
	x_{12}	10	6	1	17		17	14*
分岐点	x_{13}	7	6	7	20			

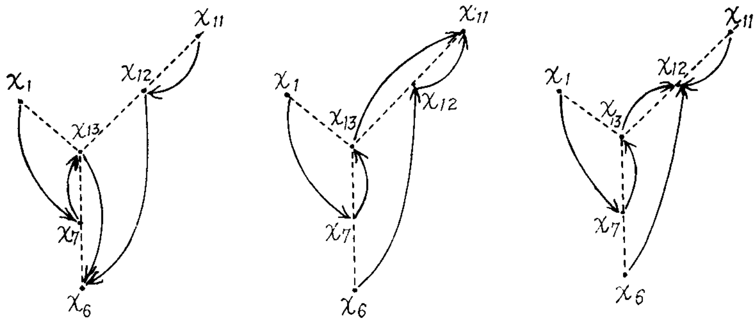


図 5－3　最短保証木

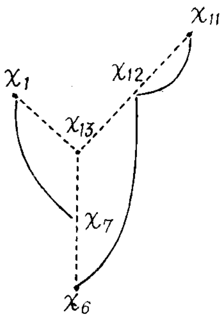


図 5－4

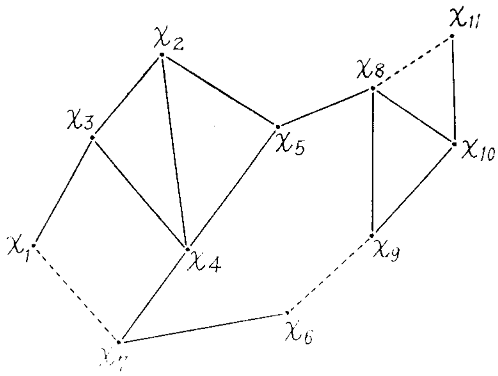


図 5－5　最適保証網

文　　　献

1) L. R. Ford and D. R. Fulkorson, Flows in Networks, Princeton University Press, 1962

2) O. Ore, Thory of Graph, American Mathematical Sodety, 1962

3) C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications, Methuen & Co., LTD, 1962