文献抄録

Cooper L : Heuristic Methcds for Location -Allocation Problems. *SIAM Review, Vol. 6 (1964) 37—53*

位置配分問題(Location-Allocation Problem)は次のように定義される。

n カ所の需要地の所在地を座標 (x_{Di}, y_{Di}) $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ とし，m カ所の供給地の座標を (x_j, y_j) $j=1, 2, \cdots\cdots, m$ とした場合，供給地 j から需要地 i への単位輸送費用（又は距離）が与えられているときに総輸送費用（又は距離）を最小にするように供給地の位置を定めること。ただし供給地の供給容量とか輸送容量とかに制限はないものとする。

需要地が供給地 j から供給されるかどうかによって，$\alpha_{ij}=1$ 又は 0 とする。ϕ を総輸送費用とすると

$$\phi=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\phi(x_{Di}, y_{Di}, x_j, y_j) \qquad (1)$$

ただし $\phi(x_{Di}, y_{Di}, x_j, y_j)$ は供給地 j から需要地 i への輸送費関数である。費用が距離に比例するならば，

$$\phi=\sum_{j}\sum_{i}\alpha_{ij}w_{ij}[(x_{Di}-x_j)^2+(y_{Di}-y_j)^2]^{1/2} \qquad (2)$$

ただし w_{ij} は単位距離費用である。

故に問題は，費用 ϕ を最小にするような x_j, y_j, α_{ij} を決定することである。その簡単な例は，3点を与えてそれらの点からの距離の和が最小になるような点の位置を求める問題であって，これはよく知られているように120°をなすような点が求める点である。実際的な例は販売店に対して倉庫をどのように配置するかという問題である。

α_{ij} の任意に与えられた値に対して ϕ を最小にする x_j, y_j は次の方程式で与えられる。

$$\sum_{i}\frac{\alpha_{ij}\ w_{ij}(x_{Di}-x_j)}{[(x_{Di}-x_j)^2+(y_{Di}-y_j)^2]^{1/2}}=0$$

$$\sum_{i}\frac{\alpha_{ij}\ w_{ij}(y_{Di}-y_j)}{[(x_{Di}-x_j)^2+(y_{Di}-y_j)^2]^{1/2}}=0$$

$$j=1, 2\cdots\cdots m \qquad (3)$$

これを iteration で解く式が導かれている。すべて可能な α_{ij} の値に対していちいち(3)を解くのは α_{ij} の組合せの数から云ってその計算量は n, m の値が大きくなるに従って莫大になるので，近似的に解くための発見的 (heuristic) な方法を 4 つのべている。

1. Destination Subset Algorithm

これは n カ所の需要地のうちから m カ所をとり，その m カ所を供給地とする方法であり，${}_nC_m$ 通りの組合せについて ϕ を計算しそのうちの最小なものを解とする。

2. Random Destination Algorithm

これは 1 から n の間に正規化した m 個の乱数をとりそのm個の数に対応するmカ所の需要地を供給地とする方法であり，これを好きな回数だけくり返して，そのうちの最小なものを解とする。

3. Successive Approximation Algerithm

これはまず 2 カ所の供給地問題として 1 の方法で解き，次に供給地を一つ増やして，それをある需要地に置き，前の 2 カ所の供給地から供給される需要地のうちどれを今度の供給地から供給するようにしたらよいかを調べる。そしてこの三つ目の供給地をすべての需要地に置いてそれぞれの ϕ を計算しそのうちの最小を与えるものを解とする。そしてこのようにして供給地を一つづつ増やして行く。

4. Alternate Lecation and Allocation Algorithm

これはまず n カ所の需要地を任意に m 個の集合に分割し，そのおのおのの集合において一つの供給地の最適位置を正確に求める。そして各需要地に対してそれが属する供給地よりも他の供給地から供給した方が ϕ 小さくなるかどうかを調べ，もしそうならそうなるようにに始めの分割を訂正して新しいm個の集合を作る。そしてこの操作を収束するまでくり返す。これは単調減少であるから必ず収束する。

これらの 4 つの方法をいろいろ計算してみた結果，かなりよい近似解がえられたとのべている。これは最適解は sharp なものではないためで，sharp ではないということを ϕ の分布などから説明している。

最後に2.の方法が計算時間を考えた場合ほぼ満足しうる結果を与えることが分ったとのべている。

（高木正英）

Lincoln, T. L, & Weiss, G. H.; A STATISTICAL EVALUATION OF RECURRENT MEDICAL EXAMINATIONS; *JORSA 12, No. 2 1964, pp 187～205*

ガンの早期発見に定期的な検診が重要であることは，最近われわれの周りでも強調されているが，この論文はそのような定期検診のメカニズムの数学的モデルを提案している。著者はガンを念頭に置いているがモデル自体はどのような病気にも適用することができる。

時点 t で，患者が発病する確率を $u(t)$ とする。問題は，発病後，病気が発見されるまでの時間である。そのために発病しない人は考慮に入れないことにして

$$\int_0^t u(t)dt=1$$

とおく，$\alpha(t)$ を発病後 t 時点で病気が見逃される率とする。

そのとき，検診の間隔の長さに対する密度函数 $\phi(x)$ から，発病後，病気発見までの時間の長さの密度函数はいくつかの積分方程式によって導びかれる。

すなわち，

$\omega(t)$：$\omega(t)dt=t$ から $t+dt$ の間に検診が行なわれる確率

とすると

$$\omega(t)=\int_0^t \omega(\tau)\phi(t-\tau)d\tau$$

$\phi(t,x)$：$\phi(t,x)\,dx=$ 時点 t で発病したとき最初の検診までの時間が x と $x+dx$ の間にある確率

とすると

$$\phi(t,\ x)=\phi(t+x)+\int_0^t \omega(\tau)\phi(t+x-\tau)d\tau$$

$f(t,x)$：時点 t から $t+x$ まで病気が見逃された後，$t+x$ で検診が行われる確率の密度

$\eta(x)$：発病後発見までの時間密度

とすれば

$$\eta(x)=\int_0^\infty u(t)[1-\alpha(x)]f(t,x)dt$$

この解は一般には求められないが，特別の ϕ,α に対応するモーメントを与えている。

次に $u(t)$ を平均20年，標準偏差10年のガンマ分布とするとき，$\alpha=0$ としていくつかの数値を与えている。発病後発見までの期間が半年を越える確率が $\varepsilon(=0.05, 0.1, 0.2)$ を越えないような検診間隔の値，また $\alpha=0$ および $\alpha(t)=exp(-3t)$ のとき，等間隔で検診を行なった場合の発見までの期間の分布，およびその期待値，検診間隔が完全にランダム（＝ポアソン過程）であるときの，発見までの時間の分布を求めている。当然のことながら，一定間隔のときと，ランダムな間隔の場合とでは，間隔の期待値が同じでも，後者の方が発見までの期間の期待値は2倍くらいになる。

（竹内　啓）

Dantzig, G. B. & Johnson, D. L.; MAXIMUM PAYLOADS PER UNIT TIME DELIVERED THROUGH AN AIR NETWORK; *JORSA 12, No. 2, 1964, pp 230～236*

航空路網を通じて，なるべく能率よく貨物を運ぶにはどうすればよいかと考える。2つの基地の間には，所要時間と，運搬可能な貨物の重量とが与えられている。そのときどのような航路をえらべば，単位時間当りの運搬量が最大になるかを考える。この問題が普通の maximum flow の問題と違うところは，基地間の所要時間が考慮に入れられることです，また shortest route の問題と違うところは，運搬量を考慮しなければならないことである。

この問題は次のようにして解くことができる。

1. 最短時間の径路をまず求める。(時間 T_1)
2. その径路で運搬可能な量 (L_1) を求める。
3. 運搬可能な量が L_1 以下の径路をすべて除いて，上と同じことを行い，T_2，L_2，……を求める。
4. $F_i=L_i/T_i$ とし，F_i の中で最大の値を与える径路に取れば，それが解になる。

次の問題は，中継基地のサービス能力が限られている場合である。今度は定常状態を考え，必要な飛行機数は問題にしないことにして，単位時間当りの運搬量を最大にすることを考える。従って所要時間は考慮しない。

この問題は，あらゆる可能な径路をとって考えれば，一つの線型計画法の問題になることは当然である。しかしこの問題では，変数の数（径路の数）が制限条件の数（中継基地）にくらべて非常に多くなるという特徴がある。そこで次のような計算手続きをとる。

1. まず適当な基底をきめ，それに対応する双対変数（価格）の値を求める。
2. その価格を対応する基地に与え，その基地を通

過する場合の費用とする。

3. あらゆる径路について，費用の合計 S と，可能運搬量 L を求め，もしつねに $S-L\geqq 0$ ならば計算を終る。

4. もしある径路について $S-L<0$ ならば，その径路を基底に入れて，上の過程をくり返えす。

このような手続きにより，あまり大きくない問題ならば手計算で解を求めることができる。

（竹内　啓）

Bernholtz, B ; A NEW DERIVATION OF THE KUHN-TUCKER CONDITIONS; *JORSA 12, No. 2, 1964, pp 295—299*

Non-linear programming の基本定理としての Kuhn-Tucker の定理はよく知られているが，ここでは，それをやや一般化（！）した形で，古典的な陰函数の定理から導びいている。まず等式条件の場合について，次のことを証明する。

補助定理：$g(x)$，$x=(x_1\cdots x_n)$ は微分可能，$f_m(x), m=1\cdots\cdots M$ は連続微分可能とする。$g(x)$ が条件 $f_m(x)=0$ の下で，$x=x^0$ で局所最大となるとき，もし次の条件 A，B のいずれかがなり立つならば，

$$\partial g/\partial x_m\Big|_{x^0}-\sum u_m{}^0 \alpha f_m/\alpha x_n\Big|_{x^0}=0 \quad n=1,\cdots N$$
$$f_m(x^0)=0 \qquad m=1,\ \cdots\cdots M$$

を満足するような定数 $u_1{}^0\cdots\cdots u_m{}^0$ が存在する。

条件 A．$\partial f_m/\partial x_n$ を要素とする行列 J の階数が N.

条件 B．J の階数が $n<M$．かつ

$$df_m(x^0:dx)=0 \quad m=1\cdots M$$

となるような任意のベクトル微分 dx に対して，$x=a(t)=[a_1(t)\cdots\cdots a_N(t)]$ と表わされるような微分可能な弧（$-1\leqq t\leqq 1$）が存在して，この弧は面 $f_m(x)=0 \quad n=1,2\cdots\cdots M$ の交わりの上にあり，かつ $x^0=a(0) \quad dx=a'(0)dt$ と表わされる。

この補助定理の証明は容易である。これを用いると，次の定理が得られる。

定理　$g(x)$ は微分可能，$f_p(x)$，$p=1\cdots\cdots P$ は連続微分可能とする。$g(x)$ が条件 $f_p(x)\leqq 0$ の下で $x=x^0$ で局所最大となるならば，

$$(\partial g/\partial x_n)\Big|_{x_0}-\sum u_p{}^0(\partial f_p/\partial x_n)\Big|_{x_0}=0$$
$$f_p(x^0)\leqq 0$$
$$u_p{}^0 f_p(x^0)=0$$

となるような非負の定数 $u_1\cdots\cdots u_p$ が存在する。ただし $f_p(x^0)=0$ となるような M（$0\leqq M\leqq P$）個の方程式について上記の条件 A，B のいづれかが成立っているものとする

ここで $f_p(x)$ のうち N 個を $-x_1,\cdots -x_N$ とし，その他を $f_q(x)$ と表わすと，定理は次のような形になる。これが通常の Kuhn-Tucker 定理である。

$\psi=g(x)-\sum u_q f_q(x)$ とするとき，

$$(\partial\psi/\partial x_n)\Big|_{x_0}\leqq 0,\quad x_n{}^0(\partial\psi/\partial x_n)\Big|_{x_0}=0 \quad x_n{}^0\geqq 0$$
$$(\partial\psi/\partial u_q)\geqq 0 \quad u_q{}^0 f_q(x^0)=0 \quad u_q{}^0\geqq 0$$

（竹内　啓）

Giglio, R. T. & Wagner, H. M. : APPROXIMATE SOLUTIONS TO THE THREE MACHINE SCHEDULINC PROBLEM ; *JORSA 12, No. 2, 1964, pp 305—324*

n 個の製品と3つの機械にかける問題を考える。ここで機械にかける順はすべての製品について同一で決まっているものとする。そうすると，製品をかける順序は，すべての機械について同じにすればよいことうわかっているから，n！個の順序の中から，最も空き時間を少くとするものを求めればよい。

$n=6$ として，いろいろな解法の実験を行った。まず6つの例について，Integer LP による解法を適用した。そのとき，等式条件を不等式条件でおきかえるための附加条件をいろいろな形で与えて，6通りを試みた，その結果，必要としたくり返えし計算の回数は，50回から最高は10,000回で終らなかった。問題ごとに，また附加条件の与え方によってくり返えしの回数に著しい差が見られる。

次に $n=6$ の問題を，各所要時間を一様乱数でランダムに生成して100回作った。そうしてそれぞれについて6！=720通りの順序の平均所要時間，その中の最小値をそれぞれ（数え上げ方式によって）求め，その分布を求めた。

平均時間の平均=148.8
〃　標準偏差=18.12
最小時間の平均=125.95
〃　標準偏差=12.46

どちらの分布もほぼ正規分布に近くなっていた。また2つの値の相関ははっきりしなかった。

次にこの同じ100個の問題に対して，3つの近似的な方法を考え，その効率を比較した。

1. 解を整数に限らないＬＰとして解いて，得られ

た値を適当に丸める。

2. 第1の機械と第2の機械，第2の機械と第3の機械の所要時間をそれぞれ加えて，2つの機械に関する問題として解く Johnson の方法

3. モンテカルロ法

1の方法の平均値は142，標準偏差は20.18，また1による解と最適値との比の平均は0.89であった。また2の方法については100のうちの20の場合について計画し，最適値の平均127.9に対して，131.7という平均値を得た，3については経験的な値は求めなかったが，確率分布について若干の値を計算した。

結論としていえることは，Integer-programming の方法は実際上有効でないこと。LPの結果をまるめる方法もあまりよいといえないこと，これに対して Johnson の方法はかなり効率がよいことである。

（竹内　啓）