探索努力の配分に関する考察（II）

多　田　和　夫*

ま　え　が　き

経営科学第7巻第2号において，探索努力の最適配分が Bayes の事後確率から計算された限界効用の平滑化によって達成されるという事実を，目標物発見の確率が negative exponential law に従う場合について述べた。つまり特定の箱に関する探索の進行にも拘らず目標物が発見できない場合われわれは

こんなに探しても目標物が見つからないのはおかしい!!

目標物は他の箱にあるのではないか？

他の箱を探すべきではなかろうか？

という微妙な心理的動揺に促されて他の箱の探索に移るのであるが，この〝賢明な〟移行がおのずから adaptive search process となっていてとりもなおさず限界効用の平滑化と探索努力の最適配分に通じるということであった。

本論文では目標物発見の確率が必ずしも negative exponential law に従わないより一般的な場合について同様の事実が成立することを述べ，それを基礎にして興味ある1～2の結果を導く。

§1　問題とその意味

箱1，2……，n のいずれかに目標物が存在し，その先験的な存在確率 P_i $(\sum_{i=1}^{n}P_i=1)$ が知られている。又探索努力 t の関数として，目標物がその箱にあるとの条件の下での発見確率 $g_i(t)$ も知られている。ただし

$$\left.\begin{array}{l} g_i(t)：t\text{に関する単調増加関数} \\ \qquad g_i(0)=0,\quad g_i(\infty)=1 \\ g_i'(t)：t\text{に関する連続かつ単調減少関数} \\ \qquad g_i'(0)>0,\quad g_i'(\infty)=0 \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(1)$$

とする。探索努力の総量 T が制限されている場合綜合的な発見確率を最大にするためには箱ごとに配分すべき努力量をどう決めればよいか。数学的には

$$\text{条件：}\quad \sum_{i=1}^{n}t_i=T,\qquad t_i\geq 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

* 日本ビジネス・コンサルタント　1964年12月28日受理　「経営科学」第8巻第4号

の下で，

$$\text{目的関数：}\quad \sum_{i=1}^{n} P_i\, g_i\ (t_i)$$

を最大にするような t_i の組 $\{\tau_i\}$ を求める問題である。

この問題において式(1)によって示された仮定は極めて自然であって現実問題を処理する場合の束縛となることは殆んどないと考えられる。又 $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$ という条件は綜合的な発見確率を最大にするという立場のみから考えれば必要ではないが＜探索打切りの事態＞を差し当っての考慮の対象から外すためにつけ加えたにすぎない。次に X を n 次元ベクトルとして P_i，$g_j(t_i)$ の代りに $P(X)\triangle X$，$g(X,\ t(X))$ とおきかえれば，点 X と努力 $t(X)$ の両者に依存して発見確率が変化する場合の連続的な努力配分問題に変形されるこというまでもなかろう。

§2　解の性質

一般性を失うことなく

$$P_1\, g_1'(0)\geq P_2\, g_2'(0)\geq \cdots\cdots\cdots \geq P_n\, g_n'(0) \qquad \cdots\cdots(3)$$

と考えてよい。

【2.1】いまかりに

$$P\ (T)=\sum_{i=1}^{n} P_i\, g_i(\tau_i) \qquad \cdots\cdots(4)$$

が最大であるとする。このとき $\tau_i>0$ であるような箱の組を S とすれば

$$\left.\begin{aligned} &P_i\, g_i'(\tau_i)=\lambda,\ i\in S \\ &P_i\, g_i'(\tau_i)\leq\lambda,\ i\notin S \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

が成立つ。

〔証明〕$i,\ j\in S,\ \ |\varepsilon|\ll 1$ として次の配分：

$$\{\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots\cdots,\ (\tau_i+\varepsilon),\ \cdots\cdots,\ (\tau_j-\varepsilon),\ \cdots\cdots,\ \tau_n\}$$

に応じる綜合的な発見確率を $P^*(T)$ とする。

$$P^*(T)-P\,(T)=\varepsilon\{P_i\, g_i'(\tau_i)-P_j\, g_j'(\tau_j)\}\leq 0$$

が ε の正負に拘らず成立するためには式(5)の前半が成立しなければならない。次に $i\in S,\ k\notin S$ として

$$P_k\, g_k'(0)>\lambda=P_i\, g_i'(\tau_i)$$

と仮定し，ε を小なる正数として次の配分：

$$\{\tau_1,\ \tau_2\cdots\cdots,\ (\tau_i-\varepsilon),\ \cdots\cdots,\ (\tau_k+\varepsilon),\ \cdots\cdots,\ \tau_n\},\ \tau_k=0$$

に応じる綜合的な発見確率を $\tilde{P}(T)$ とする。仮定によると

$$\tilde{P}\,(T)-P\,(T)=\varepsilon\,\{P_k\, g_k'(0)-P_i\, g_i'(\tau_i)\}>0$$

でなければならないがこれは $P(T)$ の最大性に反するから式(5)の後半が成立しなければならない。式(5)から明かなように

$$\left.\begin{array}{ll} P_i > \lambda/g_i'(0), & i \in S \\ P_i \leq \lambda/g_i'(0), & i \notin S \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

が成り立っている。そこで λ が決まれば S は一意的に決まることとなる。ただしその逆はいえない。

【2. 2】 λ および S の性質。

$g_i'(t_i)$ の単調減少連続性から逆関数の存在がいえる。いまそれを

$$t_i = f_i(g_i'),\ i = 1.2,\ \cdots\cdots,\ n$$

とすると $f_i(g_i')$ は g_i' に関して単調減少で $(0,\ g_i'(0))$ で定義され，$f_i(0)=\infty$，$f_i(g_i'(0))=0$ である。そこで

$$P_1 g_1'(0) \geq \lambda \geq 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

であるような λ について $\phi(\lambda) \equiv \sum_{i \in S} f_i(\lambda/P_i)$ を定義すれば $\phi(\lambda)$ は λ の単調減少関数で値域が $(0,\ \infty)$ である。従って T が与えられたとき $\phi(\lambda)=T$ を満足する λ（従って S）が T の関数として一意に決まり

$$\left.\begin{array}{ll} T < T' \text{ ならば} & \lambda(T) > \lambda(T') \\ & S(T) \subseteq S(T') \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

が成り立つこととなる。この $\lambda(T)$ は式(8)に示される単調減少性のほか T に関する連続性を持つ。それは探索努力の増分 $\triangle T$ の箱 i $(\in S)$ に対する分け前を $\triangle \tau_i$ $(<\triangle T)$ とすると

$$|\lambda(T \pm \triangle T) - \lambda(T)| = P_i\,|g_i'(\tau_i \pm \triangle \tau_i) - g_i'(\tau_i)|$$

が成り立つことおよび g_i' の連続性から明かであろう。

次に $S_k = \{1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ k\}$，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ n$ とする。S_k を固定したとき

$$P(T) = \sum_{i \in S_k} P_i\, g_i(\tau_i)$$

が成立する最大の T がある。それを T_k と書くと，

$$\left.\begin{array}{l} P_1 g_1'(\tau_1) = \cdots = P_k g_k'(\tau_k) = P_{k+1} g'_{k+1}(0) \geq \cdots \geq P_n g_n'(0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ただし} \quad \sum_{i \in S_k} \tau_i = T_k \\ T_1 \leq T_2 \leq \cdots\cdots\cdots \leq T_{n-1} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

が成立っている。つまり探索努力の増加につれて限界効用の平滑化が進むというわけである。

(2. 3) $P(T)$ の性質。$P(T)$ は T に関して連続かつ微分可能である。先ず右えの連続性をいう。$T_{k-1} < T < T_k$ の場合探索努力の増分 $\triangle T$ の箱 i $(\in S_k)$ えの分け前を $\triangle \tau_i$ とすると式(5)より

$$\begin{aligned} P(T+\triangle T) - P(T) &= \sum_{i \in S_k} P_i g_i'(\tau_i)\ \triangle \tau_i \\ &= \lambda(T) \cdot \sum_{i \in S_k} \triangle \tau_i = \lambda(T) \cdot \triangle T \end{aligned}$$

又 $T=T_k$ の場合探索努力の増分 $\triangle T$ の箱 i $(\in S_k)$ えの分け前を $\triangle \tau_i$，箱 $(k+1)$ えの分け前を $\triangle \tau_{k+1}$ とすると式(9)より

$$P(T+\triangle T) - P(T) = P_{k+1} g'_{k+1}(0)\ \triangle \tau_{k+1} + \sum_{i \in S_k} P_i\, g_i'(\tau_i)\ \triangle \tau_i$$

$$=\lambda(T)\ \sum_{i\epsilon S_{k+1}} \triangle\tau_i=\lambda(T)\cdot\triangle T$$

を得るから明かである。左えの連続性および微分可能性についてもほぼ同様にして証明することができる。これより

$$dP(T)/dT=\lambda(T) \qquad \cdots\cdots(10)$$

がいえる。この式の物理的意味は次のとおりである。すなわち n 個の箱の探索を，目標物の存在確率が 1 で発見確率が探索努力 T によって変化するような 1 つの箱の探索と見做した場合，その等価的な限界効用を $\lambda(T)$ と考えてよいということである。式(10)より綜合的な発見確率の別な表現として

$$P(T)=\int_0^T \lambda(T)\ dT \qquad \cdots\cdots(11)$$

が得られることは明かであろう。

§ 3　ベイズの確率を中心とした探索努力配分問題の考察

これまでの結果は探索努力の総量 T が与えられたとき，それを箱ごとにどのように配分しようかといういわば探索計画的な立場で得られたものであった。今度は観点を変えて過去の最適な探索努力にも拘らず目標物が発見できない事態を想定して，以後の探索努力をアダプティブに配分してゆこうという立場から本問題を考えることにしたい。従って T 自身に対する解釈も従来は事前に与えられた量とされていたのに反して，本節では過去の最適な探索において空費された努力量とされるのである。

【3. 1】記号の説明

$P_i\ (\tau_i)$　：探索努力 T の最適な分け前 τ_i を受けたにも拘らず目標物が発見できなかった場合の箱 i に関する目標物の事後的な存在確率

$h_i(t)\ \equiv 1-g_i(t)$

$Q(T)\ \equiv 1-P(T)$

$\Gamma(T)\ \equiv -Q'(T)/Q(T)=\lambda(T)/Q(T)$

$\gamma_i\ (t)$　：箱 i に関する瞬間発見確率量

瞬間発見確率量 $\gamma_i(t)$ については多少の説明を要する。前述の $g_i(t)$ が与えられている場合

$$\gamma_i\ (t)\equiv -h_i'(t)/h_i(t)=g'_i(t)/h_i(t) \qquad \cdots\cdots(12)$$

と定義することによって $g_i(t)$ を別な表現：

$$g_i(t)=1-\exp\left[-\int_0^t \gamma_i(\xi)d\xi\right] \qquad \cdots\cdots(13)$$

で表わすことができる。探索理論ではこの $\gamma_i(t)$ のことを瞬間発見確率量とよぶ。$(t,\ t+\triangle t)$ の範囲では $\triangle t$ の探索努力にもとずく発見確率が $\gamma_i(t)\triangle t$ で与えられるところからその名がある。

【3. 2】アダプティブな努力配分

式(5), (12)より

$$\left.\begin{array}{l} P_i \cdot h_i(\tau_i)\ \gamma_i(\tau_i) = \lambda(T),\ i\in S \\ P_i \cdot h_i(\tau_i)\ \gamma_i(\tau_i) \leq \lambda(T),\ i\notin S \end{array}\right\}$$

を得る。これらの両辺を $Q(T)$ で除して

$$P_i\ (\tau_i) = P_i \cdot h_i\ (\tau_i)/Q(T) \qquad \cdots\cdots(14)$$

なることに留意すれば式(5)に類似の表現として

$$\left.\begin{array}{l} P_i\ (\tau_i)\cdot\gamma_i(\tau_i) = \Gamma(T),\ i\in S \\ P_i\ (\tau_i)\cdot\gamma_i(\tau_i) \leq \Gamma(T),\ i\notin S \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(15)$$

を得る。$\Gamma(T)$ はその定義 (3. 1) から明かなように n 個の箱を一つの箱と見做した場合の等価的な瞬間発見確率量であって，その連続性は $\lambda(T)$ および $Q(T)$ の連続性から明かである。又式(15)および $P_i\ (\tau_i)$ の性質より $T_{k-1}<T\leq T_k$ であるような T について

$$\begin{array}{l} P_1(\tau_1)\ \gamma_1(\tau_1) = \cdots = P_k(\tau_k)\ \gamma_k(\tau_k) \geq P_{k+1}(\tau_{k+1})\gamma_{k+1}(\tau_{k+1}) \geq \cdots \\ \quad \cdots\cdots \geq P_n(\tau_n)\ \gamma_n\ (\tau_n) \end{array} \qquad \cdots\cdots(16)$$

ただし $\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \cdots\cdots = \tau_n = 0$

が成り立ち，T が増大するにつれて上式の等号が次第に右方に移ることがいえる。これはベイズの確率をもとにした限界効用の均等化を意味している。

アダプティブな探索においてはベイズの事後確率と瞬間発見確率量を念頭において，両者の積が均等化されるよう努力を配分しなければならないが，それは次の分配手順によって達成することができる。

〔i〕 $T<T_1$ の場合は箱1だけを探索する

〔ii〕 $T=T_k$, $k=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ となった以後は $(T-T_k)$ の努力を箱1～$(k+1)$ にある適当な割合で分割して探索する。

この結果としてもしも T が制限されているような場合には，箱 i の累積された投入努力量が τ_i となるのである。

【3. 3】等価的な瞬間発見確率量 $\Gamma(T)$ の性質

等価的な限界効用 $\lambda(T)$ については単調減少性がいえたが $\Gamma(T)$ については必ずしもそれはいえない。しかしながら

$\gamma_i(t)$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ がすべて t に関する非増加関数ならば $\Gamma(T)$ も T に関する非増加関数である

ことはいえる。何となれば，$T<T'$ とすると $S\subseteq S'$ であり，それぞれに応ずる τ, τ' については，

$$\left.\begin{array}{l} P_i(\tau_i)\ \gamma_i(\tau_i) = \Gamma(T) \geq P_j(\tau_j)\gamma_j(\tau_j),\ i\in S,\ j\notin S \\ P_i(\tau_i')\gamma_i(\tau_i') = \Gamma(T') \geq P_j(\tau_j')\gamma_j(\tau_j'),\ i\in S',\ j\notin S' \\ \tau_i \leq \tau_i',\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(17)$$

が成り立つ筈である。そこでいま仮に $\Gamma(T)<\Gamma(T')$ とおいてみると γ_i の非増加性と式(17)とより

$$P_i(\tau_i)<P_i(\tau_i'),\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

とならねばならないがこれは

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(\tau_i)=\sum_{i=1}^{n} P_i(\tau_i')=1$$

と矛盾するからである。この事実を利用すれば興味ある次の命題を確めることができる。

【3. 4】$\gamma_i(t)$, $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ のすべてを t に関する非増加関数であるとする。又努力 T で最適な探索を行なったにも拘らず目標物が発見できなかったとして，以後最適な探索を続けた場合発見までに必要な今後の探索努力の期待値を $E(T)$ とする。このとき次の事実が成立つ。すなわち

$$T<T' \text{ ならば } \quad E(T)\leq E(T') \qquad \cdots\cdots(18)$$

つまり小さい努力で最適な探索を行なって失敗した場合と，大きい努力で最適な探索を行なって失敗した場合を比較すると，前者の場合の方が以後の探索で成功し易いということ，あるいは目標物が発見されないままに最適な探索が進行すれば，事態はいよいよ発見を困難にするような状況に推移するということである。

〔証明〕努力 T を費して発見できなかった事態を起点として考える。いまこの事態から出発して努力 t で最適な探索を行なったとき目標物を発見し得る確率を $P(t\mid T)$ と書けば，これは等価的な瞬間発見確率量 $\Gamma(T)$ を用いて次のように表現することができる。

$$P(t\mid T)=1-\exp\left[-\int_0^t \Gamma(T+\xi)\ d\xi\right] \qquad \cdots\cdots(19)$$

従って

$$E(T)=\int_0^\infty t\,P'(t\mid T)\,dt=\int_0^\infty \exp\left[-\int_0^t\Gamma(T+\xi)d\xi\right]dt \qquad \cdots\cdots(20)$$

一方 $\Gamma(T)$ の非増加性から

$$T<T' \text{ ならば } \quad \int_0^t \Gamma(T+\xi)\ d\xi\geq \int_0^t\Gamma(T'+\xi)d\xi$$

これと式(20)とより $E(T)\leq E(T')$ が成立する。

以上の事実を情報理論の立場から理解するために $g_i(t)=1-\exp[-\gamma t]$, $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ であるような場合，つまり探索努力が同一であるならば条件つき発見確率も同一であるような場合を例にとって説明する。$\gamma_i(t)=\gamma$（一定）であるから探索開始前の状態を式(3)に対応して

$$P_1\gamma\geq P_2\gamma\geq\cdots\cdots\geq P_n\gamma$$

あるいは

$$P_1\geq P_2\geq\cdots\cdots\geq P_n$$

としても一般性を失わない。最適な探索が進行しても目標物が発見できない場合には，目標物の存在に関するベイズの確率は $P_i\to P_i'\to P_i''\to\cdots\cdots$ というふうに平滑化されてゆく。それにつれ

てどの箱に目標物が存在するかについてのあいまいさの尺度としてのエントロピー $\boldsymbol{\Phi}$ $(=-\sum_i P_i \log P_i)$ も $\Phi \to \Phi' \to \Phi''$ という具合に増加する。このようなエントロピーの増加は目標物が発見されない限り続き，最後には Φ_{max} $(=\log n)$ の値をとり，以後追加される探索努力が最適に（均等に）配分される限りはこの状態を続けることとなる。

参考文献

〔1〕 Koopman B.O.: "The Theory of Search" Operations Res. Vol. 4, 1956, Vol. 5, 1957.

〔2〕 De Guenin J.: "Optimal Distribution of Efforts: An Extension of the Koopman Basic Theory" Operations Res. Vol. 9, 1961.

〔3〕 多田和夫：〝探索努力の配分に関する一考察〟経営科学第7巻第2号，1964.