《綜合報告》

# グ ラ フ の 理 論

伊 理 正 夫*



## ま え が き

最近**グラフの理論**とか**トポロジー**とかがあちこちの実際的な分野に応用されるようになって来たといわれる。これらは数学全般からみると，極く初等的な，あるいは基礎的な，部門である。これらが流行するのはある意味では近頃の数学ブーム，あるいは数学の応用のブームの当然の結果であるともいえる。なぜならば，旧来の応用数学の十八番である函数論や偏微分方程式などのように型の定まった細かな技巧の発達したものだけでは，次から次に生のまま現われてくる現実の問題に対処しきれるはずがなく，要素の間の関係の有無というような極く基本的な概念を適切に表現できるような手段のみがまずとりあえず使われるということになるからである。

グラフの理論は二つの異なる立場からみることができる。一方ではグラフは点という0次元要素と枝という1次元要素より成る1次元複体（多次元複体の特別な場合）として位相幾何学（topology）の対象となるが，他方では，点という基本要素の対の集合の部分集合を枝の集合とみることによっていわゆる組み合わせ論（Kombinatorik）の一分野がグラフ理論であるとみることもできる。結局は同じことをいうにしてもどちらの立場をとるかによって理論の展開し方にニュアンスの違いが出てくる。グラフの理論の参考書としては久しく唯一のものとされていた

* 東京大学工学部計数工学科　第17回研究発表会昭和40年5月26日受理「経営科学」第9巻1号

D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936 (リプリント版 Chelsea Publishing Co., 1950)

も，最近のネットワークフローの問題の研究成果をもある程度含み現在グラフの理論の参考書として代表的なものとされている

C. Berge, Théorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris, 1958 (英訳 The Theory of Graphs and its Applications. John Wiley & Sons, New York, 1961)

も，どちらかというと組み合わせ論的立場に立っているようである。しかし，グラフの理論が応用上有用なのはやはりその幾何学的イメージとかその上の流れ（フロー）や圧（ポテンシャル）というような物理的イメージとかの助けによるところが多いので，今回の説明は代数的位相幾何学の立場に近い形にし，しかも厳密に公理的に述べるというよりはむしろ直観にもある程度訴えることにして行きたい。

## 1. グラフの定義と表現

グラフの構成要素は**点**（nodes）と**枝**（branches）とである。前者はまた**節点**，**頂点**（points, vertices；日本語と英語とが必ずしもこの順に対応して用いられるわけでもない），後者は**辺**，**線分**，**弧**（edges, segments, arcs；同前）とも呼ばれ，異なる名称を異なる意味に使いわけることもあるが，名称と意味との対応は人によってもまちまちなのでここでは始めはそのような区別には触れないでおこう。また，点や枝の数が無限の場合も勿論考えられるが，ここではそれらは有限としておく。有限の場合から無限の場合への拡張やそれに伴なう困難などはほとんど自明であるからである。

グラフの点の集合を $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，枝の集合を $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と書くことにする。枝には**向き**（orientation, direction）が与えられ，点と枝との間には**接続関係**（incidence relation）が定められている。すなわち，一つの枝 $x_\kappa$ に対してはその**始点**（$\partial^+ x_\kappa$ と書くことにする）と**終点**（$\partial^- x_\kappa$ と書くことにする）という一対の点が対応づけられる。あるいは逆に，一つの点 $u_a$ に対してはそこから**出ている枝の組**（$\delta^+ u_a$ と書くことにする）およびそこに**入っている枝の組**（$\delta^- u_a$ と書くことにする）という二組の枝の集合が対応づけられるとみてもよい。（後者の場合には同一の枝が異なる点から同時に出たり，入ったりしないようにしておかなければならない。）

函数 $\partial^+$ と $\partial^-$ は集合 $X$ の上で定義されその値は $U$ の要素であり，函数 $\delta^+$ と $\delta^-$ は集合 $U$ の上で定義されその値は $X$ の部分集合（空集合 $\phi$ でもよい）である。 $\partial^1 \equiv \partial^+$, $\partial^{-1} \equiv \partial^-$, $\delta^1 \equiv \delta^+$, $\delta^{-1} \equiv \delta^-$ と記すと，すべての $\kappa$ $(=1, \cdots, n)$ に対して

$$\delta^\varepsilon \partial^\varepsilon x_\kappa \ni x_\kappa \qquad (\varepsilon = 1, \ -1) \tag{1.1}$$

であり，すべての $a$ $(=1, \cdots, m)$，$\kappa$ に対して

$$\delta^{\varepsilon} u_a \ni x_\kappa \quad ならば \quad \partial^{\varepsilon} x_\kappa = u_a \qquad (\varepsilon=1,\ -1) \tag{1.2}$$

でなければならないこと，また，

$$a \neq b \quad なら \quad \delta^{\varepsilon} u_a \cap \delta^{\varepsilon} u_b = \phi \qquad (\varepsilon=1,\ -1), \tag{1.3}$$

$$\bigcup_{a=1}^{m} \delta^{+} u_a = \bigcup_{a=1}^{m} \delta^{-} u_a = X \tag{1.4}$$

でなければならないこと，などは明らかである。$\partial^+$，$\partial^-$ が与えられれば (1.1)，(1.2) によって $\delta^+$ と $\delta^-$ とは一意的に定められる。また逆に，(1.3)，(1.4) を満足するような $\delta^+$，$\delta^-$ が与えられれば (1.1)，(1.2) によって $\partial^+$，$\partial^-$ が一意的に定められる。

点の間の二項関係の表現としてグラフを用いるときには，

$$\Gamma = \partial^- \delta^+ \tag{1.5}$$

（$A$ が $X$ の部分集合のとき $\partial^- A$ は $\partial^- A = \bigcup_{x_\kappa \in A} \partial^- x_\kappa$ によって定義されるものとする）という函数 $\Gamma$ のみが問題となる。$\Gamma u_a$ は〝点 $u_a$ から**出ている**枝のもう一方の端の点の集合〟という意味をもっている。このとき $\partial^+ x_\kappa = \partial^+ x_\lambda$，$\partial^- x_\kappa = \partial^- x_\lambda$ であるような枝 $x_\kappa$ と $x_\lambda$ とは区別されないことになる。そこで，このときには，〝$u_b \in \Gamma u_a$ であるような点の対 ($u_a$，$u_b$) が枝である〟というようないい方をすることが多い。$U$ から $U$ の部分集合の中への任意の写像 $\Gamma$ を与え，$u_b \in \Gamma u_a$ であるような ($u_a$，$u_b$) の集合を $X$ とすれば $\Gamma$ から $\partial^+$，$\partial^-$ や $\delta^+$，$\delta^-$ が（一意的に）定められる。

代数的に接続関係を扱うときには，枝の集合 $X$ を基底とする加群および点の集合 $U$ を基底とする加群とそれらの間の写像とを考えるのが普通である。今，整数環 $J$ を係数領域とすることにすると，枝の集合 $X$ を基底とする加群 $M(X, J)$ は

(i) $$x = \sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa \qquad (g_\kappa \in J,\ x_\kappa \in X) \tag{1.6}$$

という形の要素から成り，

(ii) $$x = \sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa \quad と \quad x' = \sum_{\kappa=1}^{n} g'_\kappa x_\kappa \quad との間に和が$$

$$x + x' = \sum_{\kappa=1}^{n} (g_\kappa + g'_\kappa)\, x_\kappa \tag{1.7}$$

によって定義され（$g_\kappa + g'_\kappa$ は整数としての和），

(iii) $$x = \sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa \quad と整数\ h\ との積が$$

$$hx = \sum_{\kappa=1}^{n} (hg_\kappa)\, x_\kappa \tag{1.8}$$

によって定義される（$hg_\kappa$ は整数としての積）ようなものである。すべての $g_\kappa=0$ なる要素が $M(X, J)$ の零元である。また，$g_\kappa=0$ なる項を省略したり，$(\pm 1)x_\kappa$ を $\pm x_\kappa$ と書いたりするような自明な略記法は断わりなしに用いることにする。点の集合 $U$ を基底とす加群 $M(U, J)$（要素は $u = \sum_{a=1}^{m} u_a\, g_a$ という形）に関してもまったく同様である。

$M(X, J)$ から $M(U, J)$ の中への準同型写像 $\partial$, $M(U, J)$ から $M(X, J)$ の中への準同型写像 $\delta$ を

$$\partial x_\kappa = u_a - u_b \qquad (u_a=\partial^+ x_\kappa,\ u_b=\partial^- x_\kappa \text{ のとき}), \tag{1.9}$$

$$\delta u_a = \sum_{x_\kappa \in \partial^+ u_a} x_\kappa - \sum_{x_\lambda \in \partial^- u_a} x_\lambda \tag{1.10}$$

によって定義する。今, 0, 1, $-1$ を要素とする行列 $\left[D_\kappa^a\right]$ $(a=1, \cdots, m;\ \kappa=1, \cdots, n)$ を

$$D_\kappa^a = \begin{cases} 1 & (u_a=\partial^+ x_\kappa,\ \text{すなわち } x_\kappa \in \delta^+ u_a,\ \text{すなわち} \\ & \quad \text{点 } u_a \text{ が枝 } x_\kappa \text{ の始点のとき}), \qquad (1.11.1) \\ -1 & (u_a=\partial^- x_\kappa,\ \text{すなわち } x_\kappa \in \delta^- u_a,\ \text{すなわち} \\ & \quad \text{点 } u_a \text{ が枝 } x_\kappa \text{ の終点のとき}), \qquad (1.11.2) \\ 0 & (u_a=\partial^+ x_\kappa=\partial^- x_\kappa,\ \text{すなわち } x_\kappa \in \delta^\mp u_a,\ \text{すなわち} \\ & \quad \text{枝 } x_\kappa \text{ が点 } u_a \text{ から出て同じ点 } u_a \text{ に入って} \\ & \quad \text{いるとき; および } x_\kappa \notin \delta^+ u_a \cup \delta^- u_a,\ \text{すなわち} \\ & \quad \text{点 } u_a \text{ と枝 } x_\kappa \text{ とがくっついていていないとき}) \qquad (1.11.3) \end{cases}$$

となるよう定めれば, (1.9), (1.10) は

$$\partial x_\kappa = \sum_{a=1}^{m} D_\kappa^a u_a, \tag{1.9'}$$

$$\delta u_a = \sum_{\kappa=1}^{n} D_\kappa^a x_\kappa \tag{1.10'}$$

と書かれ, $\partial$ と $\delta$ は互いに contragredient な変換であることがわかる。すなわち $M(X, J)$ の2個の要素 $\boldsymbol{x}=\sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa$ と $\boldsymbol{x}'=\sum_{\kappa=1}^{n} g'_\kappa x_\kappa$ との間に一種の内積

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}')=\sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa g'_\kappa \qquad (\text{右辺は整数としての積和}) \tag{1.12}$$

を定義し, $M(U, J)$ の2個の要素の間にも同様のものを定義すると,

$$(\partial \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}')=(\boldsymbol{x},\ \delta \boldsymbol{u}') \tag{1.13}$$

という関係が常に成立する。行列 $\left[D_\kappa^a\right]$ を **incidence matrix**, その要素を **incidence numbers** と呼ぶ。$D_\kappa^a$ には $\kappa$ を固定したとき0でない要素の数は0または2で, 後の場合には一方が1他方が$-1$である, という性質があり, したがって常に

$$\sum_{a=1}^{m} D_\kappa^a = 0 \qquad (\kappa=1, \cdots, n) \tag{1.14}$$

である。このような表わし方をすると, ある点から出て同じ点に入っているような枝(すなわち輪になっている枝) $x_\kappa$ は $\partial x_\kappa=0$ となってどの点にくっついているかがわからなくなるが, それ以外の枝については $D_\kappa^a$ から $\partial^+$, $\partial^-$ を定めることができる。

以上のことを次の図1のグラフについて例示してみよう。

点の集合 $U=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7,\ u_8\}$ $(m=8)$.

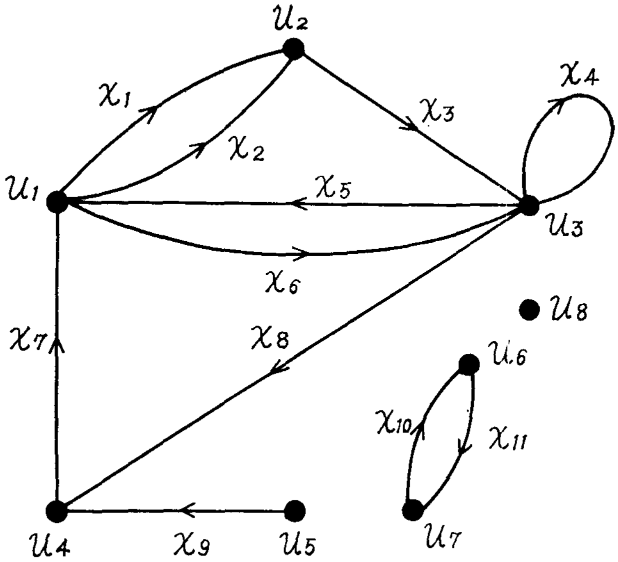



図 1

枝の集合 $\boldsymbol{X}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11}\}$ $(n=11)$.

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_1=u_1\\ \partial^-x_1=u_2\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\partial^+x_2=u_1\\ \partial^-x_2=u_2\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_3=u_2\\ \partial^-x_3=u_3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\partial^+x_4=u_3\\ \partial^-x_4=u_3\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_5=u_3\\ \partial^-x_5=u_1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\partial^+x_6=u_1\\ \partial^-x_6=u_3\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_7=u_4\\ \partial^-x_7=u_1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\partial^+x_8=u_3\\ \partial^-x_8=u_4\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_9=u_5\\ \partial^-x_9=u_4\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\partial^+x_{10}=u_7\\ \partial^-x_{10}=u_6\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial^+x_{11}=u_6\\ \partial^-x_{11}=u_7\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta^+u_1=\{x_1,\ x_2,\ x_6\}\\ \delta^-u_1=\{x_5,\ x_7\}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\delta^+u_2=\{x_3\}\\ \delta^-u_2=\{x_1,\ x_2\}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta^+u_3=\{x_4,\ x_5,\ x_8\}\\ \delta^-u_3=\{x_3,\ x_4,\ x_6\}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\delta^+u_4=\{x_7\}\\ \delta^-u_4=\{x_8,\ x_9\}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta^+u_5=\{x_9\}\\ \delta^-u_5=\phi\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\delta^+u_6=\{x_{11}\}\\ \delta^-u_6=\{x_{10}\}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\delta^+u_7=\{x_{10}\}\\ \delta^-u_7=\{x_{11}\}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\delta^+u_8=\phi\\ \delta^-u_8=\phi\end{array}\right\}.$$

$\Gamma u_1=\{u_2,\ u_3\}$, $\Gamma u_2=\{u_3\}$, $\Gamma u_3=\{u_1,\ u_3,\ u_4\}$, $\Gamma u_4=\{u_1\}$,

$\Gamma u_5=\{u_4\}$, $\Gamma u_6=\{u_7\}$, $\Gamma u_7=\{u_6\}$, $\Gamma u_8=\phi$.

$$\left[D_\kappa^\alpha\right]=\begin{array}{c|ccccccccccc} \kappa \backslash \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

## 2. 基本的な概念と定理

### 2.1. 連　結　性

ある枝 $x_\kappa$ の両端の点 $u_a=\partial^{\mp}x_\kappa$ と $u_b=\partial^{\pm}x_\kappa$ とは**連結**しているといい $u_a\sim u_b$ と書く（$u_b\sim$

$u_a$ でもあるとする)。$u_a$ と $u_b$ とが連結して居り，$u_b$ と $u_c$ とも連結しているとき，$u_a$ と $u_c$ とはやはり連結しているとする。また任意の点は自分自身と連結しているとする。(そして，このようにして定まるもの以外は連結関係にないとする。) このようにして定義される連結関係 $\sim$ は明らかに

(i) 反射律：すべての $a$ について $u_a \sim u_a$,

(ii) 対称律：$u_a \sim u_b$ なら $u_b \sim u_a$,

(iii) 遷移律：$u_a \sim u_b$, $u_b \sim u_c$ なら $u_a \sim u_c$

を満足するから，$\sim$ は一つの同値関係で，点の集合 $U$ は $\sim$ によっていくつかの同値類 $U_1$, …, $U_\alpha$ に分解される。

$$U = U_1 \cup \cdots \cup U_\alpha, \qquad U_i \cap U_j = \phi \ (i \neq j). \tag{2.1.1}$$

それに従って，

$$X_i = \bigcup_{u_a \in U_i} (\partial^+ u_a \cup \partial^- u_a) \tag{2.1.2}$$

とおくと，枝の集合 $X$ も

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_\alpha, \qquad X_i \cap X_j = \phi \ (i \neq j) \tag{2.1.3}$$

と分解される。$U_i$, $X_i$ から成るグラフの部分はそれ自身は連結していて他とは離れているので**連結成分** (connected component) と呼ばれる。上記の $\alpha$ が連結成分の数で，$\alpha = 1$ のときグラフは**連結** (connected) であるという。

**定理 2.1.** 2点 $u_a$, $u_b$ が同一連結成分に属するための，すなわち $u_a \sim u_b$ であるための，必要十分条件は，適当な $x$ $(\epsilon M(X, J))$ によって

$$u_a - u_b = \partial x \tag{2.1.4}$$

と書けることである。

**証明**：$u_a = u_b$ なら $x = 0$ で問題ない。$u_a \neq u_b$ で $u_a \sim u_b$ なら，定義によって，点 $u_a$ から点 $u_b$ に到る道が存在する(〝道〟の定義その他については§2.7.2 で述べるが，ここでは常識的な意味にとっておいてもよい)。枝 $x_\kappa$ がその道に順方向に含まれていれば係数 $+1$ を，逆方向に含まれていれば係数 $-1$ を，含まれていなければ係数 0 を，それぞれ，$x_\kappa$ につけて $x$ を作れば $\partial x = u_a - u_b$ となることは明らかであろう。次に $u_a \not\sim u_b$ のとき考える。(1.14) により，任意の $x$ $(\epsilon M(X, J))$ について，

$$\partial x = \sum_{a=1}^{m} g_a u_a \qquad \text{なら} \qquad \sum_{a=1}^{m} g_a = 0 \tag{2.1.5}$$

という関係がある。また，$x = \sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa$ は

$$x = \sum_{i=1}^{\alpha} x_i, \qquad x_i = \sum_{x_\kappa \in X_i} g_\kappa x_\kappa \tag{2.1.6}$$

と分解でき，その際 $\partial x_i$ に 0 でない係数をもって現われる $u_a$ は皆 $U_i$ に属する。すなわち，(2.1.6) の $x$ と $x_i$ について

$$\partial \boldsymbol{x}=\boldsymbol{u} \text{ なら } \boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{\alpha} \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_i=\sum_{u_a \epsilon U_i} g_a \boldsymbol{u}_a, \quad \boldsymbol{u}_i=\partial \boldsymbol{x}_i \tag{2.1.7}$$

という性質がある。そこで，$\boldsymbol{u}_a \not\sim \boldsymbol{u}_b$，すなわち $\boldsymbol{u}_a \epsilon U_i$，$\boldsymbol{u}_b \epsilon U_i$ $(\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j})$ なる $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ が存在して，しかも (2.1.4) を満たす $\boldsymbol{x}$ があったとすると，それを (2.1.6) のように分解することによって，

$$\boldsymbol{u}_a=\partial \boldsymbol{x}_i, \quad -\boldsymbol{u}_b=\partial \boldsymbol{x}_j \tag{2.1.8}$$

となることになるが，これは各連結成分ごとに (2.1.5) に相当する関係が成立することに反する。よって，$\boldsymbol{u}_a \not\sim \boldsymbol{u}_b$ のときは (2.1.4) のような $\boldsymbol{x}$ は存在しない。

$M$ $(X, J)$ から $M$ $(U, J)$ の中への写像の**像**，すなわち，ある $\boldsymbol{x}$ によって $\boldsymbol{u}=\partial \boldsymbol{x}$ と書けるような $\boldsymbol{u}$ の全体は $M$ $(U, J)$ の部分群 $F^0$ を作ることは明らかであるが，上の定理を使えば $M$ $(U, J)$ の $F^0$ に関する商群が各連結成分 $U_i$ を基底とする加群 $M$ $(\{U_i\}, J)$ に同型であることが示される。$M$ $(\{U_i\}, J)$ の次数は明らかに連結成分の数 $\alpha$ に等しく，また

$$\boldsymbol{u}=\partial \boldsymbol{x}=\partial\left(\sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa\right)=\sum_{a=1}^{m}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} D_{\kappa}^{a} g_\kappa\right) \boldsymbol{u}_a \tag{2.9}$$

だから $F^0$ の次数は $D_{\kappa}^{a}$ の rank（それを $\rho$ と書く）に等しい。$M$ $(U, J)$ の次数は点の数 $\boldsymbol{m}$ に等しいから，結局次の定理が得られる。

**定理 2.2.** incidence matrix $D_{\kappa}^{a}$ の rank を $\rho$，点の数を $\boldsymbol{m}$ $(=D_{\kappa}^{a}$ の行の数)，連結成分の数を $\alpha$ とすると，

$$\boldsymbol{m}=\rho+\alpha. \tag{2.1.10}$$

容易に確かめられるように，点の集合 $U$ の部分集合 $V$ をとり

$$\boldsymbol{u}=\sum_{\boldsymbol{u}_a \epsilon V} \boldsymbol{u}_a \tag{2.1.11}$$

を作ると，$\partial \boldsymbol{u}$ $(\epsilon M(X, J))$ は『$V$ に属する点と $U-V$ に属する点とを結ぶ枝の和（$V$ の点から $U-V$ の点に向かう枝は係数 1，$U-V$ の点から $V$ の点に向かう枝は係数 $-1$ をもつ)』という形になっている。そこで (2.1.11) の $\boldsymbol{u}$ が $\partial \boldsymbol{u}=0$ となるのは $V$ がいくつかの $U_i$ の和集合のときで，またそのときに限る。一般に $\partial \boldsymbol{u}=0$ となる $M$ $(U, J)$ の要素の全体（写像 $\partial$ の核）は $M$ $(U, J)$ の部分群 $Z_0$ を作るが

$$\boldsymbol{u}_i=\sum_{\boldsymbol{u}_a \epsilon U_i} \boldsymbol{u}_a \qquad (\boldsymbol{i}=1, \cdots, \alpha) \tag{2.1.12}$$

が $Z_0$ の基底を成すことも示すことができる。

$\partial^{\pm} \boldsymbol{u}_a=0$ となるような点 $\boldsymbol{u}_a$，すなわちその 1 点だけで連結成分を作るような点のことを**弧立点** (isolated point) という。

図 1 のグラフは図 2 に点線で囲んで示すような 3 個の連結成分に分かれる。

### 2.2. ループとカットセット

枝の組 $\{x_{\kappa_1}, \cdots, x_{\kappa_l}\}$ と符号（1 あるいは $-1$）の組 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ とがあって $\partial^{-\varepsilon_i} x_{\kappa_i}=\partial^{\varepsilon_{i+1}} x_{\kappa_{i+1}}$ $(\boldsymbol{i}=1, \cdots, \boldsymbol{l}-1$；$\partial^1=\partial^+$，$\partial^{-1}=\partial^-$ とする) となるときは，$\{x_{\kappa_1}, \cdots, x_{\kappa_l}\}$ は一続き

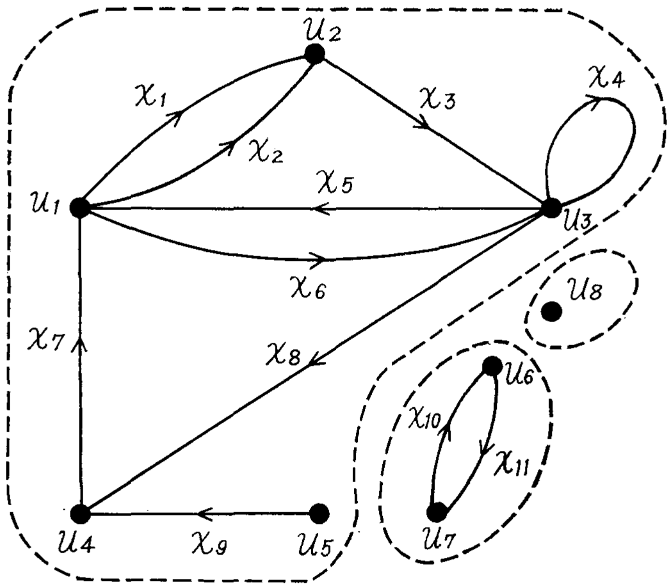



図 2

の道をなし，$\varepsilon_i=1$ か $-1$ かに従って $x_{\kappa_i}$ がその道に順方向か逆方向かに含まれる。前節と同様にして，

$$x=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i x_{\kappa_i} \tag{2.2.1}$$

を作ると

$$\partial x=\partial^{\varepsilon_1}x_{\kappa_1}-\partial^{-\varepsilon_l}x_{\kappa_l} \tag{2.2.2}$$

となる。そこで更に $\partial^{-\varepsilon_l}x_{\kappa_l}=\partial^{\varepsilon_1}x_{\kappa_1}$ なら，すなわち道の終点と始点が一致していれば，すなわち一巡して始めに戻るような道（すなわち閉路）ならば，それに対応する $\boldsymbol{x}$ は $\partial\boldsymbol{x}=0$ となる。一般に，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ の要素で $\partial\boldsymbol{x}=0$ となるようなものを**ループ** (loop) と呼ぶ。ループの全体は $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ から $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{J})$ の中への写像 $\partial$ の核で，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ の部分群 $\boldsymbol{Z}^1$ を作る。

点の集合 $\boldsymbol{U}$ のある部分集合を $\boldsymbol{V}$ とし $\boldsymbol{u}=\sum_{u_a\in V}\boldsymbol{u}_a$ とおく。$\boldsymbol{V}$ の点から出て $\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}$ の点に入る枝の集合を $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})$，$\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}$ の点から出て $\boldsymbol{V}$ の点に入る枝の集合を $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ とし，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{x_\kappa\in X(V,\ U-V)}x_\kappa-\sum_{x_\lambda\in X(U-V,\ V)}x_\lambda \tag{2.2.3}$$

とおく。すると，前節でも触れたように，$\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{u}$ となる。$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})\cup\boldsymbol{X}(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ の枝は「それをもとのグラフから取り除けると——$\boldsymbol{V}$ が連結成分の $\boldsymbol{U}_i$ の和集合でない，すなわち $\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}=0$ でない限りは——グラフの連結成分の数が増す（すなわち $\boldsymbol{V}$ に含まれる点の部分が残りの部分から切り離される)」という性質がある。そこで一般に，適当な $\boldsymbol{u}$ $(\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{J}))$ によって $\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{u}$ と表わされるような $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ の要素 $\boldsymbol{x}$ を**カットセット** (cut-set) と呼ぶ。すなわち，カットセットの全体は $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{J})$ から $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ の中への写像 $\delta$ の像で，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$ の部分群 $\boldsymbol{F}_1$ を作る。

$\boldsymbol{x}$ を任意のループ，$\boldsymbol{x}'$ を任意のカットセットとする。定義により $\partial\boldsymbol{x}=0$ で，また $\boldsymbol{x}'=\delta\boldsymbol{u}'$ となるような $\boldsymbol{u}'$ が存在する。そこで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ との内積を作ると (1.13) により

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=(\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{u}')=(\partial\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}')=(0, \boldsymbol{u}')=0 \tag{2.2.4}$$

となる。(2.2.4) はループとカットセットとの基本的な関係を与える。実際，次の定理が成り立つ。

**定理 2.3.** 任意のループと任意のカットセットとの内積は 0 である。逆に，任意のカットセ

ットとの内積が0になるような $M(X,\ J)$ の要素はループであり，また任意のループとの内積が0であるような $M(X,\ J)$ の要素はカットセットである。

**証明**：定理の前半については既に示した。後半の前半については，$x \in M(X,\ J)$ とカットセットと $x'=\partial u'$ との内積が

$$(x,\ x')=(x,\ \partial u')=(\partial x,\ u')$$

と書かれることから，$(x,\ x')=0$ なら $(\partial x,\ u')=0$ で，これが任意の $u'$ について成立するためには結局 $\partial x=0$，すなわち $x$ はループでなければならないことがわかる。後半の後半を証明するために，任意のループとの内積が 0 になるような $x'=\sum_{\kappa=1}^{n} g'_\kappa x_\kappa$ をとる。グラフは連結であると仮定しても一般性を失なわない（連結でなければ各連結成分に関して以下と同様のことを行なえばよいから）。任意の2点 $u_a$，$u_b$ を結ぶ道に沿っての $g'_\kappa$ の和（枝 $x_\kappa$ が道に順方向に含まれていれば正の符号を，逆方向に含まれていれば負の符号をつけて加え合わせるものとする）は $u_a$ と $u_b$ を定めれば定まり，道の選び方には依らない。なぜならば，$u_a$ から $u_b$ に向かう2本の道 $p_1$，$p_2$ があったとして（共通部分はあってもなくてもよい），$p_1$ の先に $p_2$ を逆向きにつぎ足してやれば一つの閉路になるが，その閉路からできるループ $x$ と $x'$ との内積 $(x,\ x')$ は 0；このことは，その閉路に沿っての $g'_\kappa$ の和（符号は前と同様に考える）が 0 ということ，すなわち $p_1$ に沿っての $g'_\kappa$ の和と $p_2$ に沿っての $g'_\kappa$ の和とが等しいことを意味する。そこで任意の1点，たとえば $u_1$，に対して $g_1=0$ とおき，他のすべての点 $u_a$ に対しては $u_1$ から $u_a$ に到る道に沿っての $g'_\kappa$ の和の値（道に依らない）を $g_a$ として $u=\sum_{a=1}^{m} g_a u_a$ を作れば $\partial u$ における $x_\kappa$ の係数は $\partial x_\kappa=u_a-u_b$ なら $g_a-g_b=g'_\kappa$ となり，結局 $\partial u=x'$ となる。

$x=\sum_{\kappa=1}^{n} g_\kappa x_\kappa$ がループであることは $\partial x=\sum_{a=1}^{m}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} D^{a}_{\kappa} g_\kappa\right)u_a=0$，すなわち

$$\sum_{\kappa=1}^{n} D^{a}_{\kappa} g_\kappa=0 \qquad (a=1,\ \cdots,\ m) \tag{2.2.5}$$

と等価であるから次の定理を得る（定理 2.2 参照）。

**定理 2.4.** 1次独立なループの数（これをグラフの **nullity** とか **cyclomatic number** とか呼ぶこともある）は $n-\rho=n-m+\alpha$ に等しい。ここに $n$ は枝の数，$\rho$ は incidence matrix $D^{a}_{\kappa}$ の rank，$m$ は点の数，$\alpha$ は連結成分の数である。

また，カットセット $x$ は $x=\partial u=\partial\left(\sum_{a=1}^{m} g_a u_a\right)=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\sum_{a=1}^{m} D^{a}_{\kappa} g_a\right)x_\kappa$ と表わされるから次の定理も成立する。

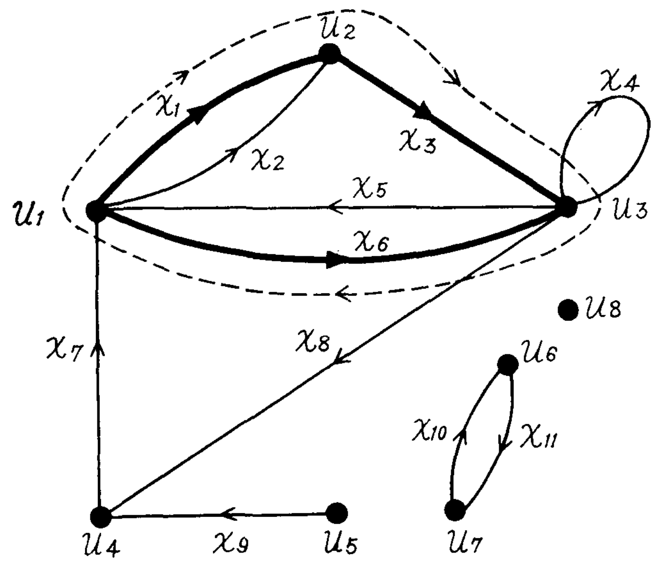
**定理 2.5.** 1次独立なカットセットの数（これをグラフの **rank** ということもある）は $\rho=m-\alpha$ に等しい。

**系.** 1次独立なループの数と1次独立なカットセットの数の和は枝の数に等しい。

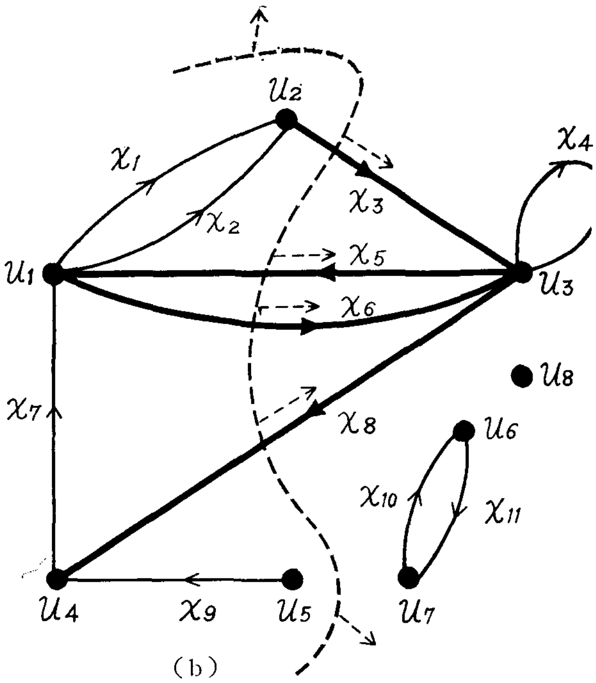
この最後の系は，グラフの枝に関する自由度がループとカットセットに関する自由度に分解されることを示唆している。このことは更に具体的に次節§2.3 で論じられる。

グラフによって表現される問題においてはループとカットセットが何等かの重要な意味をもつ場合が多い。

それ自身がループであるような枝，すなわち $\partial x_\kappa=0$ であるような枝 $x_\kappa$ を**輪** (ring, self-loop)，それ自身がカットセットであるような枝，すなわち $x_\kappa=\partial \boldsymbol{u}$ となるような $\boldsymbol{u}$ が存在する枝 $x_\kappa$ を**橋** (bridge) ということがある。



(a)



(b)

図 3

図1のグラフで，たとえば $\boldsymbol{x}=x_1+x_3-x_6$ は $\partial\boldsymbol{x}=\partial x_1+\partial x_3-\partial x_6=(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)+(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3)=0$ だからループである（図3(a))。$\boldsymbol{x}'=x_3-x_5+x_6-x_8$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_4+\boldsymbol{u}_5$ とおくと $\delta\boldsymbol{u}=\delta\boldsymbol{u}_1+\delta\boldsymbol{u}_2+\delta\boldsymbol{u}_4+\delta\boldsymbol{u}_5=(x_1+x_2-x_5+x_6-x_7)+(-x_1-x_2+x_3)+(x_7-x_8-x_9)+x_9=x_3-x_5+x_6-x_8=\boldsymbol{x}'$ だからカットセットである（図3(b))。また，確かに $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}')=0$ になっている。$x_4$ は輪，$x_9$ は橋である。

### 2.3. 木と補木

ループを含まないような枝の集合 $Y$，すなわち $Y\subset X$ で $\boldsymbol{x}=\sum_{x_\kappa\in Y} g_\kappa x_\kappa$ がループになるのは $g_\kappa$ が皆0のときに限るような $Y$，を**部分木**(ぶぶんき) (subtree) という。部分木の部分集合は明らかに部分木である。部分木 $T$ が極大であるとき，すなわち "$T\subset Y$ なる $Y$ が部分木なら $Y=T$" という性質をもつとき，$T$ を**木**(き) (tree) という。$T$ が木のとき $\overline{T}=X-T$を**補木**(ほぎ) (cotree) という。(subtree のことを tree，tree のことを maximal tree，spanning tree などと呼ぶこともある。cotree に属する枝のことを chord ということがある。)

与えられたグラフの上に実際に一つの木を作るには次のようにすればよい。

(a) 空集合を $T_0$ とする。$T_0$ は部分木である。グラフの $m$ 個の点は $T_0$ の枝——そんな枝はない——によって互いに結ばれるものをひとまとめにすることにすると $m$ 個のグループに分かれる（各グループには1個ずつの点が属する。）

(b) 輪でない任意の枝1本だけからなる集合を $T_1$ とする。$T_1$ は明らかに部分木である。$T_1$ の枝によって2個の点がひとまとめにされるので，$m$ 個の点は $(m-1)$ 個のグループに分かれる。

(c) $i$ 本の枝を含む部分木 $T_i$ があって，$T_i$ の枝によって互いに連結される点をひとまとめにすると $m$ 個の点が $(m-i)$ 個のグループに分かれるとする。

(c$_1$) $\overline{T}_i=X-T_i$ に属する（すなわち $T_i$ に属さない）いかなる枝も同一グループ内の2点を端点とするならば，$T_i\subset Y$ $(T_i\neq Y)$ なる $Y$ は必ずループを含む（$Y-T_i$ のある枝 $x_\kappa$ の両端をつなぐ道が $T_i$ の枝によって作られるので，その道に $x_\kappa$ をつけ加えればループができる)。そこで $T_i$ は一つの木である。このとき $m-i=\alpha$（＝連結成分の数）である。なぜならば，点のグループの数が連結成分の数より小さくなることはありえないし，またもし前者が後者より大きければ一つの連結成分中に2個以上の点のグループがあり，それらのグループ間をつなぐ道に属する枝のどれかは $T_i$ に属さずかつその両端が異なるグループの点であることになり仮定に反する。

(c$_2$) $\overline{T}_i$ に属する枝でその両端が異なるグループの点であるようなものが存在するならば，$T_i$ にその枝をつけ加えたものを $T_{i+1}$ とする。$T_{i+1}$ が部分木であること，$T_{i+1}$ の枝によってつながれる点をひとまとめにすると点が $\{m-(i+1)\}$ 個のグループに分かれること，は明らかである。このときには $i+1$ をあらためて $i$ とみなして（c）の始めに戻る。

上の〝木の作り方〟からして明らかなように……

**定理 2.6.** すべての木は $\rho=m-\alpha$ 本の枝より成る。したがって，すべての補木は $n-\rho=n-m+\alpha$ 本の枝より成る。

**定理 2.7.** 一つの連結成分中のいかなる2点も木の枝によって作られる道で連結される。この場合，一対の点を結ぶ道で木の枝だけから成るものは木を定めれば一意的に定まる。

**証明：** 後半はもし2通りの道があればそこに0でないループが作られることから証明される。

また，容易に示されるように，上の木の定義は次のどの定義とも等価である。

◎木とは〝同一の連結成分中のどの点もそれに属する枝から作られる道によってつながれる〟という性質をもつ枝の部分集合の中で〝極小〟のものである。

◎木とは〝同一連結成分のどの点もそれに属する枝から作られる道によってつながれ〟かつ〝ループを含まない〟ような枝の部分集合である。

木の枝の数は独立なカットセットの数 $(\rho=m-\alpha)$ に等しく，補木の枝の数は独立なループの数

$(n-\rho=n-m+\alpha)$ に等しい（定理 2.4, 2.5, 2.6）が，単に数が等しいだけでなく，もっと積極的に，独立なカットセットやループの組を木と補木を使って次のように実際に書き下すことができる。

今，一つの木とそれに対する補木とを固定しておく。枝 $x_1, \cdots, x_n$ の番号をつけかえて，$T$ に属する $\rho$ 本をあらためて $y_1, \cdots, y_\rho$ と記し，$\overline{T}$ に属する残りの $(n-\rho)$ 本をあらためて $y_{\rho+1}, \cdots, y_n$ と記すことにする。

定理 2.7 により $\overline{T}$ の任意の枝の両端の点は $T$ に属する枝から作られる道(一意的に定まる)によって結ばれる。そこで $\overline{T}$ の一つの枝 $y_{\rho+i}$ $(i=1, \cdots, n-\rho)$ と $T$ の枝何本かで作られる閉路が一意的に定まる。そこで

$$z_i=\sum_{j=1}^{\rho} N_{\rho+i}^{j} y_j+y_{\rho+i}$$

$$(z_i \in M(X, J)\ ;\ \partial z_i=0\ ;\ N_{\rho+i}^{j}=0, 1 \text{ or } -1\ ;\ i=1, \cdots, n-\rho) \tag{2.3.1}$$

という形のループが $T, \overline{T}$ によって一意的に定められる。これらのループの組 $\{z_1, \cdots, z_{n-\rho}\}$ を**木 $T$ と補木 $\overline{T}$ とに関連するループの原始系** (primitive set of loops associated with tree $T$ and cotree $\overline{T}$) とか**基本系** (fundamental set of loops……) とか呼ぶ。$z_1, \cdots, z_{n-\rho}$ が互いに1次独立であることは $y_{\rho+1}, \cdots, y_n$ の含まれ方からして明らかであるが，ループの集合 $Z^1$ に属するすべての要素がこれらの一次結合として表わされることも直接確かめられる。すなわち，任意のループ $x$ を $x=\sum_{i=1}^{n} g_i y_i$ と書き表わすと，$x-\sum_{i=1}^{n-\rho} g_{\rho+i} z_i=\sum_{j=1}^{\rho} h_j y_j$ は木の枝 $y_1, \cdots, y_\rho$ から作られる。$\sum_{j=1}^{\rho} h_j y_j$ もループの差でループであるから，木の定義により $h_j=0$ $(j=1, \cdots, \rho)$. ゆえに $x=\sum_{i=1}^{n-\rho} g_{\rho+i} z_i$. すなわち，

**定理 2.8.** ループの原始系は $Z^1(\subset M(X, J))$ の基底をなす。

$z_i$ を $\{x_\kappa\}$ で表わすとき，すなわち

$$z_i=\sum_{\kappa=1}^{n} R_i^\kappa x_\kappa \qquad (i=1, \cdots, n-\rho) \tag{2.3.2}$$

と書くときの行列 $\left[R_i^\kappa\right]$ を木 $T$ と補木 $\overline{T}$ とに関連する**原始ループ行列** (primitive loop matrix) という。$(y_1, \cdots, y_\rho, y_{\rho+1}, \cdots, y_n)$ は $(x_1, \cdots, x_n)$ の置換だから，(2.3.1) と (2.3.2) とを比べると，行列 $\left[R_i^\kappa\right]$($\kappa$ が列，$i$ が行に対応するとする）は行列(2.3.3)の列を置換したものになっていることがわかる。また，$\partial z_i=\sum_{\kappa=1}^{n} R_i^\kappa \partial x_\kappa=\sum_{a=1}^{m}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} R_i^\kappa D_\kappa^a\right) u_a=0$ だから

$$\sum_{\kappa=1}^{n} R_i^\kappa D_\kappa^a=0 \qquad (a=1, \cdots, m\ ;\ i=1, \cdots, n-\rho)。 \tag{2.3.4}$$

$$n-\rho\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} N^1_{\rho+1} & \cdots & N^{\rho}_{\rho+1}\\ \vdots & & \vdots \\ N^1_n & \cdots & N^\rho_n\end{matrix}}^{\rho} & \overbrace{\begin{matrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{matrix}}^{n-\rho}\end{bmatrix}}_{n}\right. \tag{2.3.3}$$

次にカットセットの作る部分群 $F_1$ の基底を作ることを考えよう。木 $T=\{y_1,\ \cdots,\ y_\rho\}$ の任意の枝を $y_i$ とすると，$y_i$ の属する連結成分の点は $T-y_i$ の枝だけでは全部がお互いにつながれないで2個のグループに分かれる。その2個のグループの中，枝 $y_i$ の始点の属する方のグループの点の集まりを $V_i$ とし，$\boldsymbol{v}_i=\sum_{u_a\in V_i}\boldsymbol{u}_a$ $(\in M(U,\ J))$ とおく。カットセット $\boldsymbol{w}_i=\delta\boldsymbol{v}_i(\in M(X,\ J))$ には $y_i$ が係数1で含まれることは明らかだが $y_i$ 以外の $T$ の枝の係数は皆0であることが木の定義より直ちに知られる。そこで

$$\boldsymbol{w}_i=y_i+\sum_{j=\rho+1}^{n}\tilde{N}_i^j y_j$$

$$(\boldsymbol{w}_i\in M(X,\ J)\,;\ \boldsymbol{w}_i=\delta\boldsymbol{v}_i\,;\ \tilde{N}_i^j=0,\ 1\text{ or }-1\,;\ i=1,\ \cdots,\ \rho) \tag{2.3.5}$$

という形のカットセットが作られる。これは，$T$ と $\overline{T}$ とによって一意的に定められる。これらのカットセットの組 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_\rho\}$ を**木 $T$ と補木 $\overline{T}$ とに関連するカットセットの原始系** (primitive ste of cut-sets associated with tree $T$ and cotree $\overline{T}$) とか**基本系** (fundamental set of cut-sets……) とか呼ぶ。$\boldsymbol{w}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_\rho$ が1次独立であることは $y_1,\ \cdots,\ y_\rho$ の含まれ方からして明らかであり，また1次独立なカットセットの数が $\rho$ である（定理 2.5）からこれ以外に独立なカットセットがないことも明らかである。更に，カットセットの集合 $F_1$ の任意のカットセットが $\{\boldsymbol{w}_i\}$ の1次結合で表わされることも次のようにして示される。任意のカットセット $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}g_iy_i$ $(\in F_1\subset M(X,\ J))$ に対して $\boldsymbol{x}-\sum_{i=1}^{p}g_i\boldsymbol{w}_i=\sum_{i=\rho+1}^{n}h_iy_i$ を作ると，これも一つのカットセットであるから，$\boldsymbol{w}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_\rho$ と1次従属，すなわち

$$f\Big(\sum_{i=\rho+1}^{n}h_iy_i\Big)+f_1\boldsymbol{w}_1+\cdots\cdots+f_\rho\boldsymbol{w}_\rho=0 \tag{2.3.6}$$

となるような(すべては0でない)整数 $f,\ f_1,\ \cdots,\ f_\rho$ が存在する。$y_i(i=1,\ \cdots,\ \rho)$ の係数を比べることによって $f_i=0$ $(i=1,\ \cdots,\ \rho)$ が結論されるので，$f\neq0$ でなければならない。そこ

で $h_i=0$ ($i=\rho+1$, $\cdots$, $n$), すなわち $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} g_i \boldsymbol{w}_i$, すなわち

**定理 2.9.** カットセットの原始系は $F_1$ ($\subset M(X, J)$) の基底をなす。

$\boldsymbol{w}_i$ を $\{\boldsymbol{x}_\kappa\}$ で表わすとき，すなわち

$$\boldsymbol{w}_i=\sum_{\kappa=1}^{n} \boldsymbol{D}_\kappa^i x_\kappa \tag{2.3.7}$$

と書くときの行列 $\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right]$ を木 $T$ と補木 $\overline{T}$ とに関連する**原始カットセット行列** (primitive cut-set matrix) と呼ぶ。ループ行列のときと同様，行列 $\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right]$ ($\kappa$ が列，$i$ が行に対応するとする) は行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\rho} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-\rho} \end{array}\\
\rho\left\{\left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{N}_1^{\rho+1} & \cdots & \tilde{N}_1^{n}\\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{N}_\rho^{\rho+1} & \cdots & \tilde{N}_\rho^{n}
\end{array}\right]\right.\\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}
\end{array}
\tag{2.3.8}$$

の列に置換を施したものになっている。

$$\boldsymbol{w}_i=\delta \boldsymbol{v}_i=\delta \sum_{u_a \in V_i} \boldsymbol{u}_a=\sum_{u_a \in V_i} \delta \boldsymbol{u}_a=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\sum_{u_a \in V_i} \boldsymbol{D}_\kappa^a\right) x_\kappa$$

であるから，これと (2.3.7) とを比較すると

$$\boldsymbol{D}_\kappa^i=\sum_{u_a \in V_i} \boldsymbol{D}_\kappa^a \tag{2.3.9}$$

となることがわかる。また逆に，$\delta \boldsymbol{u}_a=\sum_{\kappa=1}^{n} \boldsymbol{D}_\kappa^a \boldsymbol{x}_\kappa$ もカットセットであるから $\{\boldsymbol{w}_i\}$ の1次結合で表わせる，すなわち

$$\boldsymbol{D}_\kappa^a=\sum_{i=1}^{\rho} \boldsymbol{A}_i^a \boldsymbol{D}_\kappa^i \tag{2.3.10}$$

となるような整数行列 $\left[A_i^a\right]$ が存在する。(2.3.9) と (2.3.4) とから，あるいは $(\boldsymbol{z}_j, \boldsymbol{w}_i)=0$ から，

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \boldsymbol{R}_j^\kappa \boldsymbol{D}_\kappa^i=0 \qquad (\boldsymbol{i}=1, \cdots, \rho;\ \boldsymbol{j}=1, \cdots, \boldsymbol{n}-\rho) \tag{2.3.11}$$

が得られる。一方 (2.3.11) は $\boldsymbol{N}_j^i$ や $\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j$ を用いて表わすと

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ N & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & \tilde{N}^T & \end{array}\right]=0 \qquad (2.3.12)$$

となる。そこで，重要な関係式

$$N=-\tilde{N}^T: \qquad \tilde{N}_i^j=-N_j^i \qquad (i=1,\ \cdots,\ \rho\ ;\ j=\rho+1,\ \cdots,\ n) \qquad (2.3.13)$$

を得る。関係式 (2.3.13) は，木 $T$ の枝 $y_i$ と補木 $\overline{T}$ の枝 $y_j$ とについて，

〝$y_i$ と $\overline{T}$ の枝何本かとでできるカットセットの中に $y_j$ が含まれる（含まれない）ならば，$y_j$ と $T$ の枝何本かとでできるループの中に $y_i$ が含まれる（含まれない）。また含まれるときには符号は反対になる〟

ことを表わしている。この関係だけを直接証明することも勿論可能である。

カットセットの原始系の話からわかるように，補木を木の補集合として定義するのでなく，直接次のようにして定義することも可能である。

◎補木とはカットセットを含まないような枝の極大部分集合である。

原始ループ行列，原始カットセット行列は要素が 0，1，$-1$ であるばかりでなく，そのあらゆる小行列式の値が 0，1，$-1$ のいずれかである，とか，原始ループ行列の $(n-\rho)$ 次の小行列式が 0 にならなこいとと選ばれた列に対応する枝が補木をなすこととは等価で原始カットセット行列の $\rho$ 次の小行列式が 0 にならないことと選ばれた列に対応する枝が木をなすこととは等価である，とかいうような性質が詳しく調べられているが，ここでは立入らない。

図 1 のグラフで，たとえば，$T=\{x_1,\ x_5,\ x_7,\ x_9,\ x_{11}\}$ は木で，その補木は $\overline{T}=\{x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6,\ x_8,\ x_{10}\}$ である。それらに関連するループの原始系 $\{z_1,\ \cdots,\ z_6\}$ は

$$z_i=\sum_{\kappa=1}^{11} R_i^\kappa x_\kappa=y_{i+5}+\sum_{j-1}^{5} N_{i+5}^j y_j \quad \text{とすると，}$$

$[R_i^\kappa]=$

| $i$ \ $\kappa$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

，

$$
\left[N_i^j\right] = \begin{array}{c|ccccc}
{}_i\diagdown^j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
10 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\quad\text{。}
$$

カットセットの原始系 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{w}_5\}$ は $\boldsymbol{w}_i=\sum_{\kappa=1}^{11}\boldsymbol{D}_\kappa^i x_\kappa=y_i+\sum_{j=6}^{11}\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j y_j$ とすると

$$
\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right] = \begin{array}{c|ccccccccccc}
{}_i\diagdown^h & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
\hline
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\quad,
$$

$$
\left[\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j\right] = \begin{array}{c|cccccc}
{}_i\diagdown^j & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\quad\text{。}
$$

$\boldsymbol{N}_i^j$ と $\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j$ とは確かに (2.3.13) を満足している。なお，上で

$$y_1=x_1,\ \ y_2=x_5,\ \ y_3=x_7,\ \ y_4=x_9,\ \ y_5=x_{11};$$

$$y_6=x_2,\ \ y_7=x_3,\ \ y_8=x_4,\ \ y_9=x_6,\ \ y_{10}=x_8,\ \ y_{11}=x_{10}$$

である。

最後に，グラフの枝の開放除去，短絡除去（意味については§2.6，定理 1.10の直後を参照のこと）と本節で定義された諸行列の変化との関係に触れておこう。木の枝 $y_i$ $(i=1,\ \cdots,\ \rho)$ を1本短絡除去することは，$\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right]$，$\left[\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j\right]$ の第 $i$ 行，$\left[\boldsymbol{N}_j^i\right]$ の第 $i$ 列を消し $x_\kappa=y_i$ であるような $\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right]$ および $\left[\boldsymbol{R}_j^\kappa\right]$ の第 $\kappa$ 列を消すことに対応し，補木の枝 $y_j$ $(j=\rho+1,\ \cdots,\ n)$ を1本開放除去することは，$\left[\boldsymbol{R}_j^\kappa\right]$，$\left[\boldsymbol{N}_j^i\right]$の第 $j$ 行，$\left[\tilde{\boldsymbol{N}}_i^j\right]$の第 $j$ 列と，$x_\kappa=y_j$ であるような $\left[\boldsymbol{R}_j^\kappa\right]$ および $\left[\boldsymbol{D}_\kappa^i\right]$ の第 $\kappa$ 列とを消すことに対応する。また，ある木，補木に関連する $\boldsymbol{D}$（あるいは $\boldsymbol{R}$）と他の木，補木に関連するそれとは行演算によって互いに移れることも注意しておこう。

## 2.4. 双　対　性

以上述べて来た事柄のうちで，木と補木，ループとカットセット，という概念だけが関係する部分，すなわち

- ループの全体もカットセットの全体も $M(X, J)$ の部分群をなす。
- ループ $x$ は〝任意のカットセット $x'$ に対して $(x, x')=0$ となるような $M(X, J)$ の要素〟としても特徴づけられる。カットセット $x'$ は〝任意のループ $x$ に対して $(x, x')=0$ となるような $M(X, J)$ の要素〟としても特徴づけられる。
- 木とはループを含まないような枝の極大部分集合である。補木とはカットセットを含まないような枝の極大部分集合である。
- 木と補木とは互いに補集合である。
- 補木の枝1本と木の枝何本かとで作られるループは（一意的に定まりかつその全体は）ループ全体の作る群の基底をなす。木の枝1本と補木の枝何本かとで作られるカットセットは（一意的に定まりかつその全体は）カットセット全体の作る群の基底をなす。

は〝木$\rightleftarrows$補木〟，〝ループ$\rightleftarrows$カットセット〟という入れ換えに関して全く対称になっている。したがって，これらの諸事実から導き出される一つの定理に対して上の入れ換えを行なった結果得られる命題はやはり一つの定理になる。これをグラフの理調における**双対原理**(priniciple of duality) という。実際この双対原理は（代数的）位相幾何学におけるそれの特殊な場合になっている。

## 2.5. 2-isomorphism

今，二つのグラフ $G_1$, $G_2$ があって，その枝の集合 $X_1$, $X_2$ の間に一対一対応があり（点の集合 $U_1$, $U_2$ はどうでもよい），

(i) $G_i$ の任意のループは $X_i$ と $X_j$ の間の対応から定まる自明な対応により $G_j$ のループに対応する $(i \neq j,\ i,\ j=1,\ 2)$

という性質があるとき，$G_1$ と $G_2$ とは互いに **2-isomorphic** であるという。定義から直ちに知られるように，2-isomorphic なグラフの間では

(ii) カットセットはカットセットに対応し，

(iii) 木は木に対応し，

(iv) 補木は補木に対応する。

((i)の代りに(ii)を 2-isomorphism の定義として採用することもできる。)

2-isomorphic なグラフを互いに物理的に等価であるとみなせるような問題が多いので 2-isomorphism の概念は重要である。

グラフ $G$ の一部が残りの部分と唯一つの点 $u_a$ で結ばれているとき，すなわち枝の集合 $X$ を $X_1$ と $X_2$ に二分し $(X_1 \cup X_2 = X,\ X_1 \cap X_2 = \phi)$, $U_1 = \partial^+ X_1 \cup \partial^- X_1$, $U_2 = \partial^+ X_2 \cup \partial^- X_2$ とおくと $U_1 \cap U_2 = u_a$ となるとき，点 $u_a$ を **articulation point** という。（輪の点，橋の両端の

点は常に articulation point である。)

グラフの一部が残りの部分と唯二つの点 $u_a$, $u_b$ で結ばれているとき，すなわち（上と同じ記号で）$U_1 \cap U_2 = \{u_a, u_b\}$ となるとき，$X_i$ を枝の集合，$U_i$ を点の集合としてもつ部分グラフを**2端子部分グラフ** (2-terminal subgraph) という。1本の枝とその両端点，あるいはいくつかの連結成分から唯1本の枝を除いた残りの部分は，常に2端子部分グラフであるが，これらは trivial だから以下ではこれら以外のものを問題にすることとする。

連結でかつ articulation point をもたないグラフを**非可分** (non-separable) であるといい，非可分でないことを**可分** (separable) という。グラフの一つの連結成分に属する枝の集合は articulation points を境としていくつかの部分に分かれる。その各部分を**非可分成分** (non-separable component) と呼ぶ。（非可分成分の数が1であるグラフが非可分，2以上のグラフが可分。）非可分成分の数は 2-isomorphism に関して不変だが連結成分の数はそうでないことは注意すべきである。

容易に検証できるように，グラフが可分であるための必要十分条件は，任意の木，補木に関連する原始ループ行列（あるいは原始カットセット行列——どちらでも同じこと）が適当な行の置換および列の置換によって下のような形に変形できることである。

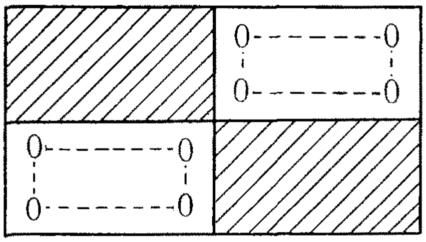


図1のグラフでは，$u_3$ と $u_4$ とが articulation point；たとえば $\{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ は残りの部分と点 $u_1$, $u_3$ でだけ結ばれているから2端子部分グラフを作る；非可分成分は $\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $\{x_4\}$, $\{x_9\}$, $\{x_{10}, x_{11}\}$ の4個（したがってグラフは可分)。

なお，あるグラフに下の変換(a)～(d)のいくつかを施して得られるグラフはもとのグラフに 2-isomorphic であることはほとんど自明だが，逆に〝2個のグラフが互いに 2-isomorphic であるときには下の変換(a)～(d)を適当に施すことにより必ず一方から他方に移れる〟という定理が H. Whitney により証明されている（証明は初等的だが長いので省略する）。

(a) ある非可分成分中の枝の向きを全部逆にする。（枝 $x_\kappa$ の向きを逆にするとは $\partial^+ x_\kappa$ と $\partial^- x_\kappa$ とを入れ換えること。）

(b) （trivial でない）2端子部分グラフを残りの部分から切り離し，向きを逆にして再びくっつけ，その部分グラフ内の枝の向きをすべて逆にする。

(c) 二つの連結成分を（それぞれから任意に1点ずつ選んでそれら2点を1点にまとめるというやり方で）1点でくっつけて連結成分の数を減らす。（その点は articulation point になる。）

(d) articulation point で非可分成分を切り離して連結部分の数を増す。((c)の逆の操作。)

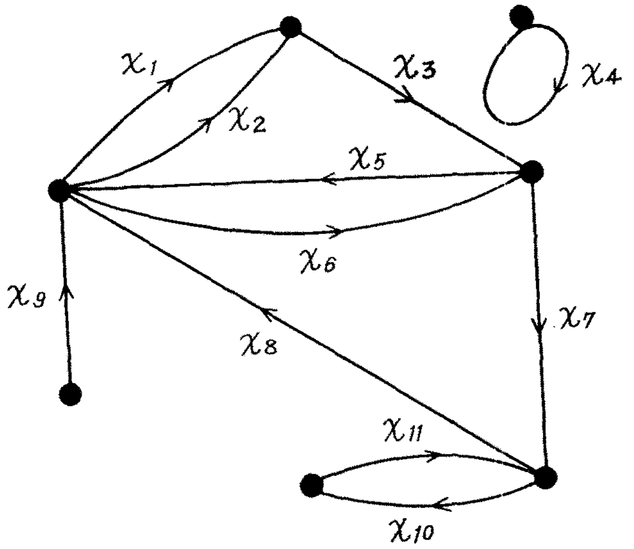
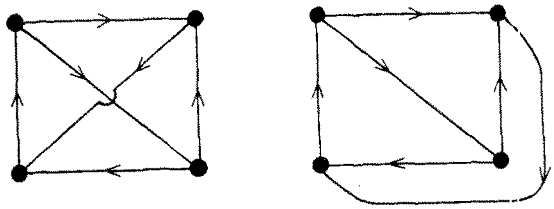



図 4

たとえば，図4のグラフは図1のグラフと 2-isomorphic である。(非可分成分 $\{x_4\}$ を切り離し，$\{x_{10}, x_{11}\}$ をくっつけ，$\{x_9\}$ のついている場所をかえ，2端子部分グラフ $\{x_7, x_8\}$ の向きを逆にしたものになっている。

### 2.6. 平面グラフと双対グラフ

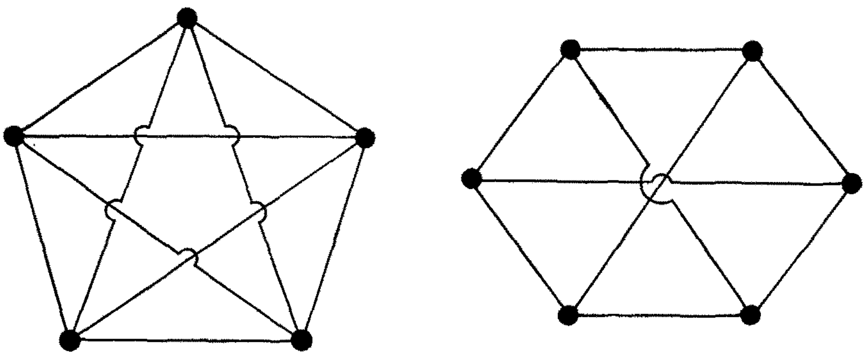
図1のグラフのように，平面上に枝が交叉しないように描くことのできるようなグラフを**平面グラフ** (planar graph) という。(図5(a)のように枝が交叉して描かれているグラフも図5(b)のように交叉のないように描き直せるものは平面グラフである。)グラフの平面性に関しては C. Kuratowski による有名な次の定理がある(証明略)。



(a)　　(b)

図 5

**定理 2.10.** グラフが平面グラフであるための必要十分条件は，枝の開放除去，短絡除去の操作によって図6のグラフのどちらももとのグラフから生じないことである。



(a)　　(b)

図 6

上の定理で，枝 $x_\kappa$ の〝開放除去〟とは $X$ から $x_\kappa$ をとり除くこと(この際弧立点ができれ

ばそれも $U$ からとり除く），〝短絡除去〟とは $\partial^+ x_\kappa$ と $\partial^- x_\kappa$ との2点を同一点とみなした後 $x_\kappa$ を $X$ から除くこと，である。

上の定理は一見美しいが，複雑なグラフが平面的かどうかを実際に判定するための有効な算法は与えてくれない。

勿論，図6の2個のグラフはそれ自身典型的な非平面グラフである。

平面グラフ $G$ を平面上に枝の交叉なしに描けばその枝によって全平面は $m^*=n-m+\alpha+1$ $(=n-\rho+1)$ 個の領域に分割される（はじめ1つながりの平面に枝を順に一本ずつふやして行って領域の数とグラフの連結成分の数と点の数とがどう変化して行くかを調べればこのことは容易にわかる)。各領域中に1個ずつ新しい点をとりそれらを $u_a^*$ $(a=1, \cdots, m^*)$ と記す。$G$ の枝 $x_\kappa$ が $u_a^*$ に対応する領域と $u_b^*$ に対応する領域との境になっていて $x_\kappa$ の向きに向いたとき $u_a^*$ に対応する領域が $x_\kappa$ の左側に $u_b^*$ に対応する領域が右側にあるとき，点 $u_a^*$ を出て点 $u_b^*$ に入る新しい枝 $x_\kappa^*$ を作る。点の集合 $U^*=\{u_1^*, \cdots, u_{m^*}^*\}$，枝の集合 $X^*=\{x_1^*, \cdots\cdots, x_n^*\}$ より構成されるグラフ $G^*$ を考えよう。グラフ $G$ の枝の集合 $X$ と $G^*$ の枝の集合 $X^*$ との間には $X^*$ の作り方からして自然に一対一対応がある。

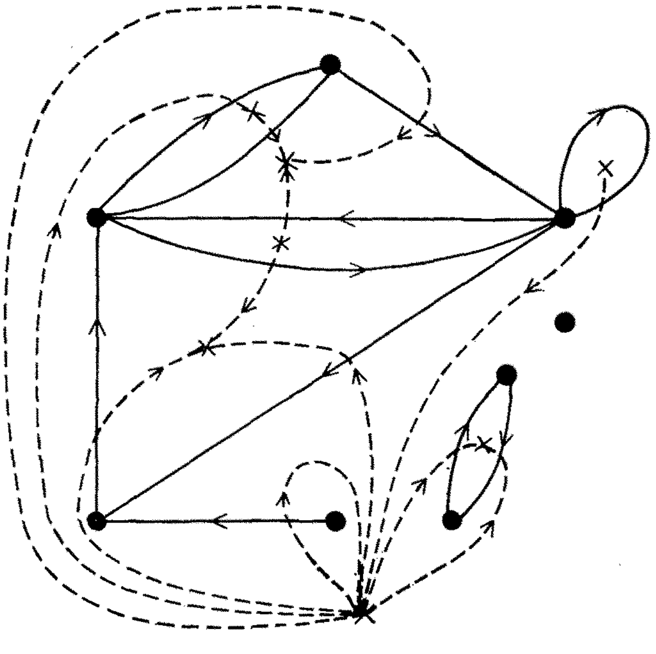


図 7

図1のグラフを $G$ としたときの $G^*$ を図7に $G$ と重ねて示す。$G$ の点を●，$G^*$ の点を ×，$G$ の枝を →—，$G^*$ の枝を…→とそれぞれ表わしてある。(簡単のため，点番号，枝番号は記入してない。互いに交叉している枝 →—と枝…→とが対応する枝の対である。)

$G$ に対する $G^*$ の作り方からして明らかなように，$G$ におけるループは $G^*$ におけるカットセットに，$G$ のカットセットは $G^*$ のループに対応する。したがって $G$ の木と補木は $G^*$ の補木と木にそれぞれ対応する。

一般に，二つのグラフ $G$, $G^*$ があって，それらの枝の集合 $X$, $X^*$ の間に一対一対応があり，その対応によって $G$ のループが $G^*$ のカットセットに対応し $G$ のカットセットが $G^*$ の

ループに対応するとき，$G^*$ は $G$ の**双対グラフ** (dual graph) であるという。§2.2 に述べたループとカットセットとの性質により，$G^*$ が $G$ の双対グラフなら $G$ は $G^*$ の双対グラフである。また，§2.3 の木と補木の定義から明らかなように，互いに双対なグラフの間では木と補木とが入れ換わる。また，双対グラフと 2-isomorphism の定義から直ちに知られるように，グラフ $G$ の双対グラフは一般には一つとは限らず，$G^*$ が $G$ の双対グラフなら $G^*$ に 2-isomorphic なグラフは皆 $G$ の双対グラフである（逆も真）。

平面グラフの双対グラフが存在することは上に示したが，更に，〝グラフ $G$ に双対グラフが存在するための必要十分条件は $G$ が平面グラフであることである〟ということも知られている。

### 2.7. その他

前節までは主として位相幾何学的な観点よりグラフを見て来たが，グラフに関して屡々語られる概念や定理にはそれら以外にも，どちらかというと初等的直観的な，標語的にいえば〝一筆書き的〟な，ものが数多くある。それらの中で比較的重要と思われるものについて以下で極く大ざっぱに触れてみよう。

**2.1.7. 完全グラフ (complete graph)**：——**完全接続のグラフ**ともいう。どの2点をとってもそれらを両端点とする枝が存在するようなグラフのこと（輪がなく，かつ同一の点対を両端点とする枝が2本以上ないようなものに制限することもある)。図6（a）は5点完全グラフである。完全グラフ（制限された意味での）は連結でかつ非可分である。

**2.7.2. 道 (path) と閉路(circuit)**：——枝の組 $\{x_{\kappa 1}, \cdots, x_{\kappa l}\}$ と符号(+1 あるいは−1)の組 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ とがあって $\partial^{-\varepsilon_i} x_{\kappa_i} = \partial^{\varepsilon_{i+1}} x_{\kappa_{i+1}}$ $(i=1, \cdots l;\ \partial^{+1} \equiv \partial^{+}, \partial^{-1} \equiv \partial^{-})$ となるとき $\{x_{\kappa_1}, \cdots, x_{\kappa l}\}$ を〝$\partial^{\varepsilon_1} x_{\kappa 1}$ から $\partial^{-\varepsilon_l} x_{\kappa l}$ への長さ $l$ の道〟といい，特に $\partial^{\varepsilon_1} x_{\kappa 1} = \partial^{-\varepsilon_l} x_{\kappa l}$ のとき〝閉路〟という。$\varepsilon_i = 1$ $(-1)$ のとき枝 $x_{\kappa l}$ はその道あるいは閉路に〝順方向(逆方向)に含まれる〟という。$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_l = 1$ なる道（閉路）を特に〝狭義の道（閉路）〟と呼ぶ。長さ1の閉路は輪である。道（閉路）がそれより長さの短かい閉路を含まないとき（すなわち同じ点を2度以上通らないとき）〝単純 (elementary, irreducible)〟であるという。

**2.7.3. 強連結グラフ (strongly connected graph)**：——任意の一点から任意の他の点へ必ず狭義の道が存在するようなグラフのことをいう。強連結グラフは連結である（が逆は必ずしもいえない)。2個以上の点のある強連結グラフでは任意の点を通る狭義の閉路が存在する。

**2.7.4. グラフの点の類別と類の間の半順序関係**：——§2.1 では2点 $u_a$, $u_b$ の間に道が存在するとき $u_a \sim u_b$ と書いた。それより強い意味で，$u_a$ から $u_b$ へも，$u_b$ から $u_a$ へも狭義の道が存在するとき $u_a \approx u_b$ と書く。また $u_a \approx u_a$ と定義する。関係≈が同値関係であることは明らかであるから，≈に関して点の集合 $U$ は類別される。各類を $W_\omega$ $(\omega=1, 2, \cdots, \sigma)$ と記す $(W_\omega \cap W_\chi = \phi (\omega \neq \chi)$, $U = \bigcup_{\omega=1}^{\sigma} W_\omega)$。明らかに類別 $\{W_\omega\}$ は連結成分への類別 $\{U_i\}$ の細分である，すなわち一つの $U_i$ はいくつかの $W_\omega$ の和集合である。容易に示されるように，二つ

の類 $W_\omega$ と $W_\chi$ とについて，もし $W_\omega$ の一点から $W_\chi$ の一点へ狭義の道が存在すれば，$W_\omega$ の任意の点から $W_\chi$ の任意の点への狭義の道が存在する。このとき $W_\omega \succ W_\chi$ と書くことにすれば，関係$\succ$は半順序関係であること，すなわち

(i) $W_\omega \succ W_\omega$,

(ii) $W_\omega \succ W_\chi$, $W_\chi \succ W_\omega$ なら $W_\omega = W_\chi$,

(iii) $W_\omega \succ W_\chi$, $W_\chi \succ W_\tau$ なら $W_\omega \succ W_\tau$

であること，は明らかである。

グラフの点をこのように整理してみることは，状態間の遷移関係，個体の間の関係で可遷なもの，などのグラフによる表現を整理し，見やすくするのに役立つ。

**2.7.5. chromatic number と chromatic class**：――グラフの枝 $x_\kappa$ と $x_\lambda$ ($x_\kappa \neq x_\lambda$) とが〝隣接している (adjacent)〟というのは $x_\kappa$ の端点のどちらかが $x_\lambda$ の端点のどちらかと一致していること；グラフの点 $u_a$ と $u_b$ ($u_a \neq u_b$) とが〝隣接している〟というのは $u_a$, $u_b$ を両端点とする枝が存在すること。

グラフの点を色分けする問題で，隣接する点が異なる色で塗られるようにグラフの点を塗り分けるために $p$ 種の色が必要にして十分なとき，$p$ をそのグラフの chromatic number といい $\gamma(G)$ と記す。また，グラフの枝を色分けする問題で，隣接する枝が異なる色で塗られるようにするために $q$ 種の色が必要にして十分なとき，$q$ をそのグラフの chromatic class という。

chromatic number が2であるための必要十分条件は長さが奇数の閉路が存在しないこと，という König の定理はほとんど自明であろう。

**2.7.6. internal stability と external stability**：――グラフ $G$ の点の集合 $U$ の部分集合 $V$ が "internally stable" であるとは $V$ のいかなる2点も隣接していないこと。internally stable な集合 $V$ の中で最も要素の多いものの要素の数を "coefficient of internal stability" といい $\alpha(G)$ と書く。グラフ $G$ の点の色分けの問題で，隣接点を異なる色で塗るのに $\gamma(G)$種の色で済むなら，同一色で塗られている点の集合は明らかに internally stable だから各集合の点の数は $\leqq \alpha(G)$。ゆえに，$\gamma(G)\cdot\alpha(G) \geqq m$(＝点の総数)。

グラフの点の集合 $U$ の部分集合 $V$ が "externally stable" であるとは，$U = \Gamma V \cup V$であること ($\Gamma V$ は $V$ の点を始点とする枝の終点の集合)。externally stable な集合 $V$ の中で最も要素の数の少ないものの要素の数を "coefficient of external stability" といい $\beta(G)$ と記す。

**2.7.7. 核 (kernel)**：――internally stable でかつ externally stable な点の集合を〝核〟という。核のないグラフもあるし，2個以上あるものもある。グラフ $G$ に核 $V$ が存在するとき，それに含まれる点の数 ($|V|$ と記そう) は $\alpha(G) \geqq |V| \geqq \beta(G)$ となることは明らか。

**2.7.8. matching**：――一般のグラフについても定義できるがここでは bi-partite graph

についてのみ記す。

点の集合 $U$ が $U^+$ と $U^-$ とに分かれ $(U^+\cup U^-=U,\ U^+\cap U^-=\phi)$, 任意の枝 $x_\kappa$ $(\epsilon X)$ に対して $\partial^+x_\kappa\epsilon U^+, \partial^-x_\kappa\epsilon U^-$ となるようなグラフ $G$ を "bi-partite graph" という。"matching"とは bi-partite graph $G$ の枝の集合 $X$ の部分集合 $Y$ で, それに含まれる枝が互いに隣接しないようなものをいう。matching $Y$ は $\partial^+Y$ ($Y$に属する枝の始点の集合)と $\partial^-Y$ ($Y$に属する枝の終点の集合) との間に一対一対応を与える。そこで, $Y$ を〝$\partial^+Y$ から $\partial^-Y$ の上への matching〟ともいう。「$U^+$ の部分集合 $V^+$ から $U^-$ の部分集合 $V^-$ の上への matching が存在するための必要十分条件は $V^+$ の任意の部分集合 $W^+$ に対して $\Gamma W^+$ の点の数が $W^+$ の点の数より少なくないこと」という重要な定理がある。この定理は単独に証明するよりはネットワークフローの理論における〝最大流量最小切断の定理 (maximum-flow minimum-cut theorem)〟の特別な場合として理解する方が早道なのでここでは証明を省略する。

**2.7.9 点の位数 (degree)** :——点 $u_a$ の〝位数〟とは $\partial^+u_a$ に含まれる枝の数と $\partial^-u_a$ に含まれる枝の数の和のこと。

**2.7.10. その他 :——**

〝(狭義の) ハミルトン路 (Hamiltonian path)〟とはグラフの全点を唯一度ずつ通る (狭義) の道のこと。〝(狭義の) ハミルトン閉路 (Hamiltonian circuit ; ハミルトン線ともいう)〟とは始点と終点とが同一の (狭義の) ハミルトン路のこと。

〝オイラー路 (Eulerian path)〟あるいは〝オイラー閉路 (Eulerian circuit)〟とはグラフの全枝を唯一度ずつ通る道あるいは閉路のこと。「オイラー路 (あるいはオイラー閉路) が存在するための必要十分条件はグラフが連結で, かつ位数が奇数である点の数が 2 (あるいは 0) であること」という定理は**一筆書きの定理**として有名である。「狭義の道 (閉路) としてのオイラー路 (オイラー閉路) の存在のための必要十分条件はグラフが連結で, かつある 2 点 $u_{a_0}$, $u_{b_0}$ を除いた他の任意の点 $u_a$ では $|\partial^+u_a|=|\partial^-u_a|$, また $|\partial^+u_{a_0}|=|\partial^-u_{a_0}|+1$, $|\partial^+u_{b_0}|=|\partial^-u_{b_0}|-1$ (すべての点で $|\partial^+u_a|=|\partial^-u_a|$) であること」ということもいえる。(ここで $|V|$ は $V$ に属する要素の数を表わす。)

グラフの 2 点 $u_a$, $u_b$ 間の〝(広義の) 距離〟を $u_a$ から $u_b$ への (狭義の) 道の中で長さが最小のものの長さとして定義し, $d(u_a, u_b)$ と書くことがある。$d(u_a, u_a)=0$ とし, $u_a$ から $u_b$ への道がないときには $d(u_a, u_b)=\infty$ と定義するのが普通である。$d(u_a, u_b)$ は距離としての性質のうち $d(u_a, u_b)\geqq 0$, $d(u_a, u_b)=0 \Longleftrightarrow u_a=u_b$, $d(u_a, u_c)\leqq d(u_a, u_b)+d(u_b, u_c)$ は満足するが, 広義の距離は $d(u_a, u_b)=d(u_b, u_c)$ を一般には満足しない。$r=\min_{u_a\epsilon U}\{\max_{u_b\epsilon U} d(u_a, u_b)\}$ をグラフの〝半径 (radius)〟といい右辺の min を与えるような $u_a$ をグラフの〝中心 (center)〟ということがある。勿論, この定義では中心は一点とは限らない。また非連結グラフでは $r=\infty$ となり中心がない。逆に連結グラフ (広義の距離については強連

結グラフ）には中心がある。$\delta=\max_{u_a,\ u_b\in U} d(u_a,\ u_b)$ をグラフを〝直径 (diameter)〟という（半径の倍とは限らない）。

### 3. グラフの理論の応用について

現在グラフの理論はいろいろな分野における問題の表現の手段として，解法の技術として，またその他いろいろなレベルで利用されている。そのすべてを数え尽すことは到底不可能であるが，グラフの理論が相当本質的な形で利用されている分野を手あたり次第にひろってみても，

電気回路理論，ネットワークフローの理論（ＯＲにおける輸送問題，工程計画，日程計画の理論などを含む），オートマトンの理論（言語構造の理論も含む），ゲームの理論，マルコフ過程論，社会心理学，通信理論における符号化の理論，

等々際限がない。どの分野一つをとっても，その解説には多分本稿と同じ位の紙幅を必要とするであろうので，それらについては二三の参考文献を挙げるだけにしてまた別の機会を待つことにしたい。

「まえがき」に挙げた König と Berge の本にも（特に後者には）いろいろな応用例が含まれてはいる。しかし，ある分野への応用ということを主眼にした単行本としては，電気回路，スイッチ回路，オートマトン，通信回路などの分野では

S. Seshu and M. B. Reed, Linear Graphs and Electrical Networks. Adison-Wesley, Reading-London, 1961;

W. H. Kim and R. T. Chien, Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks. Columbia University Press, New York-London, 1962

などを，ネットワークフローの理論の分野では

L. R. Ford, Jr., and D. R. Fulkerson, Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton, 1962;

C. Berge et A. Ghouila-Houri, Programmes, Jeux et Résaux de Transport. Dunod, Paris, 1962（の後半）

を挙げることができよう。また，グラフの理論というよりはもっと一般的な代数的位相幾何学の見地から諸種の回路問題の理論的基礎づけや応用を試みようという我国の研究者達の論文が数多く含まれている論文集

近藤一夫編, RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by means of Geometry, Vol. I (1955), Vol. II (1958), Vol. III (1962). 学術文献普及会（東工大内）。（の Divisions A, F, G の諸論文）

の名も挙げておかねばなるまい。