探索努力の配分に関する一考察

多　田　和　夫*

ま　え　が　き

探索努力の配分問題において，指数法則の成立つ連続的な場合は B.O. Koopman によって，又，より一般的に指数法則の仮定を外した連続的な場合は Jacque De Genuine によって解かれている。本文で取扱う「指数法則が成立つ離散的な場合の配分問題」は，

場所1，2，・・n のいづれかに目標物が存在し，その先験的な存在確率 $P_j(j=1,2\cdots n)$ と探索努力 t にもとずく発見確率 1 —exp〔$-r$；t〕とが与えられている場合，発見の綜合確率を最大にするためには探索努力の総量を場所毎に如何に配分すればよいか

という問題であり，数式的には，

条件：　$\sum_{j=1}^{n} t_j=T,\qquad t_j\geq o$

の下で

目的関数：$\sum_{j=1}^{n} P_j\ (1-e^{-\gamma_j t_j})\quad : \sum_{j=1}^{n} P_j=1,\ P_j,\ \gamma_j\geq o$

を最大ならしめる問題である。勿論この解も既に知られている処であって，それ自体は興味の対象となり得ない。しかしながら現実の探索行動における探索者には，

〝こんなに探索しても発見出来ないということは，目標物がここには存在しないことを意味するものではなかろうか。他の場所を探索すべきではなかろうか〟

というような微妙な心理的動揺がつきまとうものである。このような心理的変化を，Bayes の事後確率の変化として理解するならば探索努力の最適配分に関する新たな理解すなわち Adaptive control Process としての理解が生れるであろう。このような理解に立って探索努力の最適配分問題え動的な接近を試みようというのが本文の狙いである。

§1　発見の綜合確率を最大にするような探索

1．1　記号の説明

P_j：場所 j ($j=1,\ 2\cdots,\ n$)における目標物の先験的な存在確率：$\sum_{j=1}^{n} P_j=1$

P_j'：ある探索が行なわれた後の場所 j における目標物の事後的な存在確率

γ_j：場所 j における瞬間発見確率量（探索努力Δtによる発見確率$\gamma_j\Delta$t)

t_j：場所 j に投入する探索努力

T：消費し得る探索努力の総量

* 防衛庁
1963年9月16日受理「経営科学」第7巻2号

$P(T)$：Tに応ずる綜合的な最大の発見確率

$K_j \equiv P_j \gamma_j$ (K'_j, K''_jはP'_j, P''_jに対応する)

$$a_j \equiv \sum_{k=1}^{j} \gamma_k^{-1}$$

$$b_j \equiv \sum_{k=1}^{j} \gamma_k^{-1} \log K_k$$

1. 2 予備的考察

先づ準備として，探索開始前の状態について，

$$P_3\gamma_1 = P_2\gamma_2 = \cdots = P_k\gamma_k > P_{k+1}\gamma_{k+1} \geq \cdots \geq P_n\gamma_n : k=1,\ 2,\ \cdots n\text{-}1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成立っている特別な場合を考え，綜合的な発見確率を最大にするためには探索努力の総量 τ：

$$\tau < a_k \log \frac{K_k}{K_{k+1}} \qquad \cdots\cdots(2)$$

を如何に配分すべきかを考えよう。簡単な計算の結果は，次式で与えられる τ_i を場所 i に割当ればよいことを示してくれる。

$$\tau_i \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_i} \dfrac{\tau}{\alpha_k}, & i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ o, & i=k+1 \cdots\cdots\cdots n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3)$$

勿論 $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = \tau$ であり，各 τ_i の間には関係

$$\tau_1 : \tau_2 : \cdots\cdots : \tau_k = \gamma_1^{-1} : \gamma_2^{-1} : \cdots\cdots : \gamma_k^{-1} \qquad \cdots\cdots(4)$$

が成立している。しかもこの探索の結果として目標物が発見出来なかった場合には事後確率 P_i' について(1)式と類似の次の関係：

$$P'_1\gamma_1 = P'_2\gamma_2 = \cdots\cdots = P'_k\gamma_k > P'_{k+1}\gamma_{k+1} \geq \cdots\cdots \geq P'_n\gamma_n$$

$$\text{但し}\quad P_i' = \begin{cases} \dfrac{P_i e^{-\gamma_i \tau_i}}{\sum_{j=1}^{k} P_j e^{-\gamma_j \tau_j} + \sum_{j=k+1}^{n} P_j} : i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k \\ \dfrac{P_i}{\sum_{j=1}^{k} P_j e^{-\gamma_j \tau_j} + \sum_{j=k+1}^{n} P_j} : i=k+1,\ \cdots\cdots,\ n \end{cases}$$

は崩れない。

$$\tau = a_k \log \frac{K_k}{K_{k+1}} \qquad \cdots\cdots(5)$$

の場合にも上記の配分法は最大の発見確率を与える。その際もし目標物が発見出来なかったとすれば，事後確率 P'_i について，今度は，

$$P'_1\gamma_1 = \cdots\cdots = P'_{k+1}\gamma_{k+1} \geq P'_{k+2}\gamma_{k+2} \cdots\cdots \geq P'_n\gamma_n \qquad \cdots\cdots(6)$$

が始めて成立つような状態に推移する。更に

$$\tau > \alpha_k \log \frac{K_k}{K_{k+1}} \qquad \cdots\cdots(7)$$

の場合には，探索努力のうち $a_k \log K_k/K_{k+1}$ だけは上記の配分法で消費し，若し目標物が発見出来ない場合には，残りの探索努力すなわち，

$$\tau - a_k \log \frac{K_k}{K_{k+1}}$$

について，改めて（6）式を出発点とする同趣旨の配分をすればよいことがわかる。

1. 3 アダプティブな探索の原理

探索開始前の状態を S_1 とよぶ。この状態では一般性を失うことなく

$$S_1 : P_1\gamma_1 \geq P_2\gamma_2 \geq \cdots\cdots\cdots \geq P_n\gamma_n \qquad \cdots\cdots(8)$$

と考えることができる。探索者は当初，努力を場所１に集中する。この努力が微量で目標物が発見されない間は事後確率について (8) 式と類似の関係が成立しているが努力が累積されて（5）式で規定される値すなわ $a_1 \log K_1/K_2$ に等しくなり，しかも目標物が未だ発見されない場合は事後確率についての次の新たな関係

$$P'_1\gamma_1 = P'_2\gamma_2 \geq P'_3\gamma_3 \geq \cdots\cdots \geq P'_n\gamma_n \qquad \cdots\cdots(9)$$

が始めて成立するようになる。この状態を S_2 とよぶ。

S_2 以後は探索者は，新たな努力を場所1，2に $\gamma^{-1} : \gamma_2^{-1}$ に分割しつつ探索を進める。このようにすると事後確率について（9）式と類似の関係が常に保たれつつ，ついには，

$$P_1''\gamma_1 = P_2''\gamma_2 = P_3''\gamma_3 \geq P_4''\gamma_4 \geq \cdots\cdots \geq P_n''\gamma_n$$

という関係が始めて成立するようになる。この状態を S_3 とよぶ。S_2 より S_3 に推移するまでに消費された努力の量は勿論，

$$a_2 \log \frac{K_2'}{K_3'} = a_2 \log \frac{K_2}{K_3}$$

である。一般にS_kとよぶ状態は，状態 S_{k-1} から出発して新たな探索努力を，つねにその比が，

$$\gamma_1^{-1} : \gamma_2^{-1} : \cdots\cdots\cdots : \gamma^{-1}{}_{k-1}$$

になるように場所１～k－１に分割しつつ探索を進めたとき，事後確率についてはじめて，

$$P_1'''\gamma_1 = \cdots\cdots = P_k'''\gamma_k \geq P_{k+1}\gamma_{k+1} \geq \cdots\cdots \geq P_n'''\gamma_n$$

という関係が成立するに至った状態のことである。このような探索法は，探索の進行につれて絶えず変化してゆく限界効用 $P_j'\gamma_j$ に着目して，つねにこれを平均化しようとする探索法であり，1.2 予備考察によって明かなとおり綜合発見確率を最大にするような探索法でもある。更に又，探索者が過去の探索結果にもとずいて次の行動を調整するという意味において一種の適応過程でもあるから探索努力の Adaptive Control とよんでもよいだろう。

1. 4 いろいろな結果の誘導

1.2 および 1.3 の所論から以下述べる結果を導くことは容易である。

(1) 状態推移間に消費される探索努力

状態S_kより S_{k+1} に移る間に消費された努力を $\tau_{k,\ k+1}$ とすると，前述したところにより

$$\tau_{k,\ k+1} = a_k \log \frac{K_k}{K_{k+1}} \quad : k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1 \qquad \cdots\cdots(10)$$

が成立する。従ってS_1より S_{k-h} に移る間に消費された探索努力 T_{k-1} は次式で与えられる。

$$T_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \tau_{j,\ j+1} = \sum_{j=1}^{k} a_j \log \frac{K_k}{K_{k+1}} = b_k - a_k \log K_{k+1} \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1 \cdots\cdots(11)$$

但し $T_1 = O$

(2) 努力の総量Tを与えられたとき，綜合的な発見確率を最大にするような努力配分計画

Tと$T_{k+1}(k=1,\ 2\cdots\cdots n-1)$との大小比較から探索場所が決定される。決定された探索場所について，各々に配分すべき努力の量およびそれによって得られる綜合的な発見確率を求めるのは簡単な計算問題である。結果のみを示せば次のとおり。

$T_k < T \leq T_{k+1}$ の場合

$$t_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_1}\log K_i + \dfrac{1}{\gamma_i\ a_k}\{T-b_k\} & : i=1,\ 2\cdots\cdots,\ k \\ O & : i=k+1,\ \cdots\cdots n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(12)$$

$$P\ (T) = \sum_{j=1}^{k} P_j - a_k\ exp\left[-\frac{T-b_k}{a_k}\right] \qquad \cdots\cdots(13)$$

(3) 状態S_nが探索開始前の状態であった場合，発見が起るまでの期待努力量E_n

探索開始前すでに状態S_nにあったとすれば

$$P_j\gamma_j \equiv K_j = \text{一定} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

従って $T_n=O$ であり，すべてのTに対して

$$\left.\begin{aligned} P(T) &= 1-\exp\left[-\frac{T}{a_n}\right] \\ t_i &= \frac{1}{\gamma_i}\ \frac{T}{a_n} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

が成立している。従って始めて発見が起るまでに消費される努力量の期待値E_nおよびその分散Vは次式で与えられることとなる。

$$E=a_n, \qquad V=a_n^2 \qquad \cdots\cdots(15)$$

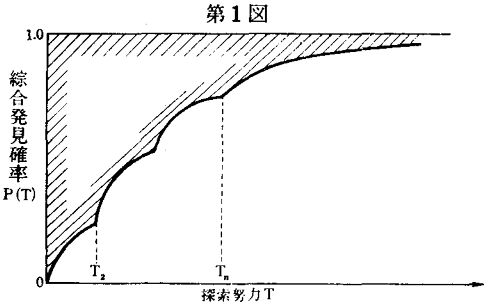
§2 発見までの努力の期待値を最小にするような探索

最大の発見確率を得るための上述の探索法は，これを Adaptive に行うときは，発見までの努力の期待値を最小にするような探索になっている。何となれば，その期待値は

$$\int_0^\infty Td\,P\ (T) = \int_0^\infty (1-P(T))dT$$

で与えられるが，右辺の積分値は第1図影線部分の面積に等しく，この面積の最小性は，$P(T)$の最大性によって明かだからである。さて目標物が発見出来ない場合，Adaptive な探索の進行につれて状態は S_1 より S_n えと順次に推移する。今与えられた状態S_1から出発して探索を進めたにも拘らず目標物が発見出来ず，ついに状態S_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$に立ち至った場合を考え，それ以後の発見までの期待努力をE_kとしよう。そして各々のE_kの間にどのような関係が存在するかを調べてみよう。それには次の定理が利用出来る。

第1図



〔**定理**〕綜合的な発見確率に関する限り，前述の探索法は，n 個の場所を1個の場所と見做し，そのかはり，瞬間発見確率量 $\Gamma(T)$ を次式で定義される努力量の関数と見做した場合の探索と等価である。

$$\Gamma(T)=\frac{1}{a_k}\frac{\sum_{j=1}^{k} P_j e^{-\gamma_j t_j}}{\sum_{j=1}^{k} P_j e^{-\gamma_j t_j}+\sum_{j=k+1}^{n} P_j} \quad : k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,\ T_k<T\leq T_{k+1} \quad \cdots\cdots(16)$$

但し $T_{n+1}=\infty$，t_j は T の関数として (12)，式の値をとるものとする。

〔**証明**〕n個の場所を1つの場所と見做すようなこの探索においては，発見の確率は

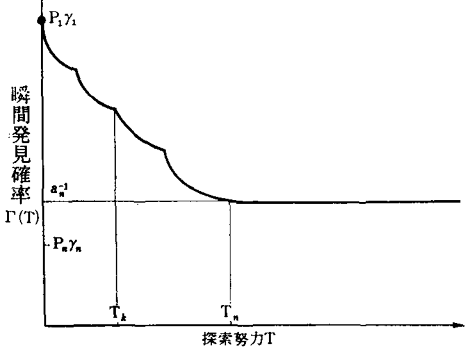
$$1-\exp\left[-\int_o^T \Gamma(\xi)d\xi\right]$$

である。これに (16) 式の $\Gamma(\xi)$ の値を代入すると (13) 式で与えられる $P(T)$ の値と一致する。

$\Gamma(T)$は $(O,\ T_n)$ では T と共に単調に減少 $(T_n$ $\infty)$ では一定となるような関数であって，第2図に示すような形を持っている。

今 S_k $(k=1,\ 2\cdots\cdots,\ n)$状態に既に立ち至っているとして，これを新な出発点とする探索を考え，その場合の等価瞬間発見確率量を $\Gamma_k(T)$ とすると，前述の $\Gamma(T)$と $\Gamma_k(T)$ との間には次の間係が成立している。

第2図



$$\Gamma(T_k+T)=\Gamma_k(T) \quad \cdots\cdots(17)$$

又 $\Gamma(T)$ の単調性と，$T_k\leq T_{k+1}$ なる関係とから

$$\Gamma(T_{k+1}+T)\leq\Gamma(T_k+T) \quad \cdots\cdots(18)$$

従って (17)，(18) とから

$$\Gamma_k(T)\geq\Gamma_{k+1}(T) \quad \cdots\cdots(19)$$

一方

$$E_k=\int_o^\infty \tau\,\Gamma_k(\tau)\,e^{-\int_o^\tau \Gamma_k(\xi)d\xi}d\tau$$

$$=\int_{ko}^\infty e^{-\int_o^\tau \Gamma_k(\xi)d\xi}d\tau \quad \cdots\cdots(20)$$

である。(19)，(20)式とから

$$E_k\leq E_{k+1}$$

あるいはより詳細に書けば

$$\frac{1}{P_1\gamma_1}\leq E_1\leq E_2\leq\cdots\cdots\leq E_n\ (=\alpha_n)\ \leq\frac{1}{P_n\gamma_n} \quad \cdots\cdots(21)$$

が成立っていることが判る。このことは Adaptive な探索において，目標物が発見されないままに探索が進行すれば，事態はいよいよ発見を困難にするような状況に推移し，最後には発見までの期待努力が最大であるような状態 S_n に立ち至ることを示している。

探索の当初から発見に至るまでの期待努力 E_1 を求める仕事は，単調な計算にすぎないから結果のみを掲げておく。

$$E_1 = \int_0^\infty \tau\Gamma(\xi)\, e^{-\int_0^\tau \Gamma(\xi)\,d\xi}\, d\tau$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \left\{ e^{-\frac{1}{\alpha_k}(T_k - b_k)} - e^{-\frac{1}{a_k}(T_{k+1} - b_k)} \right\}$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1} M_r \tau_{r,\,r+1} \left(\sum_{j=r+1}^{n} P_j\right) \qquad \cdots\cdots(22)$$

但し，

$$M_k \equiv \frac{1}{a_k e^{-\frac{1}{a_k}(T_k - b_k)} + \sum_{r=k+1}^{n} P_r} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{a_j e^{-\frac{1}{a_l}(T_{j+1} - b_j)} + \sum_{r=j+1}^{n} P_r}{a_j e^{-\frac{1}{a_j}(T_j - b_j)} + \sum_{r=j+1}^{n} P_r}$$

1964年
総会および春季研究発表会の予告

日　　程　昭和39年5月14日（木），15日（金），16日（土）

場　　所　東京都千代田区内幸町1の1

日本電信電話公社本社　講堂（6階）

	日程	
	期　日	時　間
総　　会	5月14日	10時～12時
研究発表会	5月14日	13時～17時
	5月15日	9時～17時
懇　親　会	5月14日	17時～19時
見　学　会	5月16日	10時～14時（20人，3組）

市街電話局，中央電報局，国際電信電話公社

総会議題　1）1963年度事業報告並びに決算報告。

2）1964年度事業計画並びに予算案の承認。

3）1964年度評議員の選出。

4）表　彰

5）その他

研究発表募集……申込方法

○研究発表は1題目につき正味15分，質問討論を含めて20分です。

○発表申込締切り……2月末日

和文および欧文で下記の各項を必ず書くこと。

発表者（連名の場合は講演者に※印を付ける）

研究場所または所属（所在地）

題　　名

○前刷原稿締切り……4月20日