信頼性と経済性を考慮した設計法について

近　藤　次　郎*

は　し　が　き

構造物のうける荷重の確率分布法則が既知のとき，どのように設計強度をたかめておいても，例外的に過大な荷重が加わることはありうるから100％の信頼性を保つことは理論上不可能である。一方構造物の建設または補修，再建の費用は構造法が一定であると重量に伴なって増大し，多くの場合重量に比例すると考えてよい．したがって一般には重量を軽くすればする程，経済的であるが同時に信頼性が低下して破壊のための損失の期待値が増大する。そこでこれらの要素をすべて考慮して一番合理的な設計法を考えることを問題としよう。

以下，第1節では経済性の考え方，第2節では寿命と安全係数，第3節では経済重量の決定法第4節では典型的な荷重分布についての計算法，第5節では結論をのべる。

1.　経済性の考え方

構造物の建造費C_0は材料費C_{01}，加工費C_{02}，組立費C_{03}，の和である。

材料費C_{01}は構造物の重量に比例するとみてよい。すなわち

$$C_0=C_{01}+C_{02}+C_{03} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$C_{01}=K_B W \qquad \cdots\cdots(2)$$

K_Bは材質によって決まる単位重量価格である。加工費C_{02}，組立費C_{03}もそれぞれWに比例するから

$$C_{02}=K_A W,\quad C_{03}=K_C W \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。K_Aは材質と加工法，K_Cは構造法によってきまる定数である。

以上をまとめると結局，構造物全体の価格について

$$C_0=(K_B+K_A+K_C)\ W=KW \qquad \cdots\cdots(4)$$

となる。よってWを小さくする程，すなわち軽量にすればする程経済的であることは直ちにわかる。但し，使用目的を達成することは十分できなくてはならない。建物や橋梁等の動く部分のない静的構造物については稼動費C_1は補修費が主で，これは建設費に対しては無視できる。

しかし船舶，車輛，航空機または機械のような動的構造物の場合に稼動費C_1はWの関数である。よって

$$C_1=g(W) \qquad \cdots\cdots(5)$$

*東京大学工学部　昭和38年10月3日　第14回　研究発表会講演　12月28日受理「経営科学」第7巻3号

である。$g(W)$ はWの増加関数である。$g(W)$は多くの場合にWの１次式であらわされる。C_1 は使用期間全体Tの合計を考えておけばよい。

$$C_0 < C_1, \qquad \cdots\cdots(6)$$

でかつ $g(W)$ が Wによって急激に増加するような場合にはWを小さくすることに一層重要な意義がある。Wを小さくするためにC_{01}，C_{02}，C_{03}が高くなっても軽量な材料や構造法を使うことがある。しかし軽量であっても強度は十分でなくてはならない。それを次に考えよう。

定められた使用目的を達成する（すなわち効用が一定であるとする）ための構造物の設計強度Sは一般に W^n に比例する。

$$S = \mathrm{m}_B W^n, \qquad n < 1. \qquad \cdots\cdots(7)$$

m_B は材質によってきまる定数である。構造物の全長は多くの場合使用目的で決められるから強度は断面積に比例する。重量をWとするとき基準長は $W^{\frac{1}{3}}$ に比例するから，強度について

$$S = \mathrm{m}_B W^{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(7a)$$

が成立する。全長と巾が指定されるものでは $n = 1/3$ となる。m_B は厳密には構造法と材質によってきまる定数である。

2. 寿命と安全係数

構造物が使命を達する期間中Tに経験する最大荷重 L_{max} はTの関数である。

$$L_{max} = h(\mathrm{T}) \qquad \cdots\cdots(8)$$

疲労破壊が問題になるときに L_{max} は最大繰返し数を考えておけばよい。このとき設計強度Sについて

$$L_{max} > S \qquad \cdots\cdots(9a)$$

となると破壊がおこり，

$$L_{max} \leqq S \qquad \cdots\cdots(9b)$$

のときには安全である。

$$\frac{S}{L_{max}} = \eta \qquad \cdots\cdots(10)$$

は安全係数である。信頼度を考えるときすでに安全係数は見込んであるのでとして $\eta = 1$でよい。

荷重Lの単位期間の確率密度関数を

$$f\ (L) \qquad \cdots\cdots(11)$$

とすると単位期間中に許容最大 L_{max} の出現する確率は

$$\alpha = \int_{L_{max}}^{\infty} f\ (L)\, dL \qquad \cdots\cdots(12)$$

である。L_{max} は単位期間中にただ１回だけ出現するものと考えておく。累積分布関数

$$F\ (L) = \int_0^L f\ (L)\, dL \qquad \cdots\cdots(13)$$

を用いると

$$\alpha = 1 - F\ (L_{max}) \qquad \cdots\cdots(12a)$$

となる。また

$$F^*(L)=\int_L^\infty f(L)\,dL=1-F(L) \qquad \cdots(13a)$$

を用いると

$$\alpha=F^*\ (L_{max}) \qquad \cdots(12b)$$

のようになる。

使用期間T中に L_{max} が1回も出現しない確率 P_0は，確率 $\beta=(1-\alpha)$ の事象T回の繰返し試行と考えて

$$P_0=\beta^T=(1-\alpha)^T \qquad \cdots\cdots(14)$$

となる。P_0 は信頼性でTが与えられているとき，α を決めれば決まる。α の決め方は次節で説明する。

3. 経済重量の決定法

構造物の使用期間を単位期間のT倍とする。建設費C_1，破損または破壊の場合の修理または再建費C_2も重量Wに比例するとして

$$C_1=\mathrm{K}W, \quad C_2=\mathrm{R}W \qquad \cdots\cdots(15)$$

とおく。構造物が破損または破壊した場合，その損失は，たんに建設費と修理費だけに止まらない。上記 C_1+C_2 以外の損失をDとするとT期間における期待損失は破壊の期待度数で $\mathrm{T}\alpha$ であるから

$$\mathrm{E}(C)=\mathrm{K}W+(\mathrm{R}W+\mathrm{D})\ \mathrm{T}\alpha \qquad \cdots\cdots(16)$$

となる。

設計強度Sを大きくすると最大許容荷量 L_{max} が大きくなるから(14)式によってαが小さくなる。しかし一方では(7)式で重量Wが大きくなる。よって(16)式でWが増加すると第1項は直線的に増大し，第2項はDが大きいと減少する。よってそれらの和が最小になるような重量が存在する。これが経済重量W_*である。

経済重量 W_* は条件

$$\frac{d}{dW}\{\mathrm{E}(C)\}=0 \qquad \cdots\cdots(17)$$

によって決められる。それは

$$(\mathrm{K}+\mathrm{T}\alpha\mathrm{R})+(\mathrm{R}W+\mathrm{D})\ \mathrm{T}\frac{d\alpha}{dW} \qquad \cdots\cdots(18)$$

である。

一方，(7)と(8)より

$$L_{max}=\frac{\mathrm{m}_B}{\eta}W^n \qquad \cdots\cdots(19)$$

であるが，(14a)より

$$\frac{d\alpha}{dW}=\frac{d}{dL_{max}}F^*(L_{max})\frac{dL_{max}}{dW}$$

$$=-f(L_{max})\cdot n\frac{\mathrm{m}_B}{\eta}W^{n-1}$$

となる。ここで簡単のため

$$L_{max}=\omega \qquad \cdots(20)$$

とおいて，(18)を書き直すと

$$\{K+TR\ F^*(\omega)\}-n\ \ TR\ \omega f(\omega)-n\ DT\sqrt[\eta]{\frac{\eta}{m_B}\omega}\ f(\omega)=0$$

となる。

これは

$$\gamma+F^*(\omega)-n\omega f(\omega)-\delta\sqrt[\eta]{\omega}\ f(\omega)=0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

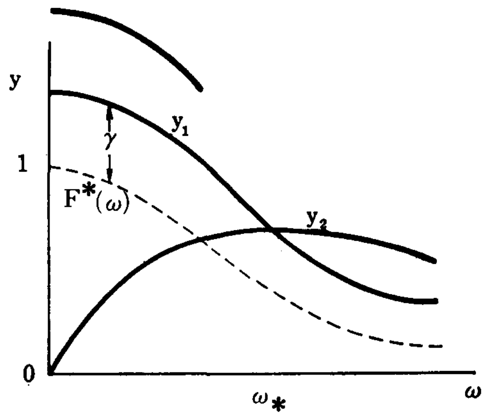
$$\gamma=\frac{K}{TR},\quad \delta=\sqrt[\eta]{\frac{n}{m_B}}\ \frac{D}{R} \qquad \cdots\cdots(21a)$$

と書ける。

この超越方程式(21)を解くには，

$$y_1=\gamma+F^*(\omega),\quad y_2=(n\omega+\delta\sqrt[\eta]{\omega})\ f(\omega)$$

とし，ω—y 面内の曲線の交点の座標から図式に求めることができる。このようにして最適な ω 値 ω_* が決定されれば，(20)，(19)より最も経済的な重量 W_* が決められる。



超越方程式(21)は γ と δ の二つのパラメタを含み，したがってω_*はこの値に影響される。通常

$$K\geqq R,\ \ T\geqq 1$$

であるから，γ の値は大体

$$1\geqq\gamma>0$$

の範囲に入るものと考えてよい

一方，

$$1\geqq\eta,\ \ m_B\geqq 1$$

であるから

$$1\geqq\sqrt[\eta]{\frac{n}{m_B}}$$

である。この値は大体1に近い，またRは単位重量あたりの再建費用でDは破壊1回につき生ずる総損失であるから，この構造物の重要度（使命）によって決まる。通常

$$D >> R$$

と考えてよいから結局

$$\delta >> 1$$

となる。

4. 荷重分布が特別な場合の ω_* の決定

荷重分布 $f(\omega)$ が指数分布，正規分布，対数正規分布の場合について ω_* を決定する。ここで

$$n=\frac{2}{3}$$

ととる。

〔a〕指数分布

$$f\ (\omega)=\frac{1}{b}exp\ (-\frac{\omega}{b}),\ \omega\,[0,\ \infty]$$

$$F^*(\omega)=1-exp\ (-\frac{\omega}{b})$$

であるから(21)は

$$\gamma+1-exp\,(-\frac{\omega}{b})-\frac{2}{3}\ \frac{\omega}{b}exp\ (-\frac{\omega}{b})-\delta\frac{w^{\frac{2}{3}}}{b}exp\ (-\frac{\omega}{b})=0$$

となる。よって

$$exp\ (\frac{\omega}{b})=\frac{1+\frac{2}{3}\frac{w}{b}+\delta\frac{w^{\frac{2}{3}}}{b}}{\gamma+1}+\frac{1+\frac{2}{3}\frac{w}{b}+(\delta b^{-\frac{1}{3}})(\frac{w}{b})^{\frac{2}{3}}}{\gamma+1} \qquad \cdots\cdots(22)$$

となる。パラメタ b;γ, δ のいろいろな値に対する ω_*の数値を 図式計算で求めると第1表のようになる。式(22)よりも明らかに ω_* は γ が減少し，δ が増大するときに増加する。すなわち使用期間が長いとき，破損の損失が大きいときには ω_* が大きく，設計荷重を大きく，強度が大きい構造物を建設するのが有利であることがわかる。これに反して修理費用Rが増大すると γ は減少するが δ も減少する。よって設計強度の増減に対しては一般的に述べることは難しいが，γ の減少による ω の増加の方が著しいから多くの場合には最適設計荷重は増加する。また建設費Kが増すと γ が増すから設計荷重を小さくする必要がある。

第　1　表　ω_* の決定，指数分布

δ	$\gamma=0.0$		$\gamma=0.5$		$\gamma=1.0$	
	b=1	5	1	5	1	5
5	2.5	2.0	1.9	—	1.4	—
10	3.3	6.0	2.8	2.0	2.4	—

荷重分布の母数bは標準偏差である。その値の設計荷重に及ぼす影響は複雑である。すなわち(22)でb（＞1）が増すと右辺の係数 $\delta b^{-\frac{1}{3}}$ は減少するから，ω/b を横軸にとった右辺の値のグラフは低くなる。よって曲線 y=exp（ω/b）との交点は左方に移動するが，bが大きいから ω_*の値は必ずしも減少するとは云えない。

〔b〕正規分布

$$N\ (\mu,\ \sigma^2):f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ exp\left\{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad \omega\ [-\infty,\ \infty]$$

理論的な ω の範囲は $-\infty$ と $+\infty$ との間であるが，実際には $\omega<0$ の範囲は意味がない。よって少なくとも $\mu=\sigma$，μ が σ に較べて相当大きい場合，$\mu\geq 2\sigma$ 程度と考えてよい。標準化するため新変数，

$$u=\frac{\omega-\mu}{\sigma},\quad \phi\ (u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\ \Phi^*(u)=1-\int_u^\infty \phi(u)\,du$$

を導入すると(21)は

$$\gamma+\Phi^*\ (u)-\frac{2}{3}\ (\mu+u\sigma)\frac{1}{\sigma}\phi\ (u)-\delta\ (\mu+u\sigma)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sigma}\phi(u)=0$$

となる。これは

$$\frac{\gamma+\Phi^*\ (u)}{\phi(u)}=\frac{2}{3}\left(u+\frac{\mu}{\sigma}\right)+\delta\sigma^{-\frac{1}{3}}\left(u+\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(23)$$

と書ける。この場合には分布の母数 μ，σ のほかに γ と δ とがパラメタになる図式計算によって u_* を求めると第2表のようになる。この場合にも γ が減少し，δ が増大するときには u_* が増加し，ω_*，したがって設計荷重が増える。

第　2　表　　u_* の決定．N $(\mu,\ \sigma^2)$．

$\frac{\mu}{\sigma}=1.$

δ, σ ＼ γ		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\delta=1$	$\sigma=0.5$	2.10	1.70	1.30	—	—
	$\sigma=1.0$	2.05	1.55	0.95	—	—
$\delta=2$	$\sigma=0.5$	2.40	1.95	1.75	1.50	1.25
	$\sigma=1.0$	2.30	1.85	1.60	1.35	0.85

$\frac{\mu}{\sigma}=2.$

δ, σ ＼ γ		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\delta=1$	$\sigma=0.5$	2.30	1.85	1.6	1.3	1.0
	$\sigma=1.0$	1.75	1.45	1.75	1.15	1.00
$\delta=2$	$\sigma=0.5$	2.50	2.10	1.90	1.75	1.55
	$\sigma=1.0$	2.45	2.00	1.80	1.60	1.40

荷重分布については平均値 μ が増大すると u_*，したがって ω_* が増加する。しかし σ が大きくなると，μ/σ が一定のときでも，μ が一定のときでも u_* は減少する。たとえば第2表より $\gamma=0.2$ $\delta=1$ として，$\mu=1.0$ の場合，$\sigma=0.5$ と 1.0 に対する u_* の値を読みとればそれぞれ2.30と2.05とになって u_* 自身は減少するが，

$$\omega_* = \mu + \sigma u_*$$

であるから ω_* の値は2.15と3.03となり荷重分布の標準偏差が大きい程，設計荷重が増大することが示される。

5. 結　　論

構造物の強度は構造法が一定であるときには重量に比例して増大する。一方において軽構造の経済的な有用性が提唱されている。しかし軽量化は強度の信頼性を考慮して実施されなくてはならない。ここでは強度が W^n に比例する場合，最も経済的な重量の決定方法を論じ，$n = {}^2/_3$ の場合につき，荷重分布が指数分布や正規分布のときの最適設計荷重 S_*，したがって経済重量 W_* の決定法について述べた分布の母数や γ，δ の若干の値につき S_* を決定するに役立つ数値を計算して第1表と第2表とに示した。

ここに述べた方法はもっと一般に建設費や再建費が(15)のかわりに(5)のような W の一般の式で示される場合，投資の金利を考慮に入れる場合にも拡張できる。また荷重分布が Weibull分布や対数正規分布の場合にもそのまま適用できる。パラメタの変動の範囲を拡げ第1表や第2表のような数表を準備しておくと基本設計に直ちに役立てることができよう。信頼性は(14)によって決めることができる。いろいろな構造法の間の比較にはそれぞれの最適設計の場合の期待損失(16)を較べて最小なものを選べばよい。

一般に設計荷重を大きくとり，重量増加を許しても強度を十分大きくとる必要があるのは次のような場合である。

(1)計画期間が長いとき，(2)平均荷重が大きいとき，(3)建設費が大きいときである。また多くの場合，(4)荷重の分散が大きく，(5)修理費用が増大するときには最適設計荷重が大きくなる。

海外ニュース

カナダのＯＲ学会

カナダのＯＲ学会の現会長は Toronto 大学， IE 学科の A, Porter 教授である。会誌は本学会の英文ジャーナル程度の小形版で1号は20頁である。

この学会は本年5月27―29日， Montreal でアメリカ OR 学会と共催で研究発表会を行う予定で，次のような部会が予定されている。

Strategy of Simulation, Real Time Control System
Military Cost Analysis, Professional Aspect of OR
Strategy of Information Retrieval, Bionics, Biology and OR
Case Histories.

なおこの学会ではＯＲワーカーの給料の調査を行なっているので情報が入り次第，御報告しましょう。