Convex Programming についてのノート

竹　内　　　啓*

§ 1.　凸計画に関する補助定理

凸な範囲で，凸函数の最小値を求める問題は，数理計画法に関するいろいろな問題の中では，比較的素性のはっきりした問題であって，いろいろな便利な性質を持っている。以下では，この問題に対する一つの，いわば素朴な接近法についてのべよう。[注1]

x を n 次元ベクトル，$U_1, U_2, \cdots, U_m$ を n 次元ユークリッド空間内の閉凸集合，$f(x)$ を x の厳密に凸な函数とするとき，

$x \varepsilon U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$ の範囲で $f(x)$ の最小値を求める

問題を考えよう。[注2]

いま $U_1, \cdots\cdots, U_m$ のそれぞれの境界点の集合を，$l_1, \cdots\cdots, l_m$ と表わすことにする。

そのとき次のような補助定理がなり立つ。

補助定理　1.

$$f(x_1) = \min_{x \varepsilon U_1} f(x)$$

$$f(x_2) = \min_{x \varepsilon U_1 \cap U_2} f(x)$$

とおく，もし x_1 が U_2 に属さないならば，x_2 は l_2 に属する。

証明　これはよく知られた定理であるが，証明は次の通り。

x_2 が U_2 の内点ならば，$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \ 0 < \lambda < 1$ とするとき，λ が十分小ならば，x は $U_1 \cap U_2$ に属する。そうして

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) < f(x_2)$$

となるから，仮定に反する。（証終）[注3]

補助定理　2.

$$f(x^*) = \min_{x \varepsilon \bigcap_{i=1}^{m} U_i} f(x)$$

とおく，もし $x^* \varepsilon l_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap l_{i_p}$，$x^* \notin l_j$，$j \neq i_k$

ならば，

---

* 東京大学　昭和39年9月4日　「経営科学」第8巻第3号

$$f(x^*)=\min_{x\varepsilon U_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap U_{i_p}} f(x)$$

すなわち x^* が U_j の内点になっているならば条件 $x\varepsilon\ U_j$ は実は最小値には影響しないこになる。[注4]

証明 $V_1=\bigcap_{r=1}^{p} U_{i_k}$ $V_2=\bigcap_{j=i_k} U_j$ とおく，

もし

$$f(x_1)=\min_{x\varepsilon V_1} f(x)<f(x^*)=\min_{x\varepsilon V_1\cap V_2} f(x)$$

ならば，補助定理1により，x^* は V_2 の境界点にならねばならない。したがってそれは少くとも1つの U_j の境界点にならねばならない。これは仮定に反する。（証終）

補助定理 3.

$$f(x_1)=\min_{x\varepsilon U_2\cap U_3\cap\cdots\cdots\cap U_p} f(x)$$

$$f(x_2)=\min_{x\varepsilon U_1\cap U_3\cap\cdots\cdots\cap U_p} f(x)$$

$$\vdots$$

$$f(x_p)=\min_{x\varepsilon U_1\cap U_3\cap\cdots\cdots\cap U_p} f(x)$$

とおく，

もし $x_i\varepsilon U_i$, $i=1,\cdots\cdots,p$ ならば，

$$f(x^*)=\min_{x\varepsilon U_1\cap\cdots\cdots\cap U_p} f(x)$$

とおくとき，$x^*\varepsilon l_1\cap l_2\cdots\cdots\cap l_p$

すなわち条件 $x\varepsilon\ U_i$ を除いたときの最小値が U_i の外で達成されるなら $x\varepsilon\ U_i$ を加えたときの最小点は U_i の境界上に来る。[注5]

証明 補助定理1をくり返えし適用すれば

$$x^*\varepsilon l_i,\quad i=1,\cdots\cdots,p$$

を得る。（証終）

補助定理 4. U を任意の閉凸集合とするとき，

$$f(x^*)=\min_{x\varepsilon U} f(x)$$

ならば，

$$x\varepsilon U \text{ ならば } h'(x-x^*)\geqq 0$$

$$\text{かつ } f(x^*)=\min_{h'(x-x^*)\geqq 0} f(x)$$

となるようなベクトル h が存在する。すなわち x^* は U をふくむある半空間上での $f(x)$ の最小値を与える。[注6]

証明 x^* が U の内点ならば，補助定理1により $h=0$ とおけばよい 。x が U の境界点にあ

るならば，$f(x)<f(x^*)$ となる x の範囲を S とすると，S は f が凸函数であるから，閉かつ凸になる。そうして S と U の共有点は x^* のみになる。従って x^* を通り S と U を分つ超平面 $h'x=h'x^*$ が存在する。すなわち，$x \in U$ ならば $h'x \geqq h'x^*$ かつ $f(x)<f(x^*)$ ならば $h'x<h'x^*$ となるような h が存在する。（証終）

補助定理 5. x が n 次元ベクトルのとき

$$f(x^*)=\min_{x \in U_1 \cap \cdots\cdots \cap U_p} f(x) \quad p \geqq n$$

ならば，適当に n 個の $U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}$ をえらんで

$$f(x^*)=\min_{x \in U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n}} f(x)$$

とすることができる。すなわち実際に効果のある制限条件はたかだか n 個である。

証明 補助定理2により，x^* は $U_1, \cdots\cdots, U_p$ の境界点にあると仮定してよい。従って x^* は $U_1 \cap \cdots\cdots \cap U_p$ の境界点，補助定理4により，

$$x \in U_1 \cap \cdots\cdots \cap U_p \text{ のとき } h'(x-x^*) \geqq 0$$

かつ $f(x^*)=\min\limits_{h'(x-x^*) \geqq 0} f(x)$

となるようなベクトル $h \neq 0$ が存在する。

適当に n 個の $U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n}$ をえらぶとき，

$$x \in U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n} \text{ ならば } h'(x-x^*) \geqq 0$$

となることを示せば，定理が証明される。[注7]

$x \in U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n}$ の範囲での $h'(x-x^*)$ の最小値を $-\varepsilon(i_1 \cdots\cdots i_n)$（$\geqq 0$）とすると，任意の

$0<\varepsilon<\varepsilon(i_1 \cdots i_n)$ に対して，

$$h'(x-x^*)=-\varepsilon, \quad x \in U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n}$$

となる x が存在することは $U_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_n}$ が凸であることから導びかれる。従って

$$\varepsilon_0=\min_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon(i_1, \cdots, i_n)$$

とおくと，すべての $i_1, \cdots, i_n$ に対して，

$$h'(x-x^*)=-\varepsilon_0, \qquad x \in U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}$$

となるような点が必らず存在する。いま U_i と超平面 $h'(x-x^*)=-\varepsilon_0$ との共通部分を V_i とすると V_i は $n-1$ 次元ユークリッド空間内の閉凸集合になる。仮定により $V_1, \cdots\cdots, V_p$ の任意の n 個の共通部分が空でないから Helly の定理[注8]により $V_1 \cap \cdots\cdots \cap V_p$ は空でない。従って $V_1 \cap \cdots\cdots \cap V_p$ と $h'(x-x^*)=-\varepsilon_0$ は共有点を持つ，それゆえ $\varepsilon_0=0$ でなければならない。証終）

§ 2. 計算法

§ 1でのべた補助定理を用いて，数値計算法を考えることができる。

1. $p \leqq n$ の場合

$U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots\cdots \cap U_{i_k}$ の中で $f(x)$ を最小にする点を $x(i_1 \cdots i_k)$ $l_{i_1} \cap l_{i_2} \cdots \cap l_{i_k}$ の上で $f(x)$ の

最小値を与える点を $x_{i_1\cdots i_k}$ と表わす。また無条件で最小値を与える点を $x(0)$ と表わすことにする。

まづ $x(0)$ を求める。もしこれが $U_1\cap\cdots\cap U_p$ に属していれば，これが解である。

もしこれが例えば U_1 に属さないならば，x_1 を求める。そうして $x(1)=x_1$ とする。

$x(1)$ が更に例えば U_2 に属さないならば，まず x_2 を求め，$x_2\varepsilon U_1$ ならば $x(1,2)=x_2$，$x_2\notin U_1$ ならば $x(1,2)=x_{1,2}$ とする。

もし $x(1,2)$ が更に例えば U_3 に属さないならば，まづ x_3 を求め，次にそれが $U_1\cap U_2$ に属しているか否かによって，もし $x_3\varepsilon U_1\cap U_2$ ならば $x(1,2,3)=x_3$ とする。もし $x_3\varepsilon U_1$ ならば $x_{1,3}$ を求め，$x_{1,3}\varepsilon U_2$ ならば，$x(1,2,3)=x_{1,3}$，$x_{1,3}\notin U_2$ ならば，次に$x_{2,3}$ を求め，$x_{2,3}\varepsilon U_1$ ならば $x(1,2,3)=x_{2,3}$，$x_{2,3}\notin U_1$ ならば $x(1,2,3)=x_{1,2,3}$ とする。

一般にこのような操作によって k 個の $U_{i_1},\cdots\cdots,U_{i_k}$ の共通部分における最小点 $x(i_1,\cdots,i_k)$ が求められたとき，もし $x(i_1,\cdots,i_k)\ \varepsilon\ U_{i_k+1}$ ならば，まず $x(i_{k+1})\ \varepsilon U_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap U_{i_k}$ ならば $x(i_1,\cdots,i_k\ i_{k+1})=x(i_{k+1})$ とする。もし，$x(i_{k+1})\ \varepsilon U_1\cap\cdots\cdots\cap U_{i_k}$ ならば $x(i_1,\cdots\cdots,i_k,\ i_{k+1})$ は l_{i_k+r} と $U_1\cap\cdots\cdots\cap U_{i_k}$ の境界との共通部分に来るから，x_{i_k+1,i_1}，x_{i_k+1,i_2}，$\cdots\cdots$，x_{i_k+1,i_1,i_2}，$\cdots\cdots$というような形の点を順にチェックして行けば $x(i_1,\cdots,i_k,i_{k+1})$ を求めることができる。

このような操作によっって，最後に $x(1,2,\cdots,p)$ を求めることができる。

2.　$p\geqq n$ の場合

補助定理5によって，たかだか n 個の $U_{i_1},\cdots\cdots,U_{i_n}$ の共通部分における最小値だけを求めればよい。更に補助定理により，実はたかだか n 個 の U の境界点の集合の共通部分，すなわち $l_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap l_{i_k}$ $(k\leqq n)$ というような形の集合の上での最小点のみを求めればよい。

そこで1の場合と同様にして x を順に定めて行くことにする。そのとき $x(i_1,\cdots\cdots,i_n)$ という形の点が得られるまでは1の場合と全く同様に進める。ここでもし $x(i_1,\cdots\cdots,i_n)\ \varepsilon\ U_{i_{n+1}}$ ならば，少くとも一つの $j(1\leqq j\leqq n)$ について $x(i_1,\cdots\cdots,i_n,i_{n+1})\ \varepsilon U_{i_j}$ となるから，このような j について U_{i_j} を条件から除いて考える。そうしてつねにn個以下の U_{i_j} の共通部分について最小点を求めて行けば，解に達することができる。

このような操作は n が大きいときには，かなり面倒なものになるが $n=2$ の場合には比較的容易である。この場合には，また次のようにして計算してもよい。

まづ $x(0)$ を求める。これがもしすべての条件を満たしていないならば，$x(0)\varepsilon\ U_i$ となる i について x_i を求め，その中で f の値を最大にするもの，すなわち $\max_i f(x_i)$ を与えるものを求める。それを例えば x_1 とする。これが更にいくつかの条件を満さないならば $x_1\varepsilon U_j$ となる j について $x_{1,j}$ を求め $\max f(x_{1,j})$ に対応する j を求める，もしそれが $x_{1,2}$ であるとき，$x_{1,2}$ が条件を満たせばこれが解，更にこれが条件を満たさないならば U_1 は完全に考慮しないでよいことになるから，今度は$k\neq 1$として $x_{2\cdot k}$ という形の点を求めて，上と同様な操作を行えばよい。

また $n=2$ の場合には，もし $x_i \notin U_j$ $x_j \notin U_i$ となるような2つの i, j について，もし $x_{i,j}$ がすべての条件を満たせば，$x_{i,j}$ が解になるから，このような点を何らかの方式で求めてもよい。

§3. 数値例

次のような例を考えよう。(S. Zahl. JRSS. ser. B, vol. 26, No. 1, 1964, p.152)

$$f(x)=3x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$$

の最小値を，次の条件の下で求めること。

$$x_1+2x_2 \leqq 4$$

$$x_1+x_2 \leqq 3$$

$$3x_1+x_2 \leqq 6$$

$$x_1-x_2 \leqq -2$$

$$-x_1-2x_2 \leqq -10$$

$$-x_1+4x_2 \leqq -5$$

この6つの式によって定義される半平面をそれぞれ $U_1, \cdots\cdots, U_6$ としよう。

まず $\min_x f(x)=0 \qquad x(0)=(0,0)$

は明きらか。これは U_1, U_2, U_3 に属さない。そこで，まず x_1 を求める。

$$\phi_1=3x^2{}_1+2x^2{}_2+2x_1x_2-\lambda_1(x_1+2x_2-4)$$

とおいて

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}=0 \qquad x_1+2x_1-4=0$$

を解くと，

$$6x_1+2x_2-\lambda_1=0$$

$$4x_2+2x_1-2\lambda_1=0$$

$$x_1+2x_2-4=0$$

から　$x_1=0$,　$x_2=2$　となる。すなわち

$$x(1)=x_1=(0,2)$$

ところで $x_1 \notin U_2$, U_3 であるから，次に x_2 を求める。

$$\phi_2=3x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-\lambda(x_1+x_2-3)$$

として

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}=0 \qquad x_1+x_2-3=0$$

より

$$6x_1+2x_2-\lambda_2=0$$

$$4x_2+2x_1-\lambda_2=0$$

$$x_1+x_2-3=0$$

$$x_1=1, \quad x_2=2$$

従って $x_2=x(2)=x(1,2)=(1,2)$ となる。

ところで更に $x_2 \notin U_3$ だから，まず x_3 を求める。

$$\phi_3=3x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-\lambda_3(3x_1+x_2-6)$$

とおき

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}=6x_1+2x_2-3\lambda_3=0$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}=4x_2+2x_1-\lambda_3=0$$

$$3x_1+x_2-6=0$$

を解けば $x_1=2$, $x_2=0$ となる。

ところで $x_3=x(3)=(2,0) \notin U_2$ となっているから， $x(2,3)=x_{2\cdot3}$ となるはず，ところで $x_{2\cdot3}$ は，

$$x_1+x_2=3$$
$$3x_1+x_2=6$$

の解 $x_1=3/2$, $x_2=3/2$ 以外にはあり得ない。そうして $x_{2\cdot3}=(3/2, 3/2)$ はすべての条件を満たすから，これが解になる。

この場合，計算手続きは，Zahl の方法，或いは Wolfe のようなシンプレックス法によるよりも遙かに簡単であることがわかるであろう。

§4. む す び

ここでは $f(x)$ は厳密に凸であると仮定した。しかし，それが広義の凸函数であっても，一つの最小点を求めるための方法としては，ここにのべたような考え方が適用できる。

また，問題の条件のうち一部は，最初から固定して f の定義域自体を限定したものとして考えることもできる。このことは $f(x)$ の全空間での最小値が存在しないような場合には，必要な操作となる。このような操作を行えば，線型計画法の問題にも，この考え方を適用することができる。

また $f(x)$ が凸であることも実は必要ではない。§1 にのべた補助定理が成立するためには，任意の定数 C について $f(x)\leqq C$ を満たす範囲が凸集合になることが必要かつ十分である。従って例えば， $x_1\leqq 0$, $x_2\leqq 0$ の範囲で，

$$f(x)=-x_1x_2$$

の最小値を一定の条件の下に求めるような問題にも，このような考え方を，適用することができる。

参　照　文　献

1) Karlin, S.: Mathematical Methods in Games, Programming, and Economics, Vol. 1, Addison Wesley, 1959

2) Hadley, G.: Nonlinear and Dynamic Programming, Addison Wesley, 1964

注 1. ことわるまでもないことであるが，ベクトル x の函数 $f(x)$ が凸 (convex) であるときは，任意の x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ および実数 $0<\alpha<1$ に対してつねに

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \leqq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)+(x_2)$$

が成り立つこと，またここでつねに不等号が成立するならば，厳密に凸 (strictly convex) という。

また x のある範囲 C が凸集合であるとは，任意の $x_1 \varepsilon C$, $x_2 \varepsilon C$, $0<\alpha<1$ に対して，つねに

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2 \varepsilon C$$

となること。

注 2. 凸函数は，定義域の境界点以外では連続である。しかもつねに $\lim f(x) \leqq f(x_o)$ が成り立つ（図 1 参照）

したがって，それは x の有界な閉集合の範囲の中で必らず最小値を持つ。範囲が有界でなければ下限は $-\infty$ になることもあり得る。また凸な範囲では厳密に凸な函数の最小値を与える点は唯一つしか存在しない。

注 3. この定理は図を書いて考えると簡単に了解できよう。

いま x_1 が U_2 に入っていないとすると，$U_1 \cap U_2$ に属する任意の x に対して，x_1 と x を結ぶ線分を考えると，この線分上では x から x_1 の方へ近づくにつれて $f(x)$ の値は減少することになる。従って x_2 は $U_1 \cap U_2$ の境界上，すなわち U_2 の境界上に来なければならない。（図 2）

注 4. このことも直感的には明らかであろう。

$f(x)$ の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲での最小値が $x=x, {}^*x_1<x^*<x_2$ で与えられるならば $f(x^*)$ は x の全範囲での最小値を与える。（図 3）

注 5. 図 4 参照。

注 6. 図 5 参照。

注 7. 一般には n 次元空間で n 個より多くの集合の境界面は共通点を持たないであろう。しかし特別の場合には $n+1$ 個以上の面が丁度で交わるということがおこり得る。面倒なことはこのような場合に生ずるのである。（図 6）

注 8. Helly の定理とは n 次元空間の p 個の凸集合の中の任意の n 個がつねに共通部分を持

つならば p 個の凸集合全体の共通部分は空ではないという定理である。証明については上記の Karlin の本を参照。

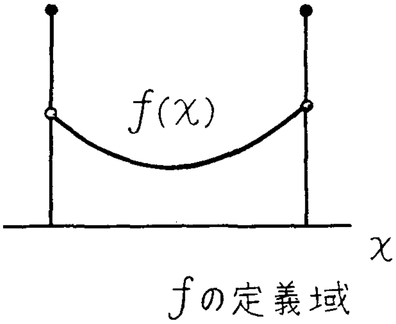

図 1

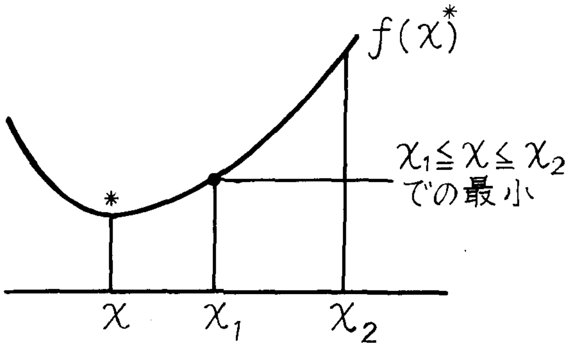

図 4

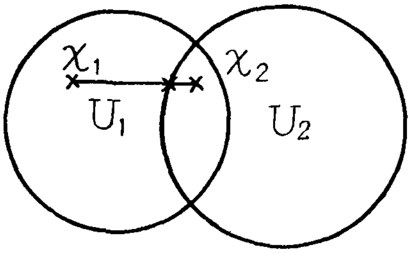

図 2

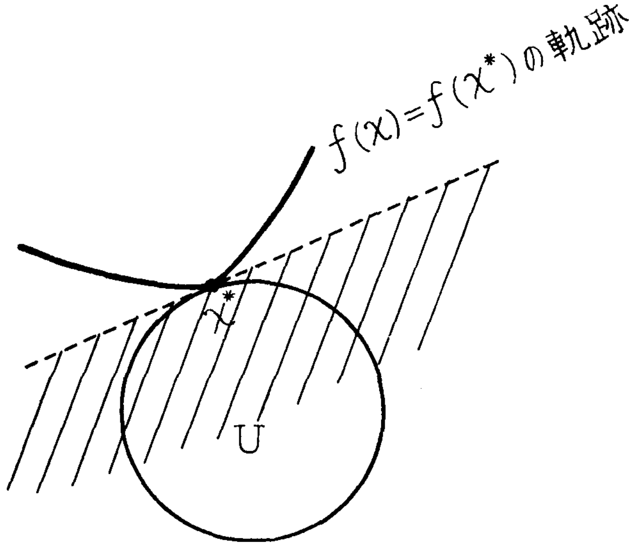

図 5

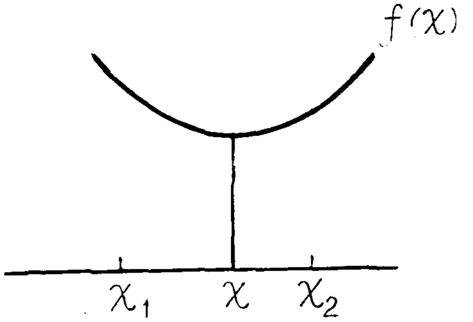

図 3

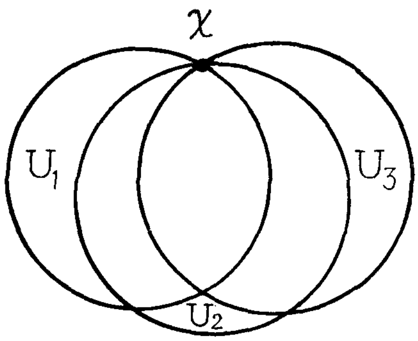

図 6