文　献　抄　録

Giusppe Gullo: Da Rcerca Operativa e la Ripartizione del Materiale Da Carico. *Injeneriw Ferroviaria. Vol. 15 (1960) pp. 587～600.*

鉄道貨物輸送では到着地で荷をおろした後，そこで使われずに荷をつむためにどこかに送られるべき車が常にある。即ち貨車配分が起る。この配車問題は所謂輸送問題として定式化できるが，シンプレックス法に基く解法は，現在鉄道の配車係が使うことのできるほど考え方が簡単であり計算が短かいとはいえない。そこで利益法という解法が提案される。任意の可能解から，発送地と到着地を行と列にとり，その間の輸送量をかきいれた配車表が作られる。最初に異なる行と列に属している2つの値例えばx_{11}, x_{22}に共通な可能で有利な変化を行う。即ち費用変化（$C_{11}-C_{21}$）＋（$C_{22}-C_{12}$）が正であるならば，x_{11}, x_{22}をへらしx_{12}, x_{21}をふやすようにする。このような2つの組をつくした後に同様に行，列を異にする3つ以上の値の組についても有利な変化が考えられるので，このような3つ組，4つ組等をすべてためして解がえられる。
但しこのような（n＋1）コの値の組では共通で可能な変化は1組当りn！ある。そこでためすべき可能な変化の数を前以て定めることはできないが，これは配車表が大きくなるにつれて急激にふえることは分る。しかし実際は，少くも現実の鉄道では，経験によれば，予備的な簡略化の基準を使って配車表の大きさが余り大きくならないようにできる上は，最適解は概して2つ組だけをつくしてえられ，より高位の組み合せから利益があることは余りない。ナポリ管区の配車計画について行った何ケ月かの経験では，すべての2つ組をつくした後で有利な3つ組の変化があったのは唯一度しかなく，それ以上高位の組の変化で有利なことは全然なかった。結論として，利益法は理論上多くの制約はあるが，実用上きわめて能率的であり，容易な2つ組だけをためせば，目的を達することは確かである。（茨木芳夫）

Filippo Bordoni: Ricerca Operativa Applicata ai Centri Di Scomposizione Dei Trent Merci Impostazione Statistico-Matematica Dei Trnnt in Partenza da un Centro Di Smis Tamento. *Ingeneria Eerroviaria, Vol. 15 (1960) pp. 387～395.*

貨車操車場において，方向別に出発列車を完成するのに必要な車数がたまるまで貨車は方向別線ＦＤで待ち合せ行列を作っている。本論文はこのＦＤでの平均待ち合せ時間を計算し，最小にする方法を提案している。ＦＤのある線にとったある方向Ｉを考えると平均待ち合せ時間$T_a{}^{FD}$は，到着列車の分布，到着列車中の方向Ｉの車数，出発列車の出発に関係する。なお次の簡略化を行う。方向別の完成にあづかる最後の一軸をＦＤの線にいれることで引きだしがはじまる。周期性（周期I^*）及び連絡性（各周期で到着車数と出発数は等しい）の原理が成立する，更に編成中に方向Ｉの車をもつ出発列車はすべて等しい車数Qからなっている。そうすると，

$$Q_i=\sum_1^n A_h \simeq K_q$$

即ち周期I^*中に到着する方向Ｉの車数が大体Ｋ列車分にあたるとすると，

$$T_a{}^{FD}=\frac{1}{K}I_\gamma+\frac{1}{K}I_s+\frac{1}{K}I_t+\cdots\cdots$$
$$-\frac{I^*}{Q_i}\sum^{\gamma}A_t+\frac{1}{K}I^*-I_o{}^*$$

がなりたつ。ここにI_γ, I_s, I_t, …… は夫々方向Ｉのq軸をもつ出発列車１，２，……の組成に使われる最後の寄与A_γ, As, A_t, …… の到着時刻を示す

又 $I^*=\sum_1^{\gamma}A_hI_h/Q_i$。$I_\gamma$を独立変数としてとれば$I_s$, I_t……はI_γの函数となる。

$$\sum_{h=\gamma 1}^{s}A_h=q,\ \sum_{h=s1}^{t}A_h=q,\ \cdots\cdots$$

I_γはnコの値I_1, I_2……I_nをとりうる。これから$T_a{}^{FD}$を最小にするI_γ, I_s, I_t……は図的に決定することができる。時間０～１間に考えた方向の一部をなす列車の到着密度（単位時間当り到着車数）を示す函数 $\Theta=\Theta(I_\gamma)$ が統計調査によって定めることができれば，I_γ, I_s, I_t ……，の決定はもっと満足な方法で行うことができる。密度Hが級数展開の形になり，I_γのごく簡単な函数で表わされる時でも常に図的解法が便利である。例として$\Theta(I_\gamma)=$

C の場合，出発 K 列車は一定時隔 I^*/K をとるべきである。即ち出発列車の等時隔の必要性は到着密度が一様分布のときだけ現われる。（茨木芳夫）

Bellman, R. and Karush, W：Mathematical Programming and the Maximum Transform. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, *10*, *550～567* (*1962*)

ＯＲ特にＤＰでよくでてくる。

$$h(x)=max_{u+v=x}\,[f(u)+g(v)]$$

を $h=f\oplus g$ とかくとき，常に

$$T(f\oplus g)=Tf+Tg$$

となるような T があって，Tf が容易に計算され，また Tf から f を求めることが簡単にできれば，このような T が有用であることは普通のconvolutionと Laplace transform の関係からも類推される。この論文では maximum transform

$$\varphi=M_f$$

を

$$-\varphi(\xi)=sup_{x\geqq 0}\,[-(\xi,x)+f(x)]$$

で定義する。但し，ここに $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$x_i\geqq 0$，$i=1,\cdots\cdots,n$；$(\xi,x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ とする，さらに $f(x)$ が $x\geqq 0$ で連続で任意の $\xi_i>0$，$i=1,\cdots\cdots,n$ に対して $sup_{x\geqq 0}[-(\xi,x)+f(x)]$ が bounded という意味で admissidle な函数とする。そして $g(x)$ も admissible とすると，上の M は前述の性質

$$[M(f\oplus g)](\xi)=(Mf)(\xi)+(Mg)(\xi)$$

を持つばかりでなく，φ はその定義域 $\{\xi/\xi>0\}$ の上で nondecreasing 且つ bounded となることが証明される。

次に admissible な f を使って $f^+(x)=max_{0\leqq y\leqq x}f(y)$，$[f^+]=\{(x,z)\mid z\leq f^+(x)\}$，$H=\{[f^+]$ を含む最小の convex set$\}$，$\bar{f}(x)=sup_{(x,z)\in H}Z$ を定義すると，$\bar{f}$ は concave nondecreasing な函数となり，

$$\varphi=Mf=Mf^+=M\bar{f}$$

が成立し，φ 自身がその定義域の上で concave nondecreasing となるので，$\{x\mid x\geq 0\}$ の上で $M\varphi$ が定義され，しかも

$$M\varphi=M(Mf)=\bar{f}$$

$$\bar{f}=\bar{g}\Longleftrightarrow Mf=Mg$$

が成立することが証明されている。これは f 自身が cnocave increasing 且つ admissible ならば $M(Mf)=f$ が成立することを意味するもので，maximum transform Mの実用性を暗示する。その実例としていわゆる〝努力の最適配分〟と〝多数配分過程〟の問題で，与えられた函数が admissible concave increasing なとき，M を使ってこれらの問題を解く方法を示している。また上のような M は admissibleな函数 f，g に対して，一般に $T(f\oplus g)=Tf+Tg$，$Tf=T\bar{f}$ となるような real valued transform T の特殊な１例であるが，T と M は φ の上の $\lambda(\varphi_1+\varphi_2)=\lambda\varphi_1+\lambda\varphi_2$ なる operator λ によって $T=\lambda M$ なる関係にあることが示されている。

以上のことから $(F\otimes G)(x)=max\{F(u)\times G(v)\}$ に対して $\mathfrak{M}(F\times G)=(\mathfrak{M}F)\times(\mathfrak{M}G)$ となるような $\mathfrak{M}$ を求めることは $F(x)=e^{f(x)}$，$G(x)=e^{g(x)}$ とおくことにより，また $min_{u+v=x}\{f(u)+g(v)\}$ の場合にも簡単な modification により，本質的には同じ解決が与えられる。

最後にいくつかの特殊な f と F についてそれぞれ Mf と $\mathfrak{M}F$ が計算されている。（阿部俊一）

Alt, F. L：Safety Levels in Military Inventory Management. *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, *10*, *786―794* (*1962*)

在庫管理の論文はたいてい１品目だけを扱ったものであるが，実際にはたいがいに関連のある多品目の control をする必要が起ることが多い。この論文は題名の示すように軍関係の safety level problem を扱うために，次にのべるようないくつかのかなり大胆な仮定のもとに最適な多品目の stock levels S_i を求めようとするもので，使われている解析手段は古典的かつ初等的であるが，民間の企業にとっても参考になるものを含んでいる。

話を具体的にするために，航空機用の M 種類の部品を考え，system の中の機数を N として，一定の取替期間内（在庫はこの期間の長さを周期として補充される）に k 番目の飛行機で第 i 部品の取替が必要となる確率（$1\leq i\leq M$，$1\leq k\leq N$）が知られており，部品の取替要求の発生は各機各部品ごとにたがいに独立とし，同一期間内に１機の同じ部品を２回以上取替える必要はおこらず，どの部品も他の部品で代用することはできないものとする。また部品の不足が生じたとき，その部品を必要とする各機への部品の配分は random におこなわれ，部品 i の

level を S_i とするとき，一期間当りの総在庫保有費は $\sum_{i=1}^{M} c_i S_i$ であらわされ，これが予算の制限をうけて $\sum_i c_i S_i = b$ であるとする。

以上の仮定のもとに system の状態は次のような MN コの x_{ij} で示される。すなわち，飛行機 k の部品 i がないとき $x_{ik}=0$，その他のとき $x_{ik}=1$。状態 $(x_{11}, \cdots\cdots, x_{MN})$ にある飛行機群の utility を $L(x_{11}, \cdots\cdots, x_{MN})$，・・・・・生じる確率を p $(x_{11}, \cdots\cdots, x_{MN})$ として，与えられた条件のもとで

$$U = E(L) = \sum_{ik} L(x_{11}, \cdots, x_{MN})\ P(x_{11} \cdots, x_{MN})$$

を最大にするように S_i $(1 \leq i \leq M)$ を決定しようとするのである。それには $x_{ik}=0$ となる確率を q_{ik}^* とおくとこれは S_i と q_{lm} $(1 \leq l \leq M,\ 1 \leq m \leq N)$ によって表現することができ，$p\ (x_{11}, \cdots, x_{MN}) = \Pi_{i,k}\ [x_{ik}(1-q_{ik}^*) + (1-x_{ik})\ q_{ik}^*]$ となる。いま飛行機が使用不能のとき $x_k=0$，そうでないとき $x_h=1$ とすれば，一般に x_k は x_{1k}，……，x_{Mk} によって定まり，特に部品が１個でも不足すればその飛行機は使用不能とすると，$x_{\cdot} = \Pi_i x_{ik}$，その上近似的にもせよ

$$L = d_o + \sum_{k=1}^{N} d_k\, x_k$$

が成立すると仮定すれば（d_k は marginal cost）

$$U = E(L) = d_o + \sum_k d_k p_k^*$$

$$p_k^* = E(x_h) = P\ \{x_k = 1\} = \Pi_{i=1}^{M}\ (1-q_{ik}^*)$$

となるから，条件 $\sum_i c_i S_i = b$ のもとに U を最大にする S_i を求めることは Lagrange multiplier を用い，偏微分して０とおく古典的な方法による。

（阿部俊一）

E. S. Phelps : The accumulation of risky capital : A sequential utility analysis, ***Econometrica, Vol 30, No 4, (1962), 729〜743***

畜積できる唯一つの財，資本が減る危険がある場合の，貯畜の utility analysis をやる。この危険の結果，と他の母数の最適消費政策への影響をＤＰにより解析する。

第 n 期首の資本 x_n のうち，ある量 C_n を消費することにきめる。期末には資本成長（成長率 B_n）と同時に y（定数）だけの non-wealth income がある。B_n が独立確率変数で

同一分布

確率 P_i で β_i $(i=1, \cdots, m\,; \sum_1^m P_i = 1\,; \sum_1^m P_i\beta_i \equiv \beta > 1)$ に従うとする。

u(c) を strictly increasing and strictly concave ft.，$0 < \alpha \leq 1$ を割引率として

最大問題

$$\begin{cases} J_N(C_1, \cdots, C_N) \equiv \left[\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1}\ u(C_n)\right] \longrightarrow max. \\ x_{n+1} = B_n(x_n - C_n) + y \quad (n=1, 2, \cdots\,; x_1 = x) \\ 0 \leq C_n \leq x_n \quad (n=1, 2, \cdots\cdots) \end{cases}$$

を考える。この最大値を $W_N(x)$ とおくと

$$W_N(x) = \max_{0 \leq c \leq x} \left[u(c) + \alpha \sum_{i=1}^{m} P_i W_{N-1}(\beta_i(x-c)+y)\right]$$

$$(N = 1, 2, \cdots\cdots\,; w_o(x) \equiv 0)$$

が成立する。これを解いている。（坂口　実）

H. Scarf : The optimalty of (S, s) policies in the dynamic inventory poblem, ***Math. Methods in the Social Sciences,*** **Stanford Univ, Press, 1960, 196〜202.**

excess demand がいつも backlog されるときの D. P. 方程式は

$$C_n(x) = \min_{y \geq x} \left[k\ (y-x) + L(y) + \alpha \int_0^\infty C_{n-1}\ (y-\xi)\ \varphi(\xi) d\xi\right] \qquad (1)$$

$(n=1, 2, \cdots\cdots\,; C_o(x) \equiv 0)$．ここに

$$L(y) \equiv \begin{cases} \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_y^\infty P(\xi-y)\varphi(\xi)d\xi & y \geq 0 \\ \int_0^\infty P(\xi-y)\varphi(\xi)d\xi \end{cases}$$

は量 $y-x$ を注文して在庫を y に保つときの第１期の holding および penalty cost である。

［定理］$L(y)$ が convex，かつ

$$k(z) = \begin{cases} 0, & z = o \\ K + C_z, & z > o\,; K > o \end{cases}$$

のときは，(１)の最適政策は $(S_n,\ s_n)$ 型の在庫政策である。

が，つぎの

(Lemma 1) $K \geq 0$ とする。

$$K + f(a+x) - f(x) - af'(x) \geq 0$$

forall $a > o$, x

のとき $f(x)$ を K-cnvex なりという。すると

(i)　O-conVex は普通の convex と同じ，

(ii)　$f(x)$ が K-convex ならば任意の h に対し $f(x+h)$ も然り。

(iii)　f が K-convex, g が M-convex ならば $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu > 0)$ は $\lambda K + \mu$ M-convex.

(iv)　M≧K とすると，K-convex ならば M-convex および

(Lemma 2)

$$G_n(y)\equiv cy+L(y)+\alpha\int_0^\infty C_{n-1}(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$
$$(n=1,2,\cdots\cdots;C_0(x)\equiv 0)$$

とおく，$G_n(y)$がK-convex ならば，(1)の最適政策は (S_n,s_n) 政策である。

を用いて証明されている。　　　　　　(坂口　実)

J. M. Danskin: Reconnaissance I, *Opns Res., Vol.10 (1962), 285～299*

おとりのある場合の地上目標に対し，地域的識別努力の最適配分に関する研究である。偵察軍がいろいろの地域に識別努力を配分する。偵察効果をはかる尺度として通信理論の情報函数を使う。

x………識別水準 (recooaissance level)。例えば偵察機の飛行高度。

P_i ……第 i 種の目標の存在確率。与えられた定数である。

P_{ij} ……第 i 種の目標が第 j 型の偵察写真を生む確率。x の与えられた函数である。

とすると，水準 x の識別により得られる平均情報量は

$$I(x)=\sum P_iP_{ij}(x)log(P_{ij}(x)/\sum P_iP_{ij}(x)) \quad (1)$$

である。

いま地域が幾つもあって，各地域 k において $P_{i,k}$ と $P_{ij,k}(x)$ とが与えられているとき，識別努力の総量 X が与えられて，情報量の総和を最大にするように識別努力を各地域に配分する問題は，

式でかくと，

$$\sum_k\{C_k\sum_{i,j}P_{i,k}P_{ij,k}(x_k)log(P_{ij,k}(x_k)/\sum_i P_{i,k}P_{ij,k}(x_k)\}\longrightarrow max.$$

subject to

$$\sum_k x_k=X,\ x_k\geqq 0$$

となる。C_k は与えられた正定数で地域 k の重要さを表わす。

{ }の中を $I_k(x_k)$ とかこう。$I_k(x)$ が皆 concave または皆 convex のときはこういう最大問題は簡単に解けるが，それ以外の場合はなかなか解けない。幾つかの適当な仮定のもとで(1)の函数が，convex-concaveになることが計算されている。(函数の凹凸を調べるには $I'''(x)$ を調べればよい。例えば $I'''(x)<0$ ならば，$I(x)$ は convex か concave か convex-concave かである。 (坂口　実)

J. M. Danskin: Reconnaissance II, *Opns. Res., Vol 10 (1962), 300—309*

前論文 I において，偵察される側も，偵察機に与える平均情報量を最小にするよう対抗する場合を考える。すなわち2人 game の model にすると，いろいろのOR的問題が生ずる。例えばいろいろの地域に各種 missile を配置する防衛側と，それを偵察機で写真撮影する偵察側との0和2人 game として次のものがある P_i, P_{ij} は前論文 I におけると同じとして

q_{ij}……第 j 型の写真をとったとき，それが第 i 種の missile のものである確率，すなわち
$q_{ij}=P_iP_{ij}/\sum_i P_iP_{ij}$ である。

q_j……第 j 型の写真がとれる確率。すなわち
$q_j=\sum_i P_iP_{ij}$

とする。

防衛側が第 k_k 種のmissile を地域 k に配備して敵側に与える confusion の総和を最大に。

$$\sum_k C_k\sum_j P_{hkj}\sum_i q_{ij}\ log(1/q_{ij})\longrightarrow max.$$

しようとすれば，偵察側はこれを最小にするよう写真撮影系 q_{ij} をえらぶ，というのである。

また撮影した写真の解釈組織の (interpreting system) の効果について：

r_{jk}……第 j 型の写真が解釈 k を生む確率

r_k ……写真が解釈 k を生む確率。すなわち
$r_k=\sum_j q_jr_{jk}$

t_{ik}……写真の解釈 k を得たとき，それが第 i 種の目標だった確率。すなわち
$t_{ik}=P_i\sum_j P_{ij}r_{jk}/\sum_j q_jr_{jk}$ である。

解釈組織 $P=(r_{ik})$ のうけとる confusion は

$$C_R=\sum_i r_k\sum_i t_{ik}\ log(1/t_{ik}),$$

写真系に固有の confusion は

$$C_P=\sum q_j\sum q_{ij}\ log(1/q_{ij})$$

であるが $C_R\geqq C_P$ なることが示されるから，

$E=C_R-C_P$ が空中写真解釈組織の効率を表わす。

(坂口　実)

D.L.Iglehart: Optimality of (S.S) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem. *Manag, Sci., Vol 9 (1963) No.2, 259～267*

注文費用が $k(z)=Cz+$ Ksgn$Z$, その他の $h(\cdot)$, $P(\cdot)$ がconvexのとき，n期間のdynamic inventory problemの最適注文政策は (S_n, S_n) 政策となるが (Scarf, 1960) この論文は解の漸近的性質を調べている。

函数方程式は

$$f_n(x)=\min_{y\geq x}\Big[k(y-x)+L(y)+\alpha\int_0^\infty f_{n-1}(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big]$$

$$(n=1,2,\cdots\cdots;\ f_0(x)\equiv 0$$

ただし,

$$L(y)\equiv\begin{cases}\int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int_y^\infty P(\xi-y)\phi(\xi)d\xi, & y\geq 0\\ \int_0^\infty(\xi-y)\phi(\xi)d\xi, & y>0\end{cases}$$

となる。まづ

(Lemma) $2s_1-s_1<s_n<s_n\leq M(<\infty)$ $(n=1,2,\cdots)$

を示しこれを用いて

[定理] (i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する。この収束はすべての有限区間で一様。

(ii) 極限函数 $f(x)$は

$$f(x)=\min_{y\geq x}\Big[k(y-x)+L(y)+\alpha\int_0^\infty f(y-\xi)\,\phi(\xi)d\xi\Big] \qquad (2)$$

を満足する。

および

[定理] $F(x)$を, (任意の有限区間内で有界な(2)の他の解で,

$$\exists y;\ \inf_{y\geq x} F(x)>-\infty,$$

なるものとすると, $F(x)\equiv f(x)$,

を厳密に証明している。 (坂口　実)

Büklmann, H & Huber, P.J: Pairwise Comrarison and Ranking in Tournaments, *Ann, Math. Stat. Vol.34 No.2. pp501～510.*

nチーム (n人, n個の商品) について, 総当りリーグ戦を行って, 順位を決める場合, 普通, 勝数の多い順に並べる。これに対して例えば〝金星〟を考慮に入れた Wei-Kendall の方法のような考え方もある。この論文はこのような方式の〝よさ〟の問題を論じたものである。

まづ問題を次のように定式化する。a_{ij} を

$a_{ij}=1$　　i が j に勝ったとき

$\quad=0$　　j が i に勝ったとき

と定義する。$a_{ij}+a_{ji}=1$ である。次に

$P_r\{a_{ij}=1\}=P_{ij}$

とする。またa_{ij}はすべて互いに独立と仮定する。

最も簡単な場合として次のような場合を想定しよう。$\{P_{ij}^*\}$ を P_{ij}の値の一つの組み合わせとする。nチームの一つの〝真の順位〟$\sigma=\{r_1\cdots\cdots r_n\}$ に対して (r_iはチームの順位を表わす)

$P_{ij}=P_{ri}^{*}{}_{rj}$　　$i.j=1\cdots\cdots\cdots\cdots n$

となるとするとき, $\{a_{ij}\}$ から〝真の順位〟をあてる問題を考えよう。

この問題について, 尤度

$$\prod_{i<j} P_{ij}{}^{a_{ij}}$$

を最大にするようなσを真の順位の推定量として取る方式を考えると, これはチームのおきかえに関して不変な方式の中で, 正しくあてる確率を最大にする。すなわちそういう意味で最適になる。

しかし最初の $\{P_{ij}^*\}$ がただ一通りでなく, いくつかの組からなっているときには, このような意味で最適な方式は, 必ずしも存在しないことが示される。

この論文の主要定理は, 次のような形で表わされる。

いま $s_i=\sum a_{ij}$ (すなわち勝ち数+½)とすると, s_iの順に並べるのが一様に最適とするための必要かつ十分な条件は, $\{P_{ij}^*\}$ が

$P_{ij}^*=\pi_i^*/(\pi_i^*+\pi_j^*)$: $\pi_1^*\geq\cdots\cdots\geq\pi_n^*$

すなわち $P_{ij}^*=1/(1+e^{-\theta_i^*+\theta_j^*})$: $\theta_1^*\geq\cdots\geq\theta_n^*$

と表わされることである。

P_{ij} に関する上記のような関係は, 対比較における Bradley-Terry のモデルとして知られている。紹介者は, このモデルが, チーム相互間に〝苦手〟がない場合の定式化と見なすことができるということをかって示したことがある。

すなわちこの論文の結論は, リーグ戦の結果, 勝ち数によって順位を決定することは, チームの間に苦手の関係がない場合ならば合理的であることを示している。 (竹内　啓)

Klotz.J: Small Sample Power and Efficiency for the one Sample Wilcoxon and Norma Score tests; *Ann. Math. Stat. Vol. 34 1963 pp 624～632.*

いわゆるノンパラメトリック検定, ことに順位検定と呼ばれる種類のものは, 少くとも漸近的には極めてよい性質を持つことが, これまで知られていたが, 小標本については, はっきりしたことはわかっていなかった。この論文は, 小標本の場合について数値計算の結果を与えている。

問題は X_1……X_N が対称分布に従うとき，その中央値 μ についての仮説 $\mu=0$ を検定する，二つのノンパラメトリック検定方式，すなわち Wi lcoxon の符号つき順位和片側検定と，正規分布の順序総計量の期待値をスコアとして用いる片側検定について正規分布を仮定した場合の検出力の正確な値を計算し，かつそれを t 検定の検出力と比較する。

この場合分布は離散型になるので，α は丁度5％等にすることができない。従って普通に用いられる水準の近くの値がとして取り上げられている。また効率は，次のように定義されている。すなわちあるNに対して，丁度N^1の標本数の検定と検出力が等しくなるとは限らない。N′のときの検定の検出力が $\beta_{N'}$ N′+1 のときの検定の検出力を $\beta_{N'+1}$ とするとき $\lambda\beta_{N'}+(1-\lambda)\beta_{N'+1}$ がが丁度標本数Nのノンパラメトリック検定の検出力に等しくなるとき効率を $\{\lambda N'+(1-\lambda)(N'+1)\}/N$ で定義する。そうして N＝5～10について $\mu=0$ の近傍，$\mu/\sigma=.25$～3および∞のところで効率を計算している。その結果，Wilcoxon 検定の効率はN≦10のような小標本について極めて高いことが示されている。（漸近効率は$3/\pi=0.95$)．Normal score 検定についても，この程度の範囲では，結果はWilcoxon 検定の場合とほとんど同じになっている。以下に表の一部をあげる。

Wilcoxon 検定の効率

N	α	$\mu/\sigma \doteqdot 0$	.25	.50	1.0	1.5	2.0	∞
5	.0625	.988	.986	.984	.981	.979	.979	.881
6	.0469	.986	.983	.980	.975	.972	.970	.784
7	.0547	.986	.983	.981	.976	.974	.974	.797
8	.0547	.982	.980	.977	.973	.971	—	.728
9	.0273	.985	.982	.980	.975	.973	—	.757
9	.0488	.978	.976	.973	.970	.969	—	.697
10	.0098	.983	.980	.976	.970	.964	.959	.744
10	.0527	.970	.968	.967	.965	.964	—	.956

このような結果から考えると，符号和検定が普通の実用上の問題について，極めて望ましいものであり，検定より，良いということがほとんど確実にいえるように思われるが，このような計算がなおいろいろな場合について（両側検定，２標本検定，或いは，正規分布以外の分布等）なされることが望まれる。　　　　　　　　　　　　　（竹内　啓）

Pratt. J, W : Shorter Confidence Intervals for the mean of a Normal Distribution with Known Variance : *Ann. Math. Stat, Vol.34 No.2 1963 pp.574～586*

いわゆる統計的推測の理論において，検定論および点推定論の理論の著しい発展にくらべると，信頼区間の理論は一つの盲点として取り残されている感じが否定できない，この論文はその点について，ちょっとした思いつき程度ではあるが面白い結果を出している。

Xが正規分布$N(\Theta,1)$に従うとき，$R(x)$をΘの信頼区間とすると，

$$P_{\theta}\{R(\mathrm{x})\ni\Theta\}=1-\alpha \qquad \forall\theta \qquad (1)$$

次に$\Theta=\Theta'$のときの$R(\mathrm{x})$の長さの期待値は

$$E_{\theta'}(m(R(\mathrm{x})))=\int_y P(x,\Theta')dx\int_{\theta\in R(x)}d\Theta$$
$$=\int_{\theta=\theta'}P_{\theta'}\{\Theta\in R(x)\}d\Theta$$

と表わすことができる。

従って持定のΘ'について平均長さを最小にするには，$P_{\theta'}\{\Theta\in R(\mathrm{x})\}$を最小にすればよい。

$X\in A(\Theta)$　$\Theta\in R(\mathrm{x})$ とするとき，

（1）から$A(\Theta)$は仮説$\Theta=\Theta$ の有準水準の受容域となるが$1-P_{\theta'}\{\Theta\in R(\mathrm{x})\}$はこの検定の$\Theta=\Theta'$ の点における検出力となるから，結局$P_{\theta'}\{\Theta\in R(\mathrm{x})\}$を最小にするには，対立仮説$\Theta=\Theta'$ に対する最強力検定をとればよいことになる。従って，

$\Theta'<\Theta$ならば，$X>\Theta'-\xi\alpha \Longleftrightarrow X\in(\Theta)$

$\Theta'>\Theta$ならば$X<\Theta'+\xi\alpha$——$X\in A(\Theta)$

とすればよい，これから得られる信頼区間は

$$min\{\Theta',\ X-\xi\alpha\}\leqq\Theta\leqq max\{\Theta',\ X+\xi\alpha\}$$

という形になる。このような信頼区間の平均長さ$E_{\theta'}(m(R(\mathrm{x})))$は$\alpha=0.05$とすれば次のようになる。

$\lvert\Theta-\Theta'\rvert$								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3.33	3.45	3.89	4.68	5.65	6.65	7.64	8.64	9.64

すなわち$\lvert\Theta-\Theta'\rvert<2$　ならば，このような信頼区間は普通の信頼区間（長さ$2\times1.96=3.92$）より平均的に短かくなることがわかるであろう。

この論文では同様な考え方によってQに関する先験分布として正規分布を仮定したときの平均長さを最小にする方式も計算されている。またこれと，事後確率による Baycs 流の議論との比較も行われている。そうしてこのような平均長さ最小の信頼区間と，Bayes 流の議論から得られる区間とは一致しないことを論じているが，詳細は省略する。

（竹内　啓）