文献抄録

Theil, H., S. Wage : Some Observations on Adaptive Forecasting. *Management Seience, Vol. 10 (1964), 198〜205.*

“Adaptive” あるいは “Exponential” 予測とは，最新の観測値および一期前の計算値という2つの事実を荷重和に基いて行なう予測法である。その特徴として，予測の手続を容易，迅速に行なうことができ，費用も少い。また，予測に要する情報はきわめて少くて済む。この論文では，adaptive予測法を単純化し，その特性を明かにするとともに，予測法のベースとなるモデルを導入して予測値の平均自乗誤差を最小にするための weight を求めている。

いま，時系列 x_t をつぎのように分離して考えてみる。

$$x_t=\bar{x}_t+s_t+\text{residual} \tag{2}$$

$$\bar{x}_t=\bar{x}_{t-1}+e_t \tag{1}$$

ここで $\bar{x}_t$ は，trend valve, e_t は trend change, s_t は季節変動である。ここで，trend value x_t の計算法を考慮すると，(2)の e_t が未知であるから，前期の e_{t-1} を利用して $\bar{x}_{t-1}+e_{t-1}$ の形の推定が考えられる。しかし，一方 x_t が観測されたとすれば，(1)から x_t-s_t-residual という推定も考えられる。s_t の代りに一周期前（たとえば12カ月前）の s_{t-L} を代用すると，x_t-s_{t-L} は $\bar{x}_t$ に関する1つの新しい事実である。そこで荷重和

$$\bar{x}_t=\alpha(x_t-s_{t-L})+(1-\alpha)(\bar{x}_{t-1}+e_{t-1}) \tag{3}$$

を作ると，これは $\bar{x}_t$ を最新の観測値 (x_t) と前期の計算値 ($\bar{x}_{t-1}$, e_{t-1}, s_{t-L}) で表わしたことになる。e_t, s_t も似たような荷重和によって表現される。ところで，時点 t までの情報を用いて $t+\tau$ の値 $x_{t+\tau}$ を予測する predictor P_t を

$$P_t\,x_{t+\tau}=\bar{x}_t+\tau e_t+s_{t-L+\tau}$$

で定義すると，若干の計算の後(3)の $\bar{x}_t$, および e_t, s_t はつぎのように書ける。

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_t&=(\bar{x}_{t-1}+e_{t-1})-\alpha f_{t-1,t}\\ e_t&=e_{t-1}-\alpha\beta f_{t-1,t}\\ s_t&=s_{t-L}-(1-\alpha)\gamma f_{t-1,t}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ここで，$f_{t-1,t}=(P_{t-1}x_t-x_t)$ であって，一期前になされた x_t の予測値の誤差を示し，α, β, γ などは〔0, 1〕内の値をとる荷重係数である。(4)によれば，前期 $t-1$ における諸量が最新のデータ x_t によって修正される過程が明かになろう。

ところで，α, β, γ をいかにきめればよいかと言うことであるが，そのためには x_t の確率過程のモデルを想定しなければならない。1例として，季節変動 s_t を無視し，(1)の residual は観測値に直接加わる random disturbance u_t と trend change e_t に加わる random dist. v_t からなるとし，予測誤差の自乗平均を最小にする weighting が求められ，数表に示されている。ただし，u_t, v_t は相互に，また，t についてもそれぞれ無相関と仮定されている。

（倉橋和夫）

Nerlove, M., and Wage, S.: On the Optimality of Adaptive Forecasting. *Management Science, Vol. 10 (1964), 207〜224.*

前出の論文 “Some Observations on Adaptive Forecasting” において取扱われているモデルに対し，前著者 Theil, Wage 両氏の場合とは若干観点を異にして考察をすすめ，彼等の提案している Adaptive Farecasting の手法がいかなる数学的根拠に基いているかを明らかにしている。

採用されているモデルは前論文の場合と同様季節変動を無視し，

$$x_t=\xi_t+u_t,$$

$$\xi_t=\xi_{t-1}+\eta_t,$$

$$\eta_t=\eta_{t-1}+v_t$$

と示される。ここに x_t は確率過程，ξ_t は x_t の mean, η_t は trend change, u_t, v_t は random disturbance で，

$$E(u_t)=E(v_t)=0$$

$$E(u_t,u_{t'})=\begin{cases}\sigma_u^2,\ t=t' & \text{に対し,}\\ 0,\ t\neq t' & \text{に対し,}\end{cases}$$

$$E(v_t,v_{t'})=\begin{cases}\sigma_v^2,\ t=t' & \text{に対し,}\\ 0,\ t\neq t' & \text{に対し,}\end{cases}$$

$E(u_t,v_{t'})=0$, すべての組合せ (t,t') に対し，

を満足するものとする。

このとき x_t は非定常過程であるが，その2階差分 $y(t)$ は

$$y(t)=\triangle^2x_t=v_t+\triangle^2u_t$$

となり，autocovariance 函数

$$\varphi_{yy}(\tau)=E[y(t)y(t-\tau)]=\begin{cases}(g^2+6)\sigma_u^2, & \tau=0,\\ -4\cdot\sigma_u^2, & |\tau|=1,\\ 1\cdot\sigma_u^2, & |\tau|=2,\\ 0\cdot\sigma_u^2 & |\tau|>2,\end{cases}$$
$$(g^2=\sigma_v^2/\sigma_u^2)$$

を持つ定常過程となる。この $y(t)$ に対して1時点先きの Exponential Forecasting を考えると，予測値 y^* は

$$y^*(t+1)=(2-\alpha-\alpha\beta)[y^*(t)-y(t)]-(1-\alpha)[y^*(t-1)-y(t-1)]$$

予測誤差 $f(t+1)=y^*(t+1)-y(t+1)$ は，

$$f(t+1)-(2-\alpha-\alpha\beta)f(t)+(1-\alpha)f(t-1)=-y(t+1)$$

と与えられる（ただし α,β は Exponential Forecasting における重みで，予測誤差に対する規準を与えればそれから最適に定められるべきもの）。一方 $y(t)$ が定常過程であることから $y^*(t+1)$ に対し Wiener 流の線型予測が可能で

$$y^*(t+1)=\sum_{\tau=0}^{\infty}\hat{w}(\tau)y(t-\tau)$$

と与えられ，重み $\hat{w}(\tau)$ は予測誤差の2乗平均値を最小ならしめるよう決定される。計算の結果，すべての最適重みは最初の2つの重み $\hat{w}(0)$，$\hat{w}(1)$ にのみ依存し，$\hat{w}(0)$，$\hat{w}(1)$ は時系列の唯一のパラメータ，分散比 $g^2=\sigma_v^2/\sigma_u^2$ にのみ依存していることが明らかにされた。そして $\hat{w}(0)$，$\hat{w}(1)$ から Exponential Forecasting の重み α，β は一意的に決定され，かつその値は $y(t)$ を考えずに t_t に対して Exponential Forecasting をおこなったときの最適重み α，β に全く一致していることが導出されている。最後に $g^2=\sigma_v^2/\sigma_u^2$ の推定誤差が予測誤差に及ぼす影響について検討され，きわめて insensitive であることが示されている。（村尾　洋）

Cord, J.: A Method for Allocating Funds to Investment Projects When Returns Are Subject to Uncertainty. *Management Science, Vol. 10 (1964), 335～341*

投資問題を考える場合，投資に伴なう将来の収益については，かなり大きな不確実さが附随し，経営者としては，収益の期待値とともにこのような不確実さについても，つねに関心をもっている。この論文はこのような問題について，Markowitz の portfolio problem の類推から一つの定式化を行ない，最適投資法を与えている。

いま，ある企方が，限られた額，I，の資金を N 箇の投資案からいくつかを選択して配分投資することにしよう。各投資案に要する資金額 I_i，および収益率 r_i が推定されている。ただし，収益率 r_i の推定は不確実であって，その不確実さは，何らかの方法（たとえば，主観的に）で分散 v_i として推定されるものとする。

そこで問題は，資金の制限の他に，投資全体に伴う収益率を分散をある一定値，V，内に収めた上で，収益を最大にすることである。すなわち，

$$T=\sum_{i=1}^{N}p_iX_i \qquad (1)$$

を条件式

$$X_i=0 \text{ or } 1 \qquad (2)$$
$$\sum_{i=1}^{N}I_iX_i\leqq I \qquad (3)$$
$$\sum_{i=1}^{N}w_iX_i\leqq V \qquad (4)$$

のもとで最大になるように X_i を決定することである。ここに，$p_i=r_iI_i$ で，各投資案に対する年収の期待値を示し，$w_i=I_iv_i/I$ は，分散 v_i を投資額 I_i と全投資額 I との比で weighting したものである。

Lagrange 係数 λ を使うと条件式(4)が消えて，問題を条件(2)，(3)の下で

$$\sum_{i=1}^{N}p_iX_i-\lambda\sum_{i=1}^{N}w_iX_i\rightarrow\max$$

という形に変形できる。ただし，λ は(4)を満足するまで変化させる。

このような問題は，以下のように反復式に定式化し直して dynamic programming によって解くことができる。

$$f_N(I')=\max_{X_N,0\leq I'\leq I}[p_NX_N-\lambda w_NX_N+f_{N-1}(I'-I_NX_N)],$$
$$f_1(I')=\max_{X_N,0\leq I'\leq I}[p_1X_1-\lambda w_1X_1],$$
$$X_N=0 \text{ or } 1$$

値例として，$N=25$ の場合について，IBM 7070 で解かれた結果が示されている。式(4)を満足する λ を求めるために反復を7回繰返し，計算時間は全部で12分を要したが，そのうちかなりの時間は type writing に費したということである。（倉橋和夫）

TAINITER, M.: AN APPLICATION OF A MARKOVIAN MODEL TO THE PREDIC-

TION OF THE RELIABILITY OF ELECTRONIC CIRCUITS, IEEE *Transactions on RELIABILITY Vol. R-12, No. 4, pp. 15～25*

reliability についてこれまでに発表されている論文は大てい素子を直並列に結合してできた系の故障確率を素子の故障確率で表現し，その場合特に素子については故障か，そうでないか，という2通りの可能性だけを考えてきた。この論文では，素子 j のとる状態を一般に2通り以上の r_j 通りに分け，$j=1, \cdots k$ として，系の状態は全部で $\Pi^k_{i=1} r_j$ 通りと考え，このうち系の故障は各素子の状態のある結合によっておこりそれが f 通りあるものとしている。時間が経過するとき，各素子の状態も移り変るが，この推移がマルコフ過程をなし，定常な推移確率が与えられていれば，系全体の状態の推移もマルコフ過程として表現され，各素子の推移確率から系の状態の定常推移確率が $\prod_j r_j \times \prod_j r_j$ の行列として求められ，任意の時点における系の故障確率が初期条件と推移確率から計算できると述べている。すなわち題名の示す通り，電子機器系の reliability を求めるのにマルコフ過程の考え方を利用したものである。このようなモデルは上記のように各素子の状態を単に“故障か否か”という2通りに分けるのでなく，いくつかの中間的な状態を考えに入れることができ，それらのいくつかの状態の組合せで系としてはじめて故障がおこるという場合を扱える点で，また故障率の時間的な変化をうまく表現できる点で従来のモデルよりも一層現実に近づいているといえるであろう。しかし，著者が述べている通り，定常マルコフ過程の前提条件が実際問題において果して成立しているかどうかの判定法や，推移確率行列をデータから推定する方法は実際にはなかなか面倒であろうし，特に複雑な系を扱うと素子の状態の区分を工夫するとしても，$\Pi r_j \times \Pi r_j$ が非常に大きくなり，大型の計算機でも全く手が出ない程のぼう大な計算が必要となる。この論文の最後に3つの数値計算例が出ているが，これをみるとこのモデルの長所と同時に現時点における実用上の制約が明らかに知られる。

（阿部俊一）

TAINITER, M.: ESTIMATION, HYOTHES-IS TESTING AND PARAMETER CORRELA-TION FOR MARKOV CHAINS, IEEE *Transactions RELIABILITY Vol. R-12, No. 4, pp. 26～35*

別掲の同じ著者の論文：AN APPLICATION OF A MARKOVIAN MODEL TO THE PREDICTION OF THE RELIABLITY OF ELECTRONIC CIRCUITS. と対をなすもので，このようなモデルで実際問題を扱うときに必要となる統計的手法について述べている。すなわちマルコフ連鎖の推移確率の最も推定量として

$$\hat{p}_{ij} \sum_{\tau=1}^{r} n_{ij}(\tau) \Big/ \sum_{\tau=1}^{r-1} n_i(\tau)$$

を与え（ただしここに $n_{ij}(\tau)$ は時刻 $\tau-1$ に状態 i にあり，時刻 τ には状態 j にあることが観測された素子の数，$n_i(\tau-1)=\sum_{j=1}^{m} n_{ij}(\tau)$），また推移確率の定常性を検定する方法として尤度比検定と χ^2-検定を述べ，簡単な数値例をあげている。次にマルコフ連鎖が単純連鎖という仮説を対立仮説：2重連鎖に対して検定と χ^2-検定を説明している。最後に1つの素子の動作状態を特徴づける2つのパラメタがあってそれぞれ状態の移り変りは単純な定常マルコフ連鎖をなしているとき，2つのパラメタの状態推移の独立性を検定する（対立仮説は“それが独立でない”として）ことも χ^2-検定として示されている。この論文は以上の方法の紹介を主眼とするもので厳密な証明などは一切省かれているが，それを要求する読者のために参考文献がいくつかあげられている。

（阿部俊一）