在庫管理における需要分布と需要変化に関する研究

大 前 義 次*

1. 要　　旨

発注点方式は，調達期間中の需要変動による品切れを防ぐために，安全在庫量を確率分布にもとづいて求め，発注点を決める方式である。通常この場合，月々の需要量は正規分布に従い，その平均値と標準偏差は既知であるとして計算が進められる。ところが月々の需要分布が真に正規分布に従っているかどうかを確めることは事実上容易でない（サンプル数不足による）。ここでは正規分布という仮定で組立てた方式が，実際の需要分布が正規分布に従っていない場合に，結果としてどのような違いが生ずるかについて検討し，その違いの意外に小さいことを指摘する。また，発注点方式の算定は過去の需要実績と将来の予測にもとづいてなされる。前者については通常過去1カ年あるいは6カ月のデータから計算を行うというやり方がとられているが，品種の数が多くなると，このようなやり方では，かなりの手間がかかることと，ときには無駄の生ずることも多い。本研究はこれに対して，発注点・発注量改訂の時期を見出す方法について検討したものである。

2. 需要分布の問題

ORのアプローチでは，基本的に異なる二つの態度が考えられる。一つは実際の確率分布をよく調べて，それにうまく適合する精密なモデルを作りあげるゆき方であり，もう一つは結果に及ぼす影響の程度をあらかじめ検討しておき，それが許容される範囲内で近似的モデルを組み上げてゆくといういき方である。本研究は後者の立場をとるものである。

2. 1. 発注点方式における需要分布の仮定　通常，発注点方式では，次の仮定がなされる。

仮定　毎月の需要量は平均値 μ，標準偏差 σ の正規分布に従う。

この仮定にもとづいて，発注点 L は次式で与えられる。

$$L = N\mu + k\sqrt{N}\,\sigma \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで　N：調達期間

k：品切れ率に対応する正規偏差

2. 2. 月間需要量が必ずしも正規分布に従うと仮定できない場合の評価

（i）日々独立に生起する需要がある場合には，その和の分布である月間需要分布は中心極限

* 日本電信電話公社　昭和38年 5 月 3 日受理　「経営科学」 第1巻1号

定理によって正規分布に近づくことが考えられる。さらに定量的評価として，

(ii) Gauss の不等式（1821年）によれば [1]，単一モードの連続分布であるという情報にもとづいて，次の関係が与えられる。

$$P\,(\,|\,\xi - x_o\,| \geqq k\tau) \leqq \frac{4}{9\,k^2} \quad \text{すべての}\ k > 0\ \text{に対して} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで　ξ ：確率変数

x_o ：モード

$\tau^2 = \sigma^2 + (x_o - \mu)^2$

Camp − Meidell の不等式では [2]，これと同じ結果を次のようにいいかえている。

$$P\,(\,|\,\xi - \mu\,| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{2.25k^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ただし，これは次の条件を満足する場合に限る。

a．分布は単一モードであること。

b．モードは平均値に一致していること。

c．モードの両側で連続的に減少すること。

そこで，需要分布が正規分布には従わないが，Camp−Meidell の条件は満しているものとすれば，式(3)から品切れ率５％の場合，

$$P\,(\,|\,\xi - \mu\,| \geqq 1.645\,\sigma) \leqq 0.165$$

となる。発注点方式では上限だけを考えればよいので，その割合は 8.3% となる。正規分布の仮定から出発した場合より 3.3% 品切れ率が増加するに過ぎない。他の品切れ率の場合も含めて，この関係を表に示すと次のようである。

表 1

品切れ率（%）	k	実際の品切れ率（%）	増加品切れ率（%）
1	2.326	4.1	3.1
5	1.645	8.3	3.3
10	1.282	14.1	4.1

実際の需要分布はモードが一般に原点側に寄る傾向が強い。いま，月間需要分布が指数分布に従うと仮定すると。

$$P\,(\xi - \mu \geqq k\sigma) \leqq e^{-(1+k)} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

であり，品切れ率５％の場合には，

$$P\,(\xi - \mu \geqq 1.645\sigma) \leqq 0.07 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

となるにすぎない。他の品切れ率の場合も含めてこの関係を表に示すと次のようである。

表 2

品切れ率 (%)	実際の品切れ率 (%)	増加品切れ率 (%)
1	3.6	2.6
5	7.0	2.0
10	10.2	0.2

3. 3. 需要分布が Erlang 分布に従うときの正規近似の評価　Erlang 分布は，その phase パラメータを変化させることにより指数分布から一定需要までの広範な分布に適合させることができ，また1カ月中の需要分布が Erlang 分布に従う場合。これを調達期間中の需要分布に容易に分解可能であるので，ここではこの分布を取上げることとした。

次の仮定をおく

仮定1　1日の需要分布は平均値 μ' の指数分布に従う。

N日間（調達期間）の需要の分布は平均値 $N\mu'$ をもつ第 N 次の Erlang 分布に従う。その密度函数を $f(x)$ とすると，

$$f(x) = \frac{1}{\mu'(N-1)!}\left(\frac{x}{\mu'}\right)^{N-1} e^{-\frac{x}{\mu'}} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

この分布の標準偏差は $\dfrac{N\mu'}{\sqrt{N}}$ である。従って変動係数は $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ である。

N日間の需要 x が L 以上である確率 $P(x \geqq L)$ は

$$P(x \geqq L) = \int_L^\infty f(x)\,dx = e^{-\frac{L}{\mu'}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{L}{\mu'}\right)^n}{n!} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

すなわち，$P(x \geqq L)$ はポアソン分布の累積和となる。

仮定2　1カ月間の需要分布は平均値 μ，標準偏差 σ の正規分布に従う。

この場合，N日間の需要分布は，平均値 $\dfrac{N\mu}{30}$，標準偏差は $\sqrt{\dfrac{N}{30}}\,\sigma$ となる。

N日間の需要量 x が L 以上である確率 $P(x \geqq L)$ に対応する正規偏差を k とすれば

$$L = \frac{N\mu}{30} + k\sqrt{\frac{N}{30}}\,\sigma \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\frac{30L}{N\mu} = 1 + k\sqrt{\frac{30}{N}}\,\frac{\sigma}{\mu} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

ここで $\dfrac{\mu}{30} = \mu'$ とおくと

$$\frac{L}{N\mu'} = 1 + k\sqrt{\frac{30}{N}}\,\frac{\sigma}{\mu} \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

となる。

需要分布が Erlang 分布と正規分布にそれぞれ従う場合について，品切れ率の比較を行う。ただし，1カ月間の需要分布の変動係数は，Erlang 分布も正規分布もともに等しいものとする。この場合の変動係数は 0.183 である。

（i） 品切れ率一定の場合の比較

品切れ率を一定とし，発注点 L が調達期間中の平均需要量 $N\mu'$ の何倍に当っているか，$L/N\mu'$ の値について比較を行うと次表のようになり，その差は僅少である。

表 3 $P(x \geqq L)=0.05$ の場合

N （日）		4	10	16	30	60
Erlang 分布	$1/\sqrt{N}$	0.500	0.316	0.250	0.183	0.129
	$L/N\mu'$	1.942	1.575	1.451	1.317	1.219
正規分布	$L/N\mu'$	1.824	1.521	1.421	1.301	1.213

$P(x \geqq L)=0.01$, 0.1 の場合については，$N=4$ の場合（上表で差のもっとも大きい場合）について次表に示す。

表 4

$P(x \geqq L)$	0.01	0.1
Erlang 分布	2.613	1.672
正規分布	2.165	1.645

(ii) 需要分布が Erlang 分布に従う場合，これに正規近似を行ったときの実際の品切れ率は次表のようになり，若干品切れ率が増加するが，その差は僅少である。

表 5 品切れ率5％の場合

N （日）	4	10	16	30	60
実際の品切れ率 （％）	6.8	6.4	6.2	5.8	5.3

さらに品切れ率1％，10％の $N=4$ の場合を次表に示す。

表 6 $N=4$

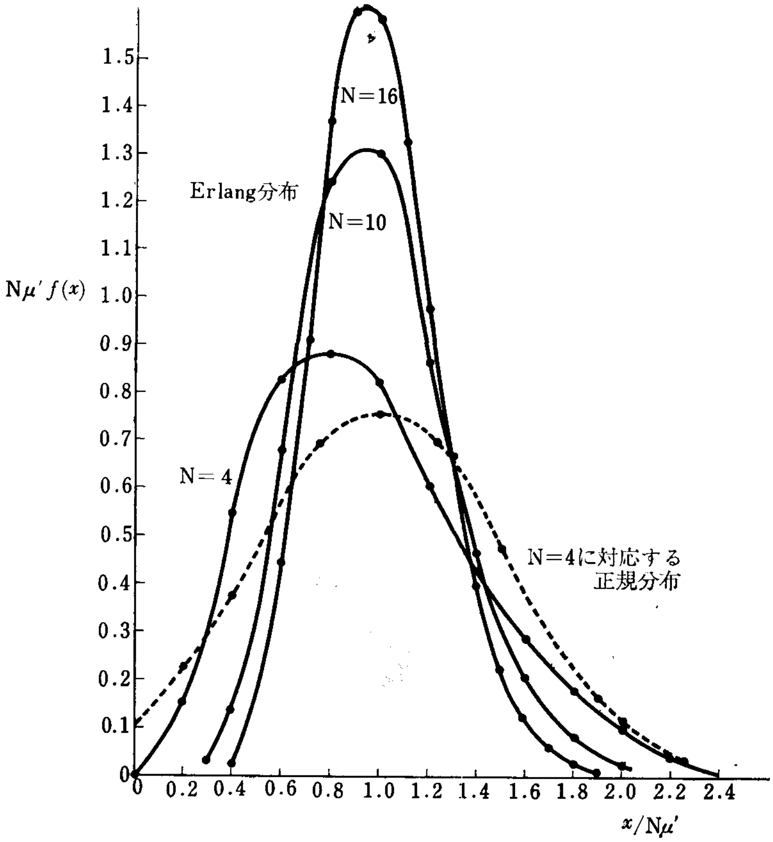
品切れ率 （％）	1	10
実際の品切れ率 （％）	2.4	11.8

なお，Erlang 分布と正規分布の分布図による比較を次の図1に示す。発注点方式で問題になるのは分布の上方のスソであり，上の方からとった累積分布が問題になるのである。

以上の検討をとおして，分布法則が必ずしも正規と確認されないときでも正規近似を行うことは妥当性をもつことがわかる。

3. 需要変化の問題

需要量の変化に対応して発注点・発注量が改訂される。一般に，需要量変化を知る一つの手段



として，過去6カ月〜1カ年間の需要量を調べ，その平均値，標準偏差が計算される。しかし物品点数が多い場合に，いちいちこれを行うことは大変手数がかかる。またせっかく計算を行っても，平均値•標準偏差のいづれもほとんど変化していないということが起きる。これは徒労といわねばならない。このようなことに対応するため需要変化を何らか簡便な尺度によって見出し，平均値・標準偏差の計算を要するものだけ選んでそれらを計算するようにすれば稼働救済がはかれるはずである。このような尺度として研究の結果，一定期間中の発注回数の優れていしことが判明した。発注回数の調査は，物品払出簿を目視で調べただけで，容易に知ることができる。ここでは，需要変化を見分けるための発注回数に対こる基準設定のメカニズムについて明らかにしたい。

3. 1. 発注点・発注量改訂の時期を決めるため次のルールを定める

ルール 次の条件に該当するとき，発注点・発注量を改訂する。

a. 一定期間中の発注回数が上限基準値を越えた。

b. 一定期間中の発注回数が下限基準値を下廻った。

c. 品切れが多発した。

d. 調達期間が変わった。

e. 他の情報により需要変化が明らかとなった。

以下，発注回数の上・下限基準値決定方法について述べる。

3. 2. シミュレーションによる上・下限基準値の検討　規定した発注点・発注量・調達期間の種々の組合わせのもとで，需要分布を変化させ，その際の発注回数（ここでは年間），在庫量（月間），需要量（月間），品切れ数の推移をシミュレーションにより検討した。なおここで諸パラメータの相対的大きさが結果に対して重要な意味をもつものである。また以下ではコンピュータ・シミュレーションを行うので，ひとたびプログラムができ上るとパラメータを変えてシミュレートすることはきわめて容易なことである。

シミュレーションのための諸パラメータの例は次のとおりである。

（1）与件　調達期間　1カ月

発注点（L）　160（単位個，以下略）

（2）変化させるパラメータ

発　注　量（Q_i）	200	250	300
月間需要平均値（μ_i）	100	125	150
月間需要標準偏差（σ_i）	10	20	30

（3）パラメータの組合わせ

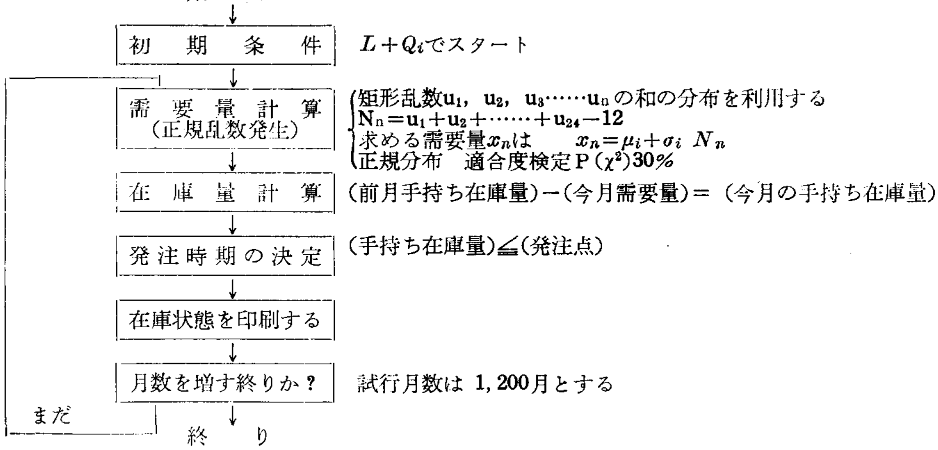
$$
q_1\begin{cases}\mu_1\begin{cases}\sigma_1 & ①\\ \sigma_2 & ②\\ \sigma_3 & ③\end{cases}\\ \mu_2\begin{cases}\sigma_1 & ④\\ \sigma_2 & ⑤\\ \sigma_3 & ⑥\end{cases}\\ \mu_3\begin{cases}\sigma_1 & ⑦\\ \sigma_2 & ⑧\\ \sigma_3 & ⑨\end{cases}\end{cases}
\qquad
q_2\begin{cases}\mu_1\begin{cases}\sigma_1 & ①\\ \sigma_2 & ②\\ \sigma_3 & ③\end{cases}\\ \mu_2\begin{cases}\sigma_1 & ④\\ \sigma_2 & ⑤\\ \sigma_3 & ⑥\end{cases}\\ \mu_3\begin{cases}\sigma_1 & ⑦\\ \sigma_2 & ⑧\\ \sigma_3 & ⑨\end{cases}\end{cases}
\qquad
q_3\begin{cases}\mu_1\begin{cases}\sigma_1 & ①\\ \sigma_2 & ②\\ \sigma_3 & ③\end{cases}\\ \mu_2\begin{cases}\sigma_1 & ④\\ \sigma_2 & ⑤\\ \sigma_3 & ⑥\end{cases}\\ \mu_3\begin{cases}\sigma_1 & ⑦\\ \sigma_2 & ⑧\\ \sigma_3 & ⑨\end{cases}\end{cases}
$$

（注）　①，②，③………⑨は試行番号である。

（4）シミュレーションのフローチャート

シミュレーションは次のフローチャートにより実施した。

図 2



(5) シミュレーションの結果

表 7 発注回数の平均値

	μ_1			μ_2			μ_3		
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
q_1	6.03	6.06	6.10	7.53	7.56	7.60	9.03	0.06	9.10
q_2	4.83	4.85	4.88	6.03	6.05	6.08	7.23	7.25	7.28
q_3	4.02	4.04	4.07	5.02	5.04	5.06	6.02	6.04	6.06

表 8 発注回数の標準偏差

	μ_1			μ_2			μ_3		
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
q_1	0.41	0.57	0.64	0.50	0.52	0.60	0.42	0.56	0.68
q_2	0.41	0.43	0.48	0.35	0.47	0.54	0.42	0.54	0.54
q_3	0.33	0.46	0.55	0.33	0.42	0.53	0.35	0.42	0.54

(6) μ, σ の変化にともなって，発注点の改訂が必要となる。すなわち，μ, σ の変化にもとづいて計算された発注点L'が，改訂前の発注点Lに対して $L\pm\triangle L$ を越える場合改訂が必要であるとする。

この△をあらかじめポリシーとして0.15，あるいは0.2というように与える必要がある。次いで二つの判断の誤りを定義する必要がある。

α：発注点改訂を要しないにもかかわらず，要改訂と現われるもの

β：発注点改訂を要するにもかかわらず，検出されないもの。

ここでαは少々大きくてもよいが，β は極力小さくおさえなければならない。これに対するシミュレーション実施の結果は図3 (a)，(b)，(c) に示すとおりである。これから発注点改訂基準として次の結論が得られる。

発注点改訂を要する発注回数の上限下限の基準は次式で与えられる。

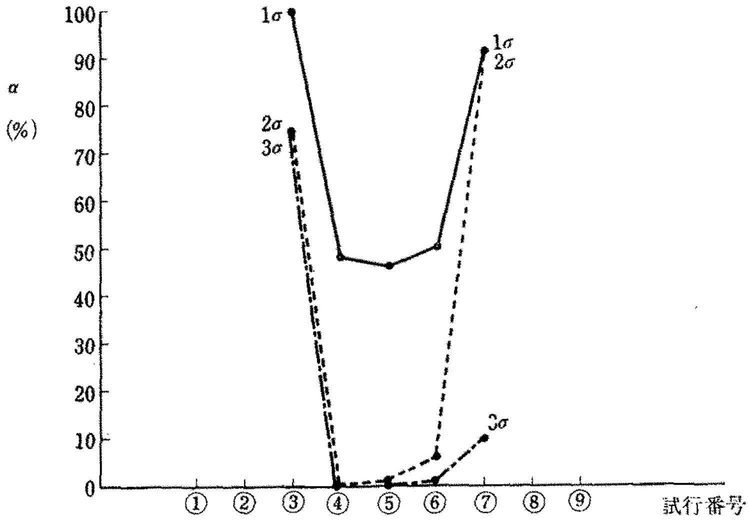
$$(\text{平均発注回数}) \pm 2 \times (\text{発注回数標準偏差}) \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

この場合，おおよそαは30%以下，βは10%以下におさえられる。なお図から明らかなように一般に，需要分布のσが増加すると β が増大する傾向にあるが，σ の増加はあらかじめ技術的にその変化が判明するか，あるいはあらかじめ判明していないときでも**図4**のように実際の品切れの急増を招き，この点から需要の増大を検出することができるので実質的にはそれほど増大しない。

(7) 品切れ多発に対する判定

3.1 のルールで，品切れ多発の情報を基準改訂に利用することを述べた。ところが品切れ率はあらかじめ，1%，5%，10%などと許容値が決められるので，需要量が増加しなくても品切れそのものは発生する。そこで需要量変化を検出する尺度として品切れ率を使用するとき，品切れ

図3 (a)　　L±0.15L以上　　(Q₁の場合，試料各号⑤を基準にとった)



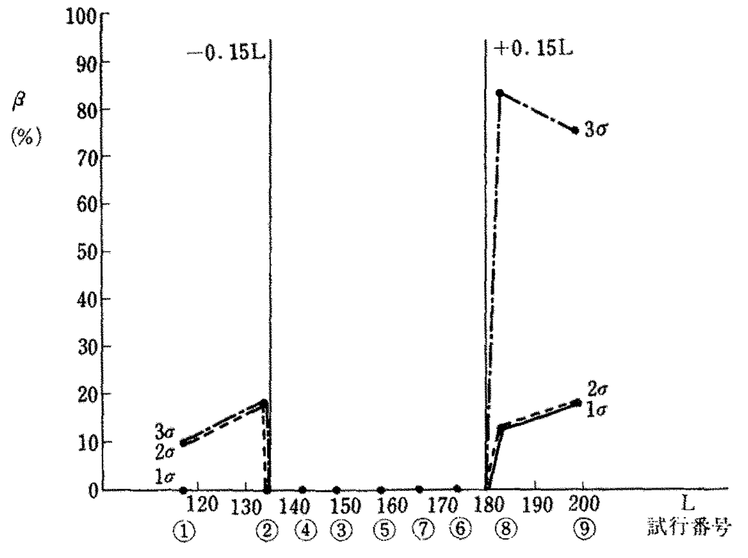


図3(b)　L±0.15L以上(Q₂の場合,試料番号⑤を基準にとった)

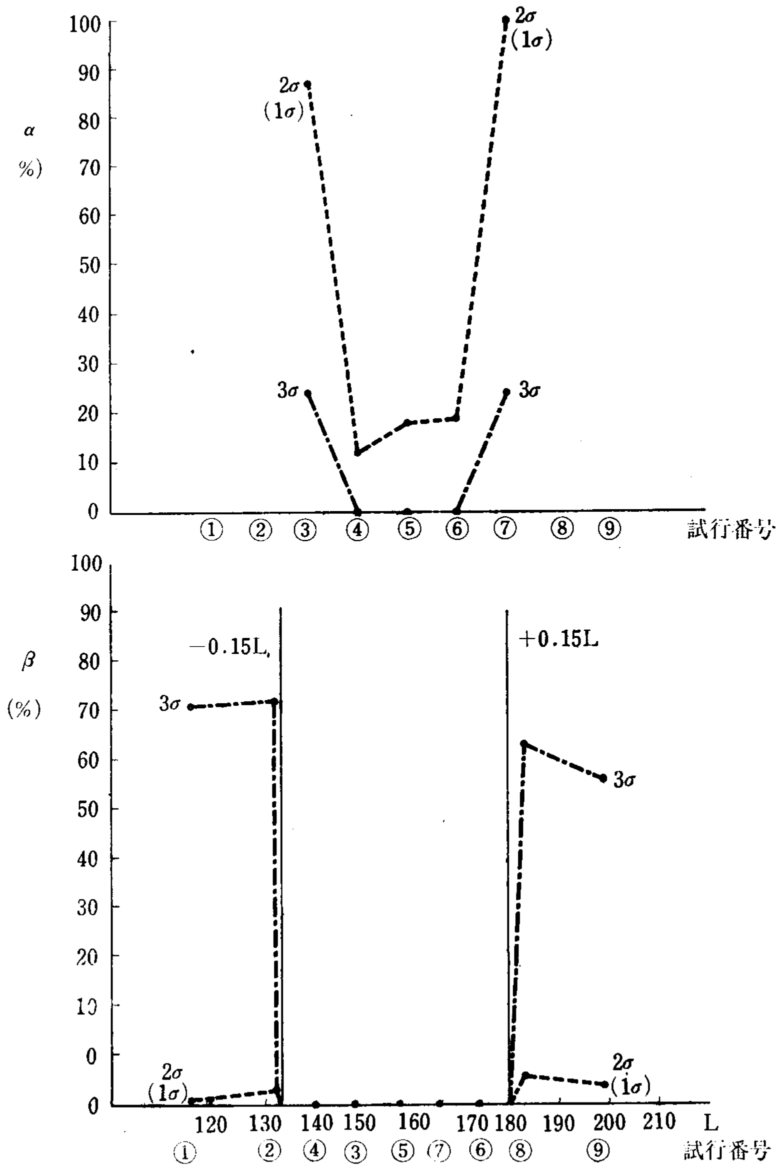


図3(c)　　L±0.15L以上　　(Q₃の場合,試料番号⑤を基準にとった)

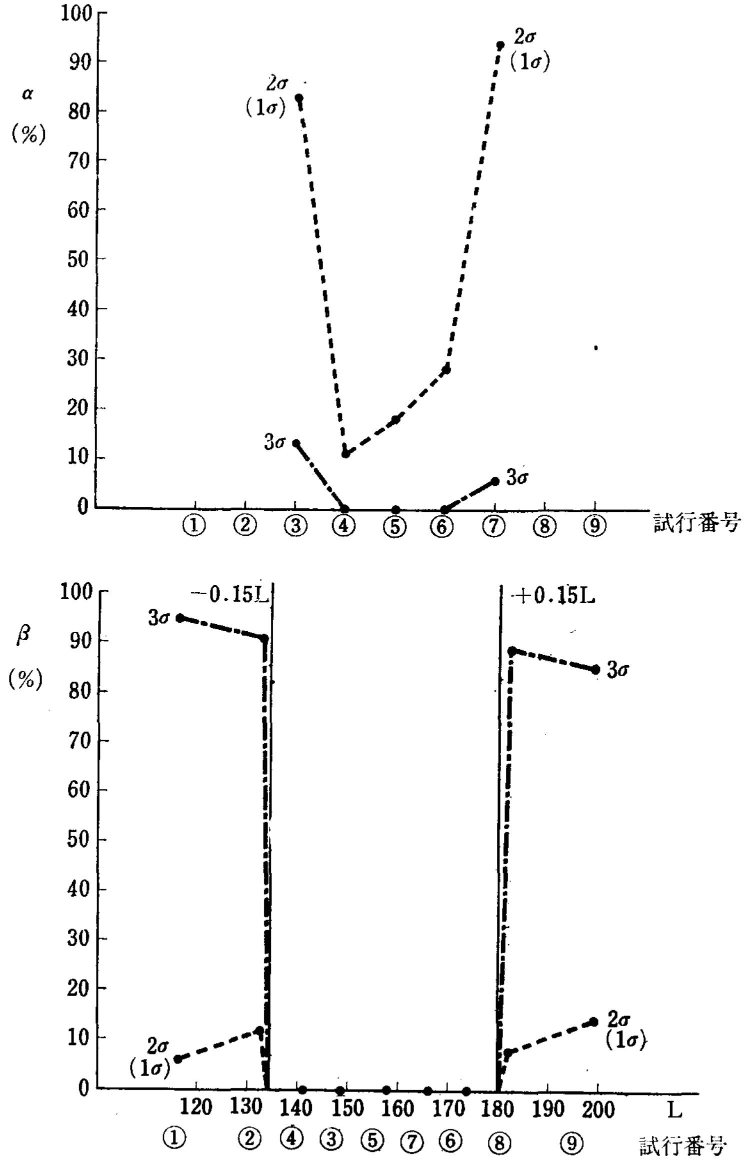
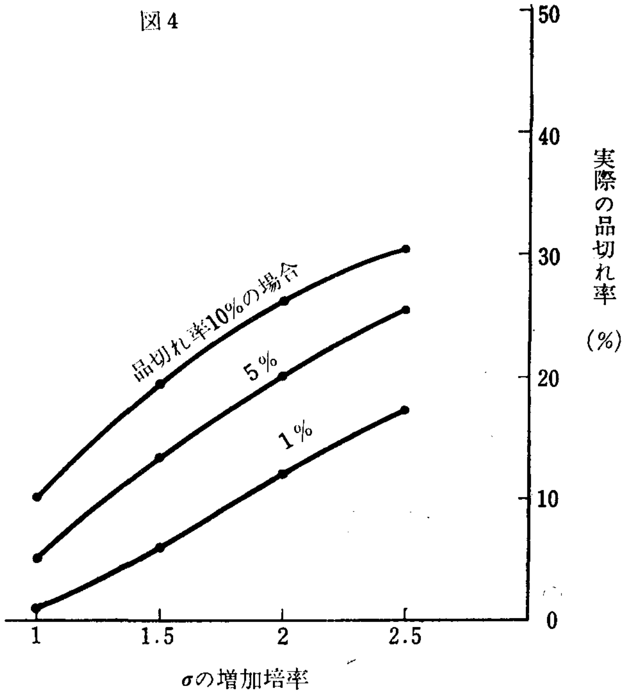


図 4



の多発を定義しておく必要がする。

年間平均発注回数と規定品切れ率のもとで年間品切れ回数の発生確率を二項分布の性質を用いて検討し，その関係を示すと表 9 のようになる。これから，需要変化がない限り，その発生確率

表 9

品切れ率(%)	1		5			10		
品切れ回数(年間) ＼ 平均発注回数(年間)	1回	2回	1回	2回	3回	1回	2回	3回
4 回	0.039	0.001	0.171	0.014	0.005	0.292	0.049	0.004
5 回	0.048	0.001	0.204	0.021	0.001	0.328	0.073	0.008
6 回	0.057	0.001	0.232	0.031	0.002	0.354	0.098	0.015
7 回	0.066	0.002	0.257	0.041	0.004	0.372	0.124	0.023
8 回	0.075	0.003	0.279	0.051	0.005	0.383	0.149	0.033
9 回	0.083	0.003	0.299	0.063	0.008	0.387	0.172	0.045
10 回	0.091	0.004	0.315	0.075	0.010	0.387	0.194	0.057

が小さな値しかとらない（1%～10%程度）ような品切れ発生頻度を選んで多発を定義すればよい，例えば

①品切れ率 1 %の場合……品切れが発生したとき

②品切れ率 5 %の場合……品切れがひきつづき 2 回発生したとき（1 年以内に）

③品切れ率10%の場合……品切れがひきつづき 3 回発生したとき（1 年以内に）

需要分布を調べるというやり方が考えられる。

（8）発注量の改訂について

発注量は次式の関係によって与えられる

$$C\sqrt{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

ここで，C：在庫保持費，品切れ費等経済性係数

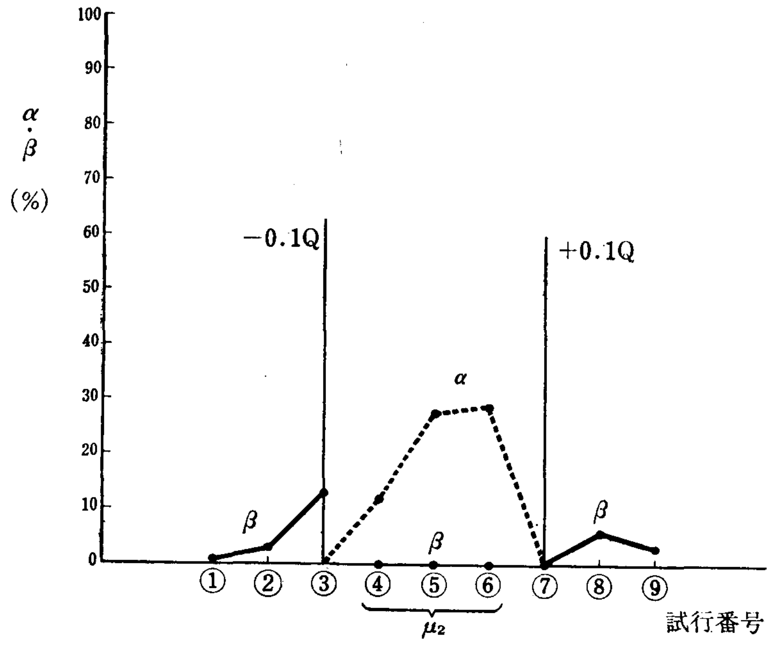
μ：月平均需要量

すなわち，需要量の変化が発注量のうえではルートでしかきかない。

さてここで，式（11）で与えた発注点改訂基準をとった場合，それが発注量改訂基準としての検出力はどうかを検討する。

発注量の1割の増減を検出しなければならない場合，**図5（a）**のようにαはおおよそ30%以下，

図5（a）　Q±0.1Q以上（Q_2,μ_2を基準にとった場合）

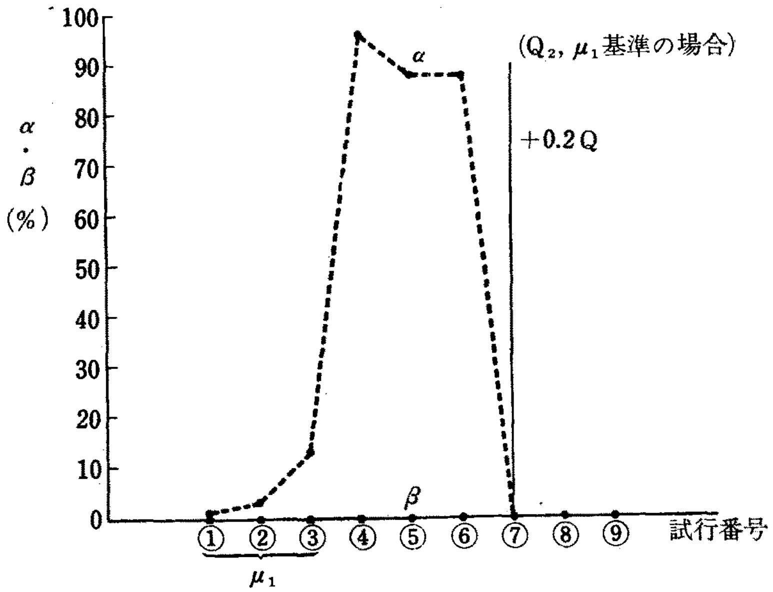


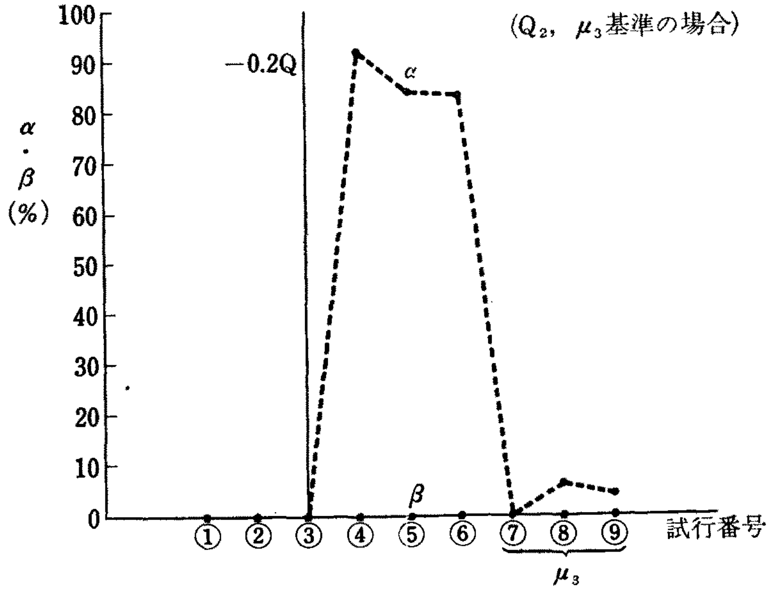
βは10%以下となる。発注量の2割の増減を検出する場合には**図5(b)**のようにβは0となる。すなわち，式（11）の基準は発注量改訂に対しても十分使用できるものである。

4. 実施結果の概要

すでに述べた正規近似の方法，ならびに需要変化にともなう発注点発注量改訂方法を昭和33年10月以来実施してきた。現在までこれらによる不都合は何ら生じていない。しかも後者の改訂方法の採用により大幅な稼働救済がはかられている。すなわち，実施前には1取扱局所で全品目に

図5 (b) Q±0.2Q以上





わたる改訂を行う場合，需要変化を平均値・標準偏差について調べ，発注点，発注量を計算し直すために約20〜30人日を必要とした。本方法によると，要改訂のものは全品目について従来の30%以下にとどまり，大幅な稼働救済が達成できた。

〔1〕 H,Cramér, Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, 1946, P. 183

〔2〕 E.L. Grant, Statistical Quality Control, McGraw-Hill Book Co. 1946, P. 76