

文 献 抄 録
---------

**L. Takacs:** The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times, *Sankhyā*, Vol. 25 (1963) pp. 91—100.

$GI/G/1$  の queue における待ち時間の極限分布は Lindley (1952) によって Wiener-Holpf 型の積分方程式を満たすことが示されている。ここでは著者が 1955 年に導入した virtual waiting time  $W(t)$  (時刻  $t$  でもし客が来たとする待たなければならない時間) の極限分布が

$$W^*(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta} W(x) + H^*(x),$$

$$H^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_0^x [1 - H(y)] dy, & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

で与えられることを示している。ここで  $W(n)$  は普通の意味の待ち時間の極限分布で、前記積分方程式の解として与えられるもの、 $H$  はサービス時間の分布関数、その平均値が  $\alpha$ 、到着間隔の平均値が  $\beta$  である。

更に行列の長さの極限分布について  $W(x)$  を使って表現する式を与えているが到着時点を考えた imbedded process の場合のそれは先に Kawata [Bull. I.S.I. 1961], Morimura [Kodai Math. Sem. Rep. 1962] の得たものに一致し、任意の時点で考えた process の場合には若干異った表現が得られている。

(森村英典)

**D.G. Kendall:** Some recent work and further problems in the theory of queues, Теория Вероятностей и ее Применения, Том. 9, (1964) pp. 1—15.

第 7 回確率論・数理統計学全ソ会議に招かれて Kendall が講演した総合報告、現在における queuing theory の主な関心事と将来における問題点をあげ、かなり格調の高いものである。ただ、それらの問題点のとらえ方はあくまでも数学としての

queuing theory が中心であって、実際応用の立場もかなり考えられているとはいえそれを主体にして議論を進めたものではない。本文は英文で、6 節、正味 12 ページ余り、文献 2 ページ (63 篇)、それに半ページ足らずのロシア語アブストラクトがつけられている。以下、各節毎に要点を紹介すると、

1. Introduction, queuing theory の論文は世界単位でみると、今や毎週 1 篇の割合で書かれている。(Mathematical Reviews 誌に載るもので勘定) この (週の) 仕事、つまりこの論文は、この分野に興味をもつ若い研究者をはげます役割をするだろう、というのは、現今書かれている論文の大多数は、まず読む必要がないということを知るだろうから、とはいっても、この報告から得たもので重要なものもあるから、代表すべき論文だけが挙げられた総合報告からは大分かけ離れている。

2 Restoring the Markovian character to non-markovian queus, lumped process に言及した後、その反対の行き方、つまり  $Y_i$  が non-Markov のとき  $X_i = (Y_i, Z_i)$  を考えれば Markov になるというように《supplementary variable》 $Z_i$  を付加えることにより Markov process にもって行く議論について述べる。その好例は D.M.G. Wishart が  $M/G/1$  においてサービスの残り時間  $Z_i$  を queue-size  $Y_i$  に付加えて議論したもの (第 4 回 Berkeley Symposium) や D.R. Cox (Cambrige Phil. Soc. 1955) などが挙げられる。逆に情報を減らして、imbedded process を注目することにより議論したものに有名な Kendall の論文以来の一連のものがあるし、Lindley の  $GI/G/1$  の論文 (1952) も同じ流れとみることが出来る。

3. The detailed analysis of markovian queues.  $M/M/1$  では一時的解  $P_{ij}(t)$  が知られているが、これとその極限  $P_{ij}^\infty$  との間には

$$\left| P_{ij}^t - P_{ij}^\infty \right| \leq M_{ij} P_{ij}^t$$

のような関係がある (geometric ergodicity) こと、またその誤差評価などに触れる。ここで重要視されている仕事は D. Vere-Jones [Quart. J. Math. Oxford, Ser., 13 (1962) pp. 7-28] や Kingman [London Math. Soc. 1963 他] のものである。

4 Special methods: (a) approximations Erlang 分やその mix type など分布を近似することはよくやられているが、その近似がどのような結果をもたらすかは誰も考えていない。たとえば  $M/G/S$  を  $M/E_k/S$  でおきかえるとき、 $k$  をどう選んだらよいのか、 $M/G/1$  については Pollaczek-Hincin-Kendall の公式で  $E_k$  と  $G$  とが同じ変動係数をもつように  $k$  を選ぶというのが 1 つの根拠であろう。 $S > 1$  のときはどうだろうか、Kingman は  $P$  が 1 に近い heavy traffic のとき  $GI/G/1$  について

$$E(w) \sim \frac{1}{2} \text{Var}(u)/E(u)$$

が成立することを云っている。 $(w$  は待ち時間,  $u$  はサービス時間) こういった方向での研究が欲しい。

5. Special methods: (b) decompositions, dualities, combinatorial methods.

Pollaczek が  $M/G/1$  に対して導いた、待ち時間の Laplace 変換の式を見て、Kendall が予想した待ち時間  $w$  の分解——つまり、 $N$  個の独立な確率変数  $Z_i$  の和として表わされる ( $N$  は幾可分布にしたがう確率変数) という予想が J. Th. Runneberg [Bull. I.S.I. 1960] によって肯定的に示されたことなどが述べられている。

6. More general inputs and outputs.

あるあらかじめ予定された (その間隔の分布  $G$ ) 時刻からの遅れが  $G_2$  という分布で与えられるような late arrival は tandem queue  $GI/G_1/\infty \rightarrow G_2/1$  と考えられるということから、tandem queue の output process に話が及び、この種の問題が更に研究されるべきだと主張する。そして次のような文章でこの講演をしめくくっている。

‘input の経験的データを診断してみて《客 (船, 航空機, …) は多少なりともランダムに到着しているようである。それで、それらは Poisson 流を作るものとみなそう》と云い切れなこともある。われわれは《どの程度、non-random であるか?》という間に答え、Poisson-ness からのずれをパラメータ的に査定する用意をすべきである。そういうことをしてこそ、queuing theory はそれが生れ出た工学の世界に負っている負託に応えることが出来るのだ。’

(森村英典)

Wester, L. and M. Kilbridge: The Assem-

bly Line Model-Mix Sequencing Problem, (第 3 回国際 O. R 学会提出論文)

組立てラインの各作業員へ仕事の配分を決めるライン・バランスのこれまでの解析的な研究は、単一種類の製品の場合だけしか扱ってない。この論文は、類似した何種類かの製品を 1 本のラインで組立てる場合を扱い、これを 2 段階に分けている。

第 1 段階は、各製品を単独に作るものとして、作業員の総遊休時間最小、または作業員数最小にするように全体の仕事を作業員へ割当てておくこと。これはこれまでの手法で解決できる。第  $j$  種の製品を  $n$  人で組立てるときの最良のサイクル時間を  $c_j$  で表わす。

第 2 段階は、作業員の遊休時間を最小にし、サイクル時間内に 1 つの品物に対する作業が終らないという congestion をなくすように、ラインの頭から送り込む製品の順序を決めること。ここでは、variable-rate-launching と fixed-rate-launching の 2 つの送り込み方を示し、比較している。

variable-rate-launching は、直前に入れた製品の単独のサイクル時間と等しい間隔で、製品をラインに送り込む方式。この方法では、a) 作業員の遊休はないし、b) congestion も起こらない。また、c) 多品種をどんな順序で送り込んでも良い。このために、d) ラインの各作業員に部品を配るスケジュールが面倒になる欠点はあるが。

Fixed-rate-launching では、ラインの頭には一定の時間間隔  $\gamma$  で送り込んでおく。もちろん作業員は、前の製品の作業が終ってから、次に手を付ける。作業員の遊休時間を選避けるためには、 $i$  番目に入れた製品について、

$$i\gamma \leq \sum_{h=1}^i c_h, \quad i=1, \dots, m,$$

congestion を選避けるためには、

$$\sum_{h=1}^i c_h - i\gamma \leq \tau - c_j, \quad i=1, \dots, m$$

が成立ってなければならない。ただし、 $\tau = \max c_j$ ,  $m$  は総生産個数、上の 2 式をまとめると、

$$0 \leq \sum_{h=1}^i c_h - i\gamma \leq \tau - \gamma.$$

この 2 つの不等号を同時に満足させる  $\gamma$  と順序を決めるのは難しいことが多い。妥協策として、congestion をできるだけ小さくするため、 $\sum c_h - i\gamma$  ができるだけ小さくなるように、 $c_j$  すなわち  $i$  番目

流す品物を1スラップごとに選んで順序を決める。 $\sum c_n - i\gamma > r - \gamma$  となってしまうときは、次に小さい  $c_i$  の品物を組立てて、congestionの影響を吸収させる。

この方法は、a) 製品の順番をいちいち決めてやることが面倒だが、b) 種類や生産個数が標準化された製品群に対しては、variable法より適用しやすい。(真鍋竜太郎)

**“Portfolio Selection”** Efficient Diversification of Investments. Harry M. Markowitz

Cowles Foundation-for Research in Economics at Yale University

Copyright 1959

John Wiley & Sons, Inc., Publishers.

本書は、従来O・Rになじみのやすい証券投資の問題を扱っていること、モデルが不確実性を含めた二次計画法であることなどから多方面から関心をよんだようである。

著者の Harry M. Markowitz はコンピューターの企業経営の応用を数多く手がけたエコノミストで、現在でも Rand Corp で活躍している。基本的な考え方は株式、社債などの投資果実を将来の期待値(収益)とし、その実現の不確実性をバラツキというかたちで扱っている。その場合、個々のポートフォリオ(銘柄)を組合せたとき全体の期待値の不確実性は、個々の銘柄のバラツキ(分散)が相互に関係しているところから、単純な総和とはならず、共分散の総和になるところに二次計画法のモデルとして扱われる理由である。組合せ投資を扱う以上、原理的には個々の銘柄の期待値が大なるものは危険度も大であるという前提がア prioriにある(この点については異論がなりたちうるが、一般的には認めなければならぬだろう)。これを基礎に、期待値最大、危険度最小となる投資配分の決定が本書の課題である。

本書の構成は4部、13章、数式の展開がなされている附論から成立している。

中心部分は2章のポートフォリオ・セレクションのインプット、アウトプットの図解から始まり、3章で期待値、4章で分散、共分散を初心者にも十分理解できるように説明がなされている。これをもと

にして、7章で幾何学的な解法、8章で著者の提唱するクリティカルライン・メソッドの解法が展開されている。

ポートフォリオ全体の期待値を  $E$ 、そのバラツキを  $V$  とすれば、投資資金の制約、個々の銘柄への投資限界などを制限条件とした最大最小の問題となる。一般的には、ラグランジュの未定係数を  $\lambda$  とすれば、

$$f = V - \lambda E \rightarrow \min$$

$$\text{制約条件 } AX = b, X \geq 0$$

(ここで  $V = X'CX$ 、 $C$  は  $n$  行  $n$  列の共分散の正方向行列、 $X$  は求める銘柄の配分比率、銘柄数の  $n$  行の列ベクトル、 $A$  は制約式の係数の  $m \cdot n$  行列)。

これから目的関数  $f$  を微分して最小となるように  $X$  を決めればよい。本書ではクリティカルライン・メソッドで  $X$  を求めているが、著者の意図のように、初心者にも理解出来るように説明できているとは思えない。一般的には附論Bで紹介されている Wolfe のシムプレックス・メソッドの方が理解しやすいだろう。

さらに  $E$ 、 $V$  ポートフォリオ・セレクションの具体化のために、(1)投資期間が長期に及んだ場合の期待値と共分散、(2)銘柄数が数百に及んだ場合、共分散の計算は数万に及ぶがその煩雑さをさけるための間接法(Index法)にふれ、第4部、10章以下では効用を選択基準としたときのポートフォリオ・セレクションを展開している。この部分の理論的展開は未完の域を出ないが、それだけに今後に興味を残すところであろう。

セレクションの実戦への適用は、IBMの7090用プログラムの完成によって、わが国でも関係面で具体化が研究されている。現在のところ、わが国の特殊性は制約条件として盛込まれるべきで、理論の本旨を修正する必要はないように感じている。わが国では投資信託が戦後急速な発展をとげた。急激な成長のあまり、現在、投資選択の考え方に多くの混乱と困難な問題をかかえている業界の関係者として、本書のもつ意義は極めて大きいと考えている。

(野村証券調査部)

**Russell L. Ackoff: Some Observations on Marketing and Operations Research in the United States**

(第3回国際OR学会提出論文)

Quelques Observations sur les Études de

Marché et la Recherche Opérationnelle aux  
Etats-Unis(Revue Française de Recherche  
Opérationnelle, 8<sup>e</sup> année n° 30)

1. マーケティング研究にORを応用した例は多いが発表論文は少い。業務上の機密のためである。そのためマーケティングに関するORの論文は抽象化されたモデル作成と予測に使える統計的手法の討論が大部分である。

米国では製品の製作費よりも配分や販売費用の方がはるかに大きい。競争会社の大部分は製造技術については同じ程度の知識を有しているので、競争商品は価格、品質、本質的な機能特性等はますます等しくなっている。そのためマーケティングが重要視されてをり、広告がまずその焦点で、広告は存在していない製品上の有利な差について幻想を作るために使われている。そのため動機調査も使われ広告の競争は軍備拡張競争に似た状態が作り出されている。

マーケティング担当支配人の大部分は、製品に差がないこと、消費者がこれを認識できる——意識的に、または無意識的に——といった現実を直視したがる。まずこれがはっきり判ると有効なマーケティング戦略が立てられる。

2. 同等な製品については、消費者は余り商標に執着しない、したがって、小売商に押しつけられるものを買う。小売商は現在在庫の多いものからまず押しつける。また小売商は最後の期間に何を売ったか、その量に季節変動を考えて発注を決めている。そこで平衡状態がおこってくる。(そして以下にその対策と成果が述べてあるが略す) また展示場所の金額的評価も多くの場合は正当でない。もし正しい場所にかかっていると倍もふえる。正しい場所とは購入したいというショックを最大にする場所である。1つの商標だけ扱う小売方法では観客の選択理由は「近ずきやすさ」と「サービス時間」であるという。

3. 購入習慣 普通は消費物資の生産者は消費者の購入習慣を容易に操作できると考えがちである。これに反し、生産物資の生産者はその消費者の購入習慣はほとんど操作できないと仮定しやすいが、この両極端の仮定はどちらも危険であるとして例をひいている。

4. 販売費用 大量生産会社ではセールスマンが多くの種類の製品を取扱っている。普通は販売費を販売高の金額に比例して配分している、これだと販売費は各製品の売り上げ高1ドルの値打が同じとして

かゝることになるが、調査した例では同じ1ドルの値打のものを販売するのに、その費用が最大のものは最小のもの700倍もかゝっていることがわかったという。

利益が挙らない製品も製作が中止されない場合がある。利益の挙る製品の顧客がそういう利益の挙らない品を製作しない会社からは購入しないと信じているからだとされている。しかし、この仮定も感じとしては強いが、証拠は薄弱であり、これに反する実験例が示してある。

5. 努力に対する反応「直観性の誤り、飽和点、過飽和点の分析が行われ実例で示してある。「平均の誤り、広告費用については全国的な総より地域的費用の方が重要であるという。

6. マーケット・リサーチをやる人々が誤りやすいことはすぐ回帰とか相関にとらわれてしまうことで、むしろこれは最後のよりどころにすべきであると説いている。予測はさげたい将来をよく予見するものと言われることが多いが、部分的にでもコントロールできるように過去を説明するものでなければならない。

7. 結論としてマーケティング担当支配人は生産担当支配人より数量的取扱いを好まないカンや経験に頼りがちで科学的方法は「非人間的」と考え勝ちであるところに弱点があり、しかも発表させないのでOR自身をマーケティングすることはむづかしいが、ORが入れられないのは果して業務上機密のためだけか?と結んでいる。

8. この論文は極めて多くの示唆にとんでいる。なお発表の際因子分析法で、広告、販売努力、販売活動地点の3因子を選びさらに各因子で3水準にとった一連の研究も述べられたようである。残念ながら他会場にいたので精しいことはわからないが、大変好評であったと聞いている。

(矢部 真)

**R. Solt** (Reed Paper Group Limited) An  
Assessment of Long Term Investment

(第3回国際OR学会連合大会提出論文)

1. 新製品開発の長期計画作成にORを用いたケース・スタディである。英国やその他で紙や包装品およびその他の関連製品を作っているが、最近EFTA (European Free Trade Association) やEEC (European Economic Community) の関係で、

関税引下げが始まり、いままでと異った状態となったので新製品を開発して対処するため10年計画を作成した。それにORチームが参加した。

2. はじめにわかっていたことは、経済情勢や市場条件の変化の確からしい方向が相対的に予測できるということである。これに反して不明確なことはその変化が実現する限度と速度である。したがって、今後10年間に何をすべきかを直ちに決定を下すよう求められたわけではない。つまり将来正しい決定が行われ得るようにするには、現在どういう決定を下せばよいかということである。今わかっていることからだけなら、現在打つべき手は直ちに経済的な提案になる。この手は将来の変化にも適合でき、また異なる方向へも発展できるものでなければならない。

3. 対象はかなり限定してをり、半製品、それからの製品、またそれからできる新製品に限っている。もちろん、製品を変えるには機械その他工場に資本投下がいる。

マーケティング（需要：市場調査で推定したが大きな誤差は入りうる。価格：関税の最終的形によるので、その可能な姿を予想して範囲を決められる。たゞどの辺に落ち着くかは全く不明）生産能力、資本費（約10億）、生産コスト・転換コスト・運転費（いままでの会計数字は役立たない。精度に差がありすぎるし、全く不確実なものもある。皆が確実にいえることはせいぜい「少くとも」とか「高々」ということだけで両方を対して記入したが、それでも広すぎるときは中間値を入れた。まず10年間の予測値をこうして作り、計算にはこの値の前後に巾をもうけた Min, Max を使った。

4. 対象となった製品から理論的に作り出せる新製品をリストにして、実際的でないものは捨て、最後に32種の新製品を残して考える対象としたが、

各新製品に対して将来会社の一部がいつかそうな状態に対応している。1回でその状態になるものもあり、何回も変化を重ねるものもあり、その時期も考えると、取るべき手の可能なコースは極めて多い。不明確なデータから範囲で考えてみることになり、その全部をカバーするには12の異った条件があれば充分だということになった。12の条件、32の状態からなるマトリクスで10年間にわたりくりかえされる。DPが手法として使えそうに思われて使おうと努力した。しかし、DPは簡単な場合について手

のとり方の最良性を証明するだけに用いられたようである。

## 5. 測度の決定

利潤率、現金の流動、利益をむしろ料金として予め課すること、などいろいろ考え、その料金の率は10、15、20%をとってみた、そして最後に用いた測度は、

5-1 追加増加資本に対して任意の料金を差引いた正味利益

5-2 同じベースで全資本費に対する収益

5-3 10年間にわたる現金の流動

5-1、5-2に対しては、各年について、10年間の平均、10年後と3の場合について試算した。もちろん、10年後も会社が健全な姿にあることは当然の仮定で入っている。

6. 計算はORチームの電子計算機と会計課職員の手計算で比較した。最良というところが利益を最大にすることか、リスクを最少にすることかなど出た結果について検討した。

結果を総合的に判断するため後悔表 (Regret Table) によった。これは手のとり方を行に、事態のおこり方を列にとってまずその利益を各場合について出す。各列の中で利益最大のものを0とし同じ列の他の数字はそれからの差で示した表である。事態のおこり方に確率は入れてない。

結局、計算機の結果から32のうち利益の少い22は捨て、この表その他の判断でさらに6を捨て、最後に4だけの手について精しい結果を製表にしたという。

7. 結果について この著者はいろいろ利点を述べている。たとえば可能な解が広い方向に対して当はまること、またそのため変化の時期のはずれが少々あってもかまわないということである。

8. この論文を読んでみると、LPやDPを少々使っているがそんなことよりも、測度の選定に苦労した話が面白かった。さらに面白かったのは一つには製品の質にもよるので直ちに他の業種に同じことが適用できるとは思えないが、新製品を会社の状態にをかえていっていることである。最後に後悔表についてはよく知らないが、サベジの本などにあるということである。調べる暇がなくて残念である。長期計画作成に従事するものとしては、なかなか教えられるところが多かったように思う。

(矢部 真)