＜特別講演＞

待ち行列論の実用性を高めるための若干の問題

森 村 英 典

緒 言

ＯＲ学会の特別講演は従来大家諸先生によってなされて来ましたが，今回からは若い方にもやらせようという方針だそうで，私が御指名を受けました。大変光栄に存じますと共にトップ・バッターとしては如何にも貫録不足であることは，十分承知しているのですが，時間的余裕もありませでしたので敢てお引受けした次第です。

実は私は一昨年秋，京都における統計数学分科会で「queuing theory」の綜合報告的な特別講演をさせていただき，その一部は「経営科学」誌５巻２号に発表させていただきました。また，昨年夏，日科技連主催の数学計画シンポジュームにおきましても，従来の理論成果を概観する報告を申上げ，それは討論も含めて，報文集として刊行されております。

したがって，これら２回の御報告とダブるのも面白くないと考えまして，ここに挙げたような演題をつけさせていただきました。

こういう題名をつけますと，現在の待ち行列論は如何にも机上の空論のように考えられるじゃないかと一部の方からはお叱りを受け，他の一部の方からは，あんな理論はもともと現実ではあまり重要でないような小さな問題にしか通用しなのだから，たとえ実用性を高めてみても大したプラスにはならないといって黙殺されてしまうのではないかと危惧致しております。

しかし，率直にいって，現在理論結果が本当に実用化されている queue の model はほとんどが非常に単純な型であって，ここ10年間に開発されたおびただしい型の queue 理論の多くは，単なる「数学理論」として，倉庫に眠っているのではないかという気がいたします，そしてその理由が，得られた理論結果の複雑さ，もしくは，非具体的表現にあると思われるのです。もちろん，後で申上げるように，現実の問題では非常に単純なモデルのよく合う場合も予想されますので，それも原因の１つではあろうと思いますが……。

また，この理論が元来，小さな問題にしか適用できないという見方も一面の真理をついているように思います。しかし，小さい問題だからやらないでよいのではなく，小さいけれど到るところに転っている問題だけに，毎日のオペレーションを標準化し，更に条件の変化に対応できる態勢を整えておくことが必要になってくると考えます。そういうことが沢山の case について安直にできるためには，やはり理論結果が使いやすい形に整備されていなければならない，ということになって，この理論の実用化への努力が，ますます要請されてくる，と私はこのように考えております。

＊ 東京工大　1963年5月9日春季研究発表会「経営科学」第7巻2号

そのように考えて，ともかく，この実用性を高める，いいかえると使いやすくなるという問題を考えてみたいのですが，実はこれは大問題であってとても一朝一夕に片づく筈もなければ，短時間で論じ得るしろものでもないと思われます。そこで，本日は，この問題のアプローチの方向を大きく3つに分けてみまして，その各々につき，思いつくことなどを簡単に申上げてみたいと存じております。

大体，queueの理論はORの手法の標準的なものとされているものの中では，かなり精密なもののように思えます。たとえば，在庫管理の問題と Queue の問題とは，はいって出て行く，という形からいえば非常に似ているわけで，しかも在庫問題では一般に control という要素を持っているだけ，現象としてははるかに複雑だと思います。

しかし，いわゆる$\sqrt{\ }$公式のように，これをごく macro 的に平均で考えてしまいますと，取扱いは極めて簡単になり，しかも，それでかなり実用されているようであります。

queueの問題をこのような立場で考えると，もはや queue の問題にはならない，せいぜいが確率変数の差の分布という程度のものになってしまうと思います。

ですから，現実の場で考えるときは，在庫問題の$\sqrt{\ }$公式で処理出来る程度の精度を必要とする問題なら queue と考えなくてもよいでしょうし，逆に在庫問題でも，精度の高さを必要とするならばqueue に近い取扱いが問題になると考えられます。

結局は要求される精度に応じて model を設定するということになるでしょうが，「鹿を追うりょう師……」のたとえの如く，現実の条件に幻想されて，細かい条件をつけては複雑な問題を追いかけるような傾向が，必ずしもなきにしもあらずという気もいたしますので， model の間の関係に目をつけた研究というものがむしろ大事だと感じられるわけです。こういう観点での見方をここで申上げてみたいと存じます。

第1に，理論の実用化という問題についての，理論面よりするアプローチに関し，私が日頃こんな方向と申しますか，問題が面白いだろうと思っておりますことで，現在幾分なりとも成果の得られていることを申上げたいと思います。このことは先程申上げた前2回の報告中でも触れておりますが，そのとき申上げたことよりも，もう少し力点をここにおいた形で述べさせていただきたいと考えております。

第2に，同じ問題の実験面よりするアプローチに関し，私どもで試作設置しましたシミュレーターの実験結果の1例を申しあげてみたいと思います。

そして最後に，理論結果を実用化するための強力な手段と考えられる数表化に関し，私の属しておりますQRグループのこの面での努力を御紹介させていただきたい，とこのように考えております。

1. 理論面からのアプローチ

個々の case について問題を formulation したら queue の問題になり，しかも新しい型の

ものだという場合，それを理論的に解析するのも，もちろん実用性を高める結果になるわけでありましょうが，ここでは，そういった case by case の問題には触れず，先程申上げた model 間の関係という点にしぼりたいと思います。

1．1 近似の理論 第1は近似の理論であります，近似にもいろいろの形があると思いますが，ここではここに挙げた4つの問題に触れてみたいと存じます。

1．1．1 Transient solution の近似問題 有限時刻での解，つまり transient solution は理論的見地からは望ましいもので，それを求める努力も最近はとみに多くなって来たようでありますが，得られた結果は非常に具体的表現に乏しいといわざるを得ません。これは，この問題の複雑性に起因するいわば宿命であると考えられ，数学理論としての価値はもちろん認められるにしても，実用上からは，たとえ解かれたとしてもそのままで有効な議論とは見なし得ないだろうと思われます。

数表や図表を整備することでその穴を埋められないかということも一応考えられますが，それを組織的にやることはかなり難事業で，なかなか実行に踏み切れない事情にあると思います。

そこで，一応目安をつけるという意味で，Davis は build-up time という概念を導入いたしました。これは理論的にはかなりいい加減なものですが，当らずといえども遠からず，といった目安をつける役には十分役立つと思います。Davis の論文は M/M/s の queue を取扱ったのですが，本質的な計算違いがあり簡単な形でこの build-up time が表現されませんので，私が M/G/1 の場合にもっと細かい議論と共に論じました。これは Journal の4巻2号に出しました。また，Davis の計算違いを直したものの数表化は現在進行中であります。*

こういう行き方でなく，一般論の開発によって別な評価が生れることも，もちろん可能でありましょうが，現在のところ，そのような方向での結果は出ていないようであります。

1．1．2 分布のすその近似 平衡状態における待ち時間の分布，もしくは行列長の分布でも input と service のうちどちらか一方が指数分布でなくなると，もはやあまり簡単とはいえなくなります。それで，これらの分布のすその方だけでも何とか近似式で簡単に表現しておきたいということが出て参ります。この種の近似が必要なのは，実際上非常に長く待つ人を，たとえば5％以下にしたいというように，サービス基準を設けることが多いと思われるからです。その限りでは，極端ないい方をすれば，平均待ち時間と，この種の近似形だけで十分だといえるでしょう。

Saunders がこのような仕事を試みていますが，その後はまだ見掛けません。この程度ですと数表が整備されればあまり意味をもたなくなるでしょうが，この他にもいろいろ出来る場合があり得ると思います。

1．1．3 窓口数が多いときの近似 窓口の数が多くなると，たとえ M/M/s 型であってもその計算はめんどうになるが，$s\to\infty$ の極限を考えると，その待ち行列分布は Poisson 分布になる

*) その後反町迪子氏により実行された。Journal 6巻2号参照

ことが知られています。更にs→∞のときは，M/G型であっても同じように Poisson 分布になりますし，また traffic intensity が時間とともに変るような場合も広義の Poisson 分布になるというように，その取扱いが容易になります。

それでは，sがどの位になればs＝∞とみなしてもよいかという問題が出て来ます。たとえば $M/M/s$ でs→∞ としたときの近似度などは理論的解析も可能だろうと思いますが，そのような論文はまだ見当りません。そこで，ここでは $M/M/s$(s) の呼損率 E_s とそれに対応する Poisson 分布値を数値的に調べてみようと思います。(第1表参照)

第1表 呼損率の近似

a	1.0		5.0		
s	2	4	6	10	15
E_s	.2000	.01538	.1918	.1838	.000157
ポアソン値	.1839	.01533	.1462	.1813	.000157
a	10.0		15.0		
s	12	20	16	20	30
E_s	.1197	.00187	.1446	.0456	.000221
ポアソン値	.0948	.00187	.0960	.0418	.000221

a/s の値が大きいところでは合いませんが，これが約½以下になり，s の値も10を超えれば，多くの実用問題に対しては，ポアソン値，つまり $M/M/\infty$ のモデルと考えても呼損率自体あまり影響を受けないということがうかがわれまます。

1.1.4 待ち時間についての極限定理 $\rho\to 1$ になると，待ち時間は急激に増え，現実の場では，そのような状況下で毎日を送るようにしておくことはまずないでしょうが，それでも，どのように増えるのかその大要を知っておきたいことも出て来る可能性はあるように思います。

最近Kingman は single serverのとき $(1-\rho)W$ は，相当広い条件の下で指数分布に近似的に従うという事実を証明しております。そして，たとえば，tandem につながった queue で各々が限度一杯近く使われているなら，各 stage を独立のものとみなしてよい，というような一般的結論を導いております。

このように，いろいろのタイプの極限定理を通して，ある特定な状況下で成立つ一般的性質を見つけることがまだまだ可能なのではないでしょうか。

この他にも infinte queue と queueに制限を設けた場合の近さなどいろいろの問題があると思います。

1.2 似たモデルとの喰違いの評価

前節で取扱ったのと同様の方向の問題ではあるのですが，少し違った意味の近似，つまりある標準的なモデルに対して，それと若干異ったモデルが結果的に見てどの位違うのか，もしそれがあまりひどい喰違いでなければ，少しぐらいのモデルの違いには目をつぶってもよいことが，実

際には多いのではないだろうか，とも考えられると思います。このような問題に対する研究も近時除々に進められているようですが，それについても若干触れてみたいと思います。

1. 2. 1 M/M/S で各 server の能力が違う場合　割合古いところでは，Gumbel が平均サービス時間が各 server 毎に違う(m_i)とき，全体としての平均サービス時間$\overline{m}$との喰違い

$$\sqrt{\sum(m_i-\overline{m})^2 s\overline{m}}$$

で計り，この値に対し，平均行列長の喰違い率Rの値を求めてグラフにまとめています。その結果，0.15位の喰違いなら，ほとんど10%以下のRになることを示しておりますが，これなどよく知られた例だと存じます。

これはたとえばサービス時間を評価する上で，評価に要する費用と精度とのにらみ合わせなどにも流用がきるのではないかと思っております。

同じような問題は，タンデム型のqueueについても考えておく必要がありましょうし，$M/M/s$型にしても，待ち時間の分布などについて考えることも意味をもつかとも思います。

1. 2. 2 $M/M/s$ の Erlang 式　$M/G/s$(s)の Erlang 式，つまり平衡状態における状態確率が，M/M のときのそれと一致するということは，かなり前から実験的に知られていたそうですが，1957年にСевастиянов が，そのことを証明しました。一方，$G/M/s$ のときは Takacs が，1956年に別な式になることを示しております。

後者の式はかなり複雑で，一体$M/M/s$のときの Erlang 式に比べて大きいのか小さいのかすらわかりかねます。しかしこういう式を基にして，そのずれ方を論ずるというような仕事は可能なことのようにも思えますし，また必要なのではないでしょうか。

それはともかくとして，著者は失念してしまいましたが，$M/D/1$ と $D/M/1$のときを比べて，前者より後者の方が，ρ を一定に押える限りは平均待ち時間が少ないことを論じた論文もありました。このことは，到着時間々隔$\{X_n\}$とサービス時間$\{Y_n\}$とが与えられますと，待ち時間が$[Y-X_n]^+$といった形で与えられ，したがって，分散はおおよそ Var (Y_n)+Var (X_n) に似た値になり，ρ を一定に留めるためには$M/D/1$ より $D/M/1$ の方がこの Var が減少するということからも直観的な予想はされるとは思います。しかし，その減少の程度が，このような分散の減少以上のものなのかどうかというような観点からこの問題が調べられるときは，実用上M/Gタイプのモデルを流用できる範囲が広がる可能性もあるように感じられます。

1. 2. 3 $M/G/s$ の平均時間　前節の終りに述べたことも関連しますが，$M/G/1$ のときは有名な Хинуйн-Pollaczek の公式があって，サービス分布の違いは，その変動係数によって表現されることが示されています。こういううまい式は$G/M/1$のときにもありませんし，$M/G/s$ のときにもありません。

$M/G/s$については Lee-Longton がモンテカルロ法で

$$(M/M/s \text{ の待ち時間}) \times \frac{(1+C^2)}{2}$$

という形の式の成立つことを check し，肯定的な結論を出しています。この式が示されると，

非常に有用だと思い，私自身少し考えてみたことがありますが見事に失敗し，現在のところ肯定的に，近似式にしても証明出来ませんが，大凡の筋としてはいいのではないかと思っております。

Pollaczek-Хинуин の式はサービス分布のモーメントを用いて待ち時間のモーメントを表わしたわけで，一般分布を対象にする限り，特性函数，もしくはその母函数を一般の形で求めるか，またはこの式のようにモーメントを求めるかしなければならないと思いますが，実用上は，前者の行き方では画にかいた餅の感があると思います。それで，数学的にはつまらない問題でしょうが，待ち時間の平均値や分散などを $M/G/1$ 以外のモデルについても求めておくというような仕事をしておく必要があろうかと存じます。

1. 2. 4 tandem queue におけるサービス分布の影響　tandem に並んだ queue は現実には多いけれども，これをきちんと扱うと，ものすごくむずかしいので，実際には，単独窓口の queue とみなして考えてしまうことが多いわけです。難かしくなる原因は M/M 型以外だと，output のprocess がもはや Poisson はおろか recurrent にもならないというところに根本原因があると思います。それだからこそ，各段別々に考えるというのは論理的には矛盾を内臓しているということになるわけです。

それで，今日午後お話がある筈ですが鈴木さんは $M/G/M$ という型の tandem queueで第2段での待ち時間が，第1段のサービス分布の型にどう影響されるかを論じておられます。これで第2段に及ぼす影響の少ないような範囲の G ならば，別個の queue と考えても差支えないということになりましょうから，実用上，よい目安になると思われます。

1. 3 一般論の拡充

以上，申述べてまいりましたことは，結局のところ標準的なモデルに対しまして，少しづつ違うモデルの対応する結論がどのくらい近いかという点でありまして，ごく抽象的ないい方を許してもらいますと，モデルの作る空間上の函数の間に距離を導入して，その距離でみた近さを問題にする，ということにしぼられるわけです。とはいっても，これ程抽象的ないい方をしたのでは，何も positive な結果は出て来ないでしょうが，いままで開発されて来た諸結果を統一して見るのには，やはり若干抽象的な議論が必要になるのではないかと思います。

昨年の数学計画シンポジュウムでも，60年代は queuing theory にとっては整理期だという私の感じを申上げましたが，ここ1年間に発表された論文を見ておりますと，この感をますます強くするわけです。つまり，出来るだけ一般的条件のもとで，各モデルに共通する性質を引出そうとする研究が多くなって来ました。

実用性を高めるという点でのお話しをしているときに，抽象化の方向について申し上げるというのは，いささか奇異に感じられるかとも思いますが，私の感じでは，その方向はむしろ本筋なのではないかと思えます。というのは，出来るだけ一般的な条件のもとで，多くのモデルを統一的に取扱い，モデル間の遠近を論ずるためには，どうしても抽象化して簡単な形式化を行なわないとうまくいかないだろうと感じられるからです。

時間もあまりありませんので，最近のこの方向での特に著しい成果の1例だけに触れておきますと $L=\lambda W$ という公式の証明があります。この式が非常に一般的な条件で成立つ，実用上は「いつでも」成立つと考えてほぼ間違いがない，という感じがする定理が1961年にLittleによって証明されました。これははじめから定常状態に対応するprocessを考えてしまったところに成功の原因があり，いままでの個々のモデルの研究に用いられた理論よりも，もっと一般的な理論を用いたところに特徴があるといえるのではないでしょうか。

2. シミュレーションの1例

分布が指数分布以外のものである場合のinputやサービスを考えたときの待ち行列の理論はとかく複雑になるし，また，現実に得ららたデータを基にして，それに適合する理論分布を想定することがわずらわしいことも多いように思います。

大体，理論分布を想定することは，その理論分布を仮定することによって，理論解析が進められる場合か，もしくはそのような理論分布であることが物理的構造といったものからごく自然に予想される場合に，大きい意味をもつと思われます。ですから結局はシミュレーションに持込んで実験をするというような際には，殊更理論分布に当はめても，あまり積極的な意味はないと申せましょう。そういうわけで，一昨年秋に名古屋の学会で水野氏が報告し，昨年冬に数理科学の発表会で私が報告した自動待合せ計算機—愛称MONTAC　では，実測頻度そのものに基いて乱数を発生させることをよく行っております。

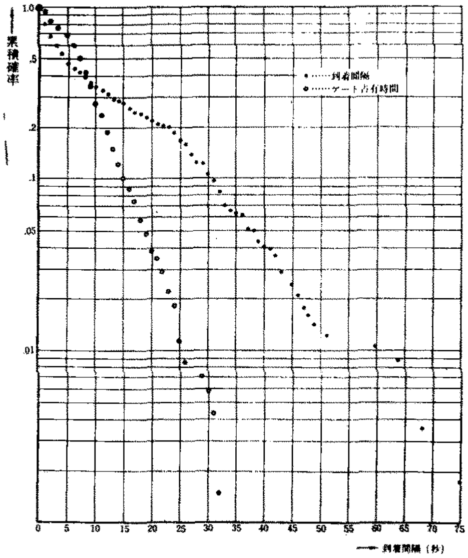
ここでは，最近有料道路の料金所数算定に関してこの機械で行なった実験について僅かながら申上げてみたいと思います。

数年前大阪の学会の際の見学コースだったので覚えておられる方も多いと思いますが，大阪奈良を結ぶ阪奈道路では，大阪から生駒山に登りかけるあたりに，大東料金所があります。ここで3日程，車の到着時間々隔，料金所占有時間などを実測しましたが，そのときの実測値の1例がこの図です。(第1図) これは半対数紙に書いておりますから，直線，つまり指数分布間隔とみるのはいささか気がひけます。これは料金所前720mおよび630mの地点に信号灯があるのでその影響を多分に受けているためと思われました。それはともかく，この実測頻度に基いてMONTACで実験した値を実測値，理論値とともにプロットしたのが第2図で，おおむね合っていることが確かめられました。ここで「理論値」と称したものはの$M/M/1$モデルによるものです。

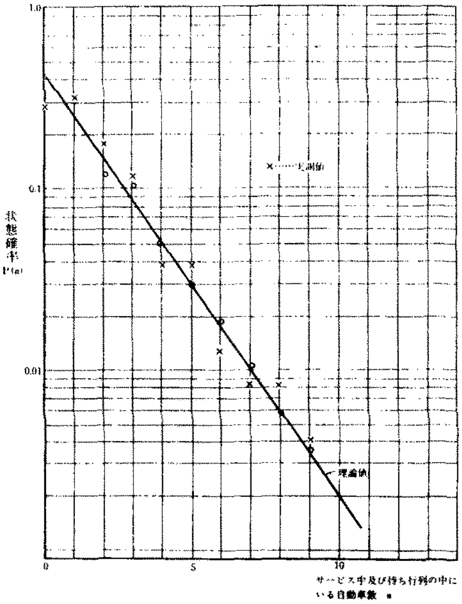
これは1例にすぎませんが，多くの実際上の場合，M/M 型という標準的モデルがかなり多くの case に，結果的には適当だと認められることが多いのではないかと思っております。

要するに要求される精度と，解析にかけるべき労力，時間，費用等とのbalanceで，どのモデルを採用すべきか定ってくる，という点は何事によらずいえることなのでしょうが，queueの問題では，このことが特に顕著に現われるように思います。

第1図　自動車の到着間隔とゲート占有時間の分布（阪奈道路・大東料金所）の例



第2図　第1図の測定値に基く理論値（M/M/1）と実測値との比較



3.　数値表について

4年程前からこの3月まで存続した数理科学総合研究のことについては御存知の方も多かろうと存じますが，その第6班の一部として queue の研究グループが作られておりました。われわれは略称QR会と呼んでおりますが，私はこの会の小使い兼事務長をつとめて参りました関係上この機会をお借りして，若干宣伝をさせていただきたいと存じております。

実は，この会の発足当時の目的は，尨大な queue の文献を整理することとと，数表を作ることにありました。前者は不完全ながらも，その目標のかなりの点まで達することができたと思っております。後者につきましても，慶応大学の河村教授が Erlang type の queue の諸分布を具体的に表現する方法を求めましたので，それに基き，いくつかの数値表は作成し，ガリ版刷の報告として既に発表いたしております。

しかし折角作った数表ですから，しっかりした本として出版しておきたいという希望はありましたが，何分貧乏人の集りでは先立つものがなく，というわけでこの話しはあまり進展しないでおりましたが，たまたま，数理科学総会研究の代表である弥永教授や，数学会の理事長である吉田教授などの方々の御尽力により，昨秋，毎日新聞社から，「queuing tableの 作成」に対して奨励金の贈与を受けました。そこで，数値表の出版ということが急に現実味を増し，この機会に，前述の既存の数値表を作成しなおすことも含め，会員の original な研究成果に基く数値表を中心に，いくつかの数値表を改めて電子計算機によって作成し，そのまま印刷するというやり方で出刷したいということになりました。

そこで昨年夏から冬にかけ，会としては精力的な活動をこの方向に注いで，ほぼプログラムに

持込むところまで行きましたが，その後思わぬ故障続出で，現在大分進行が遅れております。しかし，とにかく早くまとめてしまいたいと努力を続けておりますので，どんな数表を作っているのかという点だけこの機会に御報告しておきたいと存じ，これを一覧表にしてまとめておきます。(第2表)

第2表 QR会作成数値表の一覧

queue の型		measure	パラメータ範囲
$M/M(k)/1$ 同時サービス	k-servers 同一サービス速度	平均待時間 待時間の分散 累積分布	$k \leqq 10$ $\rho=.01(.01)\sim$上限
	2-servers 異なるサービス速度	待時間の平均 〃 分散	サービス速度の比 $\nu=1.0(0.1)5$ $\rho=0.01(0.01)\sim$上限
$M/G/1$		平均待時間	$\rho=0.01(0.01)0.99$ C $=0(0.1)1(0.2)$ $2(0.5)5$
		待時間の平均，分散及び変動係数	$\rho=0.1(0.1)0.9$ C $=0(0.1)1.0$, D $=0(0.2)6$
$E_l/E_k/1$		平均待時間及行列長 状態確率の累積分布	$l=2, 3, 4 : k=2, 3, 4$ $\rho=0.1(0.1)0.9$
		busy period 内の人数の期待値	$k,\ l \leqq 5$ $\rho=0.1(0.1)0.9$
$M/M/s$	simple	build-up time	$s \leqq 50$, $\rho=0.1(0.1)0.9$
	impatient customer	溢れの確率	
$M/D/s$		平均待時間	
$E_l/M/s$		平均待時間 状態確率の累積分布	$a=0.01\sim100$ (9段階切替) $l=2, 3, 4$

以上，とりとめのないことを並べましたが，これで私のお話を終らせていただきます。

ニュース OR と社会科学の国際会議

（9月，イギリス，ケンブリッジ）

イギリスのOR学会は本年9月14日より18日の間 Cambridge, Gonville and Caius Callege で標記の国際会議を開催する。次の4部会が開かれる予定である。

1. 組織と管理，2. 政策の社会に及ぼす影響とその測定，3. 争議の妥決と制御，4. 共通な基盤としてのシステムの概念

御出席を希望される方は Mrs. Margaret Kinnard, Secretary, Operational Research, 64 Cannon Street, London, E. C. 4 に連絡されたい。なお学会でも御取つぎは致します。