Л.С.ЛОНТРЯГИН, В.Г. ЪОЛТЯНСКИИ, Р.В. ГАМКРЕЛИДЭЕ, Е.Ф. МИШЕНКО : Матeматичёкая теория оптималbных процессов, 1961 (英訳 L. S. Pontryagin V.G. Boltyanskii. R.V. Gamkreldze, and E.F. Mishchenko : The mathematical theory of optimal processes John-Wiley) ポントリヤーギン・ボルチャンスキー・ガンクレリーゼ・ミシチエコ著最適過程の数学理論。

R. Bellman の動的計画法がミサイルの制御に関連して発達して来たと同じく，ソビエトにてポントリヤーギンを中心に最大原理 maximum Principle といわれる定理を基礎とした最適制御のための数学理論が開発された。まず本書の構成を紹介すると

序論

第1章　最大原理

第2章　最大原理の証明

第3章　線型の時間最適化問題

第4章　種々の問題

等5章　最大原理と変分学の関係

第6章　状態空間に制限のあるときの最適過程問題

第7章　統計的最適制御問題

参考文献　　となっている。

最大原理とは何かを手っとり速く紹介するには，実例について最大原理の使い方を示すのがよいと思われるので以下をこれに当てよう。

〔問題〕振子の長さ1質量1の単振子の質点の位置を表わす座標を x とし，この質点に加わる外力を U で表わすと，ニュートンの法則により微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=U$$

がたつ。ここで外力 U には制限 $|U|<1$ があるとしこの微分方程式にしたがって運動する質点を最も速やかに原点($x=0$)にもって来て静止させる

$$\left(\frac{dx}{dt}=0\right)$$

ためには加えるべき U 外力をどうすればよいかを解析したい。

〔解法〕$x=x^1$,

$$\frac{dx}{dt}=x^2$$

とおいて方程式を変換すると

$$\frac{dx^1}{dt}=x^2 \qquad (1)$$

$$\frac{dx^2}{dt}=-x^1+U \qquad (2)$$

このとき最大原理によれば，補助の変数 ψ_1, ψ_2 を導入してまず H 一函数（力学で知られている Hamiltion 函数に似ている）を次のように求める。

$H=$(第1式の右辺)$\times\psi_1+$(第2式の右辺)$\times\psi_2$

ただしここで ψ_1, ψ_2 は具体的意味を考える必要はなく，解法の速中で利用する補助の変数で，その変数の定義式は以下に述べるように函数 H を使って書いた微分方程式であると考えればよい。この場合

$$H=\psi_1x^2-\psi_2x^1+\psi_2U$$

で，ψ_1, ψ_2 を求める式は $\dfrac{d\psi_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x^1}$

$$\frac{d\psi_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^2}$$

である。この場合には,

$$\frac{d\psi_1}{dt}=\psi_2,\quad \frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1$$

したがって $\dfrac{d^2\psi_2}{dt^2}=-\psi_2$

これを解くと $\psi_2=A\sin(t-\delta_0)$ となる。ただし A_1, δ_0 は積分定数である。これをもとの函数 H に代入すると H の形が求まる。

$$H=\psi_1x^2-\psi_2x^1+A\sin(t-\delta^0)U$$

ここで，最大原理によると外力 U は H が最大になるように取ればよいことが証明されているので

$$U=\mathrm{sign}\psi_2=\mathrm{sign}(A\ \sin(t-\delta o))$$
$$=\mathrm{sign}(\sin(t-\delta_0))\quad (\text{signは符号の意味})$$

ということが最適とわかる。さらにこのような外力を加えたときの質点の運動も計算はできるが，ここでは紙数の関係で省略する。

以上を要するに最もよい外力の加え方，又は最もよい舵のとり方，又は制御の仕方を求めるのに函数 H を最大にするやり方を取ればよいという定理が最大原理である。その証明（本書第2章）はかなりの数学知識を必要とするが，応用面にかぎれば，一応微積分の素養があれば理解することは可能で，自動制御関係の技術や化学工学におけるプロセス制御技術者には特に必要な知識である上に，OR研究者としても最適化がORの目的である以上，見のがすことの出来ない理論であると考えられる。

なお参考までに，ポントリヤーギンは現代ソビエトの偉大な数学者の1人で盲目であることはよく知られている。彼の著述は明快かつ厳密でしかも独特の手法を用いることで定評がある。本書もその例にもれない。　　　　（紹介　小林竜一）