文献抄録

BELLMAN, R. & GLUSS, B.: ON VARIOUS VERSIONS OF THE DEFECTIVE COIN PROBLEM *Information and Control Vol* 4 *(1961), 118—131*

recreational mathematics の中の有名な問題で defective coin problem というのがある．この論文はこれを DP で解くことを試みている．

N 個の同種の coin の中に高々2個の重いものが，混っている．これらを最小回数の秤量(weighing)で全部つきとめるにはどうしたらよいか？

次のような秤量政策のみを考えてその中で最適なものを求めよう．N 個の中から同数個づつ2群を at random にとり出し天秤にかける．かりに k 個づつとする．(i)もし balance すれば，右の皿(左でも同じ)には重い coin が必らず0または1個あるから次にそれをつきとめる．もし0個とわかれば残りの $(N-2k)$ 個に0, 1, または2個ある．もし1個とわかれば他方の皿に必らず1個ある．(ii)もし unbalance ならば，下った皿には重い coin が必らず1または2個あるから，それをつきとめる．1個あった場合には残りの $(N-2k)$ 個の中から高々1個のものを次につきとめねばならぬ．

$f_N(p_0, p_1, p_2)$ …N 個の中に重い coin がちょうど i 個 $(i=0, 1, 2)$ ある先験的確率を p_i とする．上記の秤量政策の中での最適政策(これを sub-optimal なりとよぶ)を用いて重い coin の全部をとり出すまでの秤量回数(の期待値)

とすると

$$f_N(p_0, p_1, p_2)=\min\Bigg[1+P(B)\Bigg\{f_k(p_0^{(1)}, p_1^{(1)}, 0)$$
$$+P\left(\begin{matrix}\text{右皿に重い}\\\text{ものが0個}\end{matrix}\middle| B\right)f_{N-2k}(p_0^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)})$$
$$+P\left(\begin{matrix}\text{右皿に重い}\\\text{ものが1個}\end{matrix}\middle| B\right)f_k(0, 1, 0)\Bigg\}$$
$$+P(U)\Bigg\{f_k(0, p_1^{(3)}, p_2^{(3)})$$
$$+P\left(\begin{matrix}\text{下った皿に重}\\\text{いものが1個}\end{matrix}\middle| U\right)$$
$$f_{N-2k}(p_0^{(4)}, p_1^{(4)}, 0)\Bigg\}\Bigg] \qquad (*)$$

が成立する．ここに各確率 $p(\cdot), p(\cdot|\ )$ などはもちろん p_0, p_1, p_2, N, k に依存するが省略した．$B(U)$ は balance(unbalance)の略記．$p_i^{(1)}, \cdots, p_i^{(4)}$ などは Bayes 定理から計算される事後確率で，例えば

$$p_0^{(1)}=P\left\{\begin{matrix}\text{右皿に重い}\\\text{ものが0個}\end{matrix}\middle| B\right\}$$
$$=\frac{p_0+p_2\{(N-2k)(N-2k-1)/N(N-1)\}}{p_0+p_2\{(N-2k)(N-2k-1)+2k^2\}/N(N-1)} \text{ etc.}$$

この3変数の DP 方程式は3つの“境界条件”，すなわち $f_N(0, 1, 0)$，$f_N(p_0, p_1, 0)$，$f_N(0, p_1, p_2)$ のそれぞれが満足する3つの漸化式を参照して逐次に解ける．NIVAC 1105 を用いて(*)における suboptimal choice k^*_{N, p_0, p_1} の値が $N=80, 90$；$p_0, p_1=0(0.1)1.0$ に対して作表されている．

またこの問題に対する情報理論的考察もなされている．　(坂口実)

BELLMAN, R. & KALABA, R.: A NOTE ON INTERRUPTED STOCHASTIC CONTROL PROCESSES *Information and Control, Vol 4(1961), 346—349*
ZADEH, L. A.: REMARK ON THE PAPER BY BELLMAN AND KALABA *ibid, 350—352.*

離散型の確率的制御過程

$$\begin{cases} E\{h(x_N)\} \longrightarrow \min\limits_{y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}} \\ x_{n+1}=g(x_n, y_n, r_n) \quad (n=0, 1, 2, \cdots; x_0=c) \end{cases}$$

(y_n が制御項，r_n が random disturbance)が DP によって解かれることはよく知られている．ところで系の true state が，制御者にとって，ある確率で観測できないような場合を interrupted control process という．この種の過程の最適制御は，DP に対して新しい興味ある問題を提示する．

いま各段で制御者にとって確率 p で true state x_n が観測できないとする．

$f(m, n, c)$ …過去 m 段にわたり観測できなかった．観測した最後の時の state は c であった．あと n 段残っているときに，最適政策による

期待値

すなわち

$$f(m,n,c)=\min_{y_m,\cdots,y_{m+n-1}} \underset{r_0,\cdots,r_{m+n-1}}{E} \{h(x_{m+n})\}$$

とおく.

$Z_m(c)$…はじめの state が c で，それから m 段にわたって観測できなかった後の state を表わす確率変数

とすると明らかに

$$f(m,n,c)=\min_{y}[pf(m+1,n-1,c)+(1-p)Ef(o,n-1,Z_m(c))] \quad (*)$$

が成立する. この式の特徴は普通の DP の式と違って，その implicit structure である. というのは上式の optimal choice を $y^*_{m,n}(c)$ とおくと

$$x_1=g(c,y^*_{0,m+n}(c),r_0)$$
$$x_2=g(x_1,y^*_{1,m+n-1}(c),r_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_m(c)=g(x_{m-1},y^*_{m-1,n+1}(c),r_{m-1})$$

となって，$Z_m(c)$ は $r_0,r_1,\cdots,r_{m-1}$ および $y^*_{0,m+n}(c),\cdots,y^*_{m-1,n+1}(c)$ の函数であるから，$y^*_{m,n}(c)$ も同様にこれらの変数の函数として定まるのである.

続報で

$$\begin{cases} E x_N^2 \longrightarrow \min \\ x_{n+1}=Ax_n+y_n+r_n \quad (n=0,1,2,\cdots;x_0=c) \end{cases}$$

につき詳しくやる予定だそうである.

次の Zadeh の remark の要旨：Bellman-Kalaba のこの論文は大変重要だと思う. それは DP で扱える制御過程の class を本質的に拡げたからである. Bellman-Kalaba が最適性原理により得た方程式は，今までの DP 方程式とは違って implicit structure をもっていた. 筆者は次に，interrupted control process の最適攻策をみつけることは，より多数の状態変数をもつ non-interrupted control process の最適政策を求める問題に帰着することを注意したい. ただし，このことは理論的にそうだというので，計算が楽になるというのでは必ずしもない. (抄録者註：(＊)式中の最後の f の中が合点がいかないけれども，原論文の通り記した)

(坂口実)

HANSSMANN, F. & RIVETT, B. H. P: COMPETITIVE BIDDING *Oper. Res. Quart, Vol* 10*(1959), 49—55.*

入札者が何人いるかわからないでn個のものを非公開入札する. 例えば

もの ＼ 入札者	A	B	C	D	E	獲得者
a	50	40	75	—	—	C
b	20	30	—	15	—	B
c	90	80	85	75	95	E
d	—	—	70	60	50	C
つけ値の計	160	150	230	150	145	
支払額	0	30	145	0	95	

のようになる(—となっているのは，つけ値をしなかったのである).

n 個のものの価値をそれぞれ $v_1,v_2,\cdots,v_n$ とする. j 番目のものにつけ値(bid)b_j をつけたとき，それを獲得する確率を $p_j(b_j)$ とする. 資金 S をもっている人にとっては

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j(b_j)(v_j-b_j) \longrightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{n} b_j=S,\ b_j \geqq 0 (i=1,\cdots,n) \end{cases}$$

が問題になる. どのものについても

$$\frac{\text{winning bid}}{\text{estimated value}}=\frac{w}{v}$$

が対数正規型分布：密度函数が

$$f\left(\frac{w}{v}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\frac{w}{v}\right)\exp\left[\frac{-\left(\log\frac{w}{v}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

に従う(母数 μ, σ^2 の値も共通)と考えられる理由があるので，問題は若干変形されると

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j F(b_j/a_j) \longrightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{n} b_j=S,\quad b_j \geqq 0 (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

となろう. ここに F は f の分布函数，a_j は j 番目のものの "relative measure of value" である.

(坂口実)

LINDLEY, D. V.: DYNAMIC PROGRAMMING AND DECISION THEORY *Appl. Stat., Vol* 10*(1961), 39—51.*

DP が統計の分野で，ある種の逐次決定問題とどのように関連しているかを解説したもの.

つぎの問題を考える：分散1をもつ正規母集団の未知母平均 θ について，$\theta<0$ か $\theta>0$ かを逐次決定せよ. θ の事前分布を $N(\theta_0,\tau)$ とすると，1個の観測値 z を得た後の事後分布は

$$N\left(\frac{z+\theta_0/\tau^2}{1+1/\tau^2},\ (1+1/\tau_2)^{-1}\right).$$

すなわち，やはり正規分布で期待値は z と θ_0 との荷重平均(重みは分散の逆数)に変る．

$U(x,t)\cdots\theta$ の事前分布を $N(x,t^{-1})$ としたときから出発して，最適政策を用いて得られる utility から，今すぐやめるときの utility を引いたもの

とおけば，最適停止政策を規定する DP 方程式は

$$U(x,t)=\max\begin{bmatrix} S: & 0 \\ C: & Ez\left[U\left\{\dfrac{z+xt}{1+t},\ 1+t\right)\right\}-c \end{bmatrix} \tag{1}$$

である．ここで観測値1個当りの費用を $c/$(分散)とおいた．

この方程式の中の一方の変数 t が離散的に変ることが(1)の解法を困難ならしめるのである．いまはじめの正規母集団の分散を1の代りに σ_0^2 として(1)をかき直し $\sigma_0^2\to\infty$ に動かせば，t を連続変数のように思ってよろしい．$y=1/t$ とおくと

$$U(x,y)=\max\begin{bmatrix} 0 \\ Ez\left\{U\left(\dfrac{z/\sigma_0^2+x/y}{1/\sigma_0^2+1/y},\ \dfrac{1}{1/\sigma_0^2+1/y}\right)\right\}-\dfrac{c}{\sigma_0^2} \end{bmatrix}$$

となる．右辺 [ ] の中の下式は計算すれば

$$U(x,y)+\frac{y^2}{2\sigma_0^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{c}{y^2}\right)+O(\sigma_0^{-4})$$

となるから，最適政策の優先継続域(continuation region)では拡散方程式

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{c}{y^2}$$

を満足している．我々の知りたいのは優先停止域(stopping region) $\{(x,y)\,|\,U(x,y)=0\}$ である．解よりも境界に興味のある境界値問題がここに生れた．

(1)の形の方程式は統計の逐次決定問題でよく出て来るものであるが，次に具体的に解ける例題を示してある．

結婚の問題：n 人の女性がいて random に1人ずつ貴君の前に現われる．各 r 番目の女性に直面して，貴君は彼女と結婚するか，または(もっとよい女性が後に現われることを期待して)彼女を流して次の $(r+1)$ 番目の女性に対面するか，どちらかに決めねばならぬ．各女性のよさに順位がつけられて(順位1が最良，順位 n が最悪)，順位 i の女性と結婚できることの効用を U_i とする(U_i は故に i につき単調減少)．

$U(s,r)\cdots r$ 番目の女性がみかけの順位 s(今までに対面した r 人の中では順位 s ということ)のとき，以後最適政策で得られる効用

とすると

$$U(s,r)=\max\begin{bmatrix} S: \displaystyle\sum_{i=s}^{s+n-r} U_i\binom{i-1}{s-1}\binom{n-i}{r-s}\Big/\binom{n}{r} \\ C: \displaystyle\sum_{s'=1}^{r+1} U(s',r+1)/(r+1) \end{bmatrix}$$

右辺 [ ] 内の上式の summand は U_iP\{彼女の真の順位が $i|r$ 番目の女性がみかけの順位 s\}である．

［定理］ $U_1=1,\ U_2=\cdots=U_n=0$ とすると最適政策は n が非常に大きいとき漸近的に，「およそ $ne^{-1}\fallingdotseq 0.368\,n$ 人の女性をみた後，始めてみかけの順位1になった女性と結婚せよ」

などが示される． (坂口実)

D. F. MELA : INFORMATION THEORY AND SEARCH THEORY AS SPECIAL CASES OF DECISION THEORY *Jour Oper. Soc. Amer Vol.* **9**, *No. 6 1961 pp 907—909*

Search theory に於て発見確率を最大にする様な search procedure と期待情報量を最大にする様なそれとは必ずしも一致しないが，簡単な例を作って，2つの Procedure についての説明がなされて，更に各々の Procedure について，その結果に基ずいてある action が取られるが，その action の Correct comittment の確率が算出されている．

例は興味深いので結果だけみると

Procedure	発見確率	期待情報量	action が正しい確率
A	1/24	0.478	5/8
B	5/12	0.541	3/4
C	1/2	0,549	2/3

これらの例から search theory と information theory の間には本質的な結びつきはないことが判り，後半は著者のこれ迄の search theory の approach に対する意見が述べられている．これ迄多く見られた様に発見確率を最大にするものが多かったが search problem に於ては object を発見する以外に，探索した結果に基ずいて種々な行動が取られるのであるが，この行動の value について論ずるのが最も自然ではないかと主張している．

その様に考えると情報量と云う measure が適当

であるかと云うことも不明であり，問題は何故情報量と云う measure を用いるかと云う理由が最も重要な問題となる．

結局 search procese も information gathering process の一種であって state についての知識は，事前確率，事後確率で与えられ，その価値を考えることによって statistical decision の一般論となるであろうとするのが著者の主張する所である．

(反町洋一)

GLUSS, B.: APPROXIMATELY OPTIMAL ONE-DIMENSIONAL SEARCH POLICIES IN WHICH SEARCH COSTS VARY THROUGH TIME *Naval Res. Logist. Quart., Vol* 8 *(1961),277—284*

N 個の箱のどれかの中に球が入っている．球が k 番目の箱に入っている先験的確率を $p_k(k=1,\cdots,N)$ とする．1回に1箱ずつあけてみる．k 番目の箱をあけてみるに要する費用を t_k とする．最小費用でその球をとり出すにはどうすればよいか？　この問題の最適政策は「t_k/p_k を最小にする箱 k をまづあけてみよ」となることはよく知られている．ところでいま，箱が一直線に $1,2,\cdots,N$ の順に等間隔で並んでいるとして，search cost t_i が直前に search した箱からこの箱 i までの距離に関係するとする．すなわち，箱 i の search を箱の j の search の次にやるときは費用

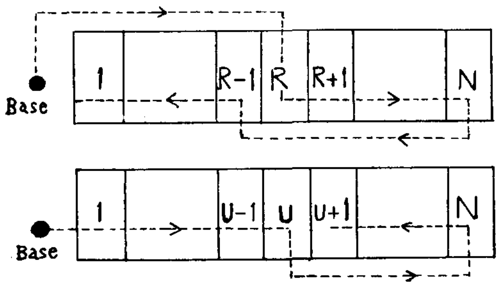
$t_i=|i-j|+t$　(t は所与の正定数)

を要するものと仮定する．

［定理］ (i)　$p_1=\cdots=p_N=1/N$ ならば $1\to2\to\cdots\to N$ の順が最適

(ii)　もっと一般に $p_1\geqq p_2\geqq\cdots\geqq p_N$ のときの最適政策も上と同じ

(iii)　p_i が i に比例する，すなわち $p_i=2i/N(N+1)$ $(i=1,\cdots,N)$ とする．次のような2種類の順をとる search policy のみを考える．



これらの中での最適政策は次の通り：

$$\begin{cases} t\leqq 4/N \text{ ならば } 1\to2\to\cdots\to N \\ 4/N<t<2(N-1) \text{ ならば} \\ \qquad R=R^*=[1+(N+1)t/(t+4)] \\ t\geqq 2(N-1) \text{ ならば } N\to N-1\to\cdots\to1 \end{cases}$$

が証明されている．(iii) は raider の看視におけるように，防衛中心に近くなる程，敵目標の存在確率が薄められる場合にあてはまる．

(坂口実)

RAPOPORT, A. & ORWANT, C.: EXPERIMENTAL GAMES: A RIVIEW *Behavioral Science, Vol* 7 *(1962), 1—37*

行動する個人，グループあるいは社会機構が競争場裡にあってとる戦略の種々相が，近年 game 理論の数学によって明らかにされてきた．それは色々の環境のもとで我々がとるべき合理的行動政策に関する基準を提供はしたが，必ずしも我々の現実のふるまいについて解明したとはいえない．このことは，人間に実際に game をやらせてみて，対立する利害をふくむ dilemma に直面させてみて分ってきたのである．この種の実験的研究が最近多数に報告されているが，これを綜めてここに review しておく(以上は著者の summary)

1. 2人0和 game
   a) saddle point のあるもの
   b) saddle ponit のないもの
2. 2人非0和 game
   a) Prisoner's Dilemma 型
   b) 協同型(co-ordination game)
3. n 人 game$(n\geqq3)$
   a) 非交渉的
   b) 交渉的(negotiable)
4. 支払行列について不完全情報の game
5. Simulation game

について，今までに現れた計 30 実験をあげ，1つ1つにその型・目的・方法・結果およびその批判を記している．

(坂口実)

SHUBIK, M.: GAMES, DECISIONS AND INDUSTRIAL ORGANIZATION *Management Science, Vol* 6 *(1960), 455—474*

game 理論によって扱われたいろいろの型の問題領域と industrial organization の研究との関連

について概観したもの．(1) 2 人定和 game，(2) 展開型 game，(3) n 人 game の解の理論，(4) games against nature，(5) dynamic game について例を挙げて説明し，organization の問題，あるいは広く行動科学(behavioral science)への game 論の現在の応用のさりさまを分り易く綜めている．

(3)，(4)について少し述べよう．(5)では economic survival game(4巻4号の本欄参照)について述べている．

von=Neumann–Morgenstern の有名な game theory の書物は，n 人 game の outcome に対して極めて弱い形の予言しか提供しない．非定和 n 人 game の解については今までに約20種もの理論がある．そこで現在の状態では，問題を例えば firm の中の行動，小人数グループの行動，2 個の主体の conflict，市場 (market) 等々に分けて解の概念を考えるのが賢明かも知れない．簡単な 2×2 非定和 2 人 game で複雑さの一端を示すと，少くとも次の3つの基準がある．player I，II がそれぞれ戦略 s_1，s_2 をとるときの各人の利得を $P_1(s_1, s_2)$，$P_2(s_1, s_2)$ とすると

(解 i) joint maximization：

$$P_1(s_1, s_2)+P_2(s_1, s_2) \longrightarrow \max_{(s_1, s_2)}$$

(解 ii) Nash 均衡解：$P_1(s_1^*, s_2^*)=\max_{s_1} P_1(s_1, s_2^*)$，かつ $P_2(s_1^*, s_2^*)=\max_{s_2} P_2(s_1^*, s_2)$ のような戦略の組 (s_1^*, s_2^*)

(解 iii) max-min 解：$\min_{s_2} P_1(s, s_2) \longrightarrow \max_{s_1}$，

$$\min_{s_1} P_2(s_1, s_2) \longrightarrow \max_{s_2}$$

などである．例えば Prisoner's Dilemma 型の事態(これは広告戦にあてはまる．戦略 1 (2) は広告に少(多)額の費用をかけること)

プレヤー I ＼ プレヤー II	1	2
1	(10, 10)	(4, 11)
2	(11, 4)	(8, 8)

に対しては最適戦略の組は解 i，ii，iii でそれぞれ (1, 1)，(2, 2)，(2, 2) となる．n 人 game の理論の実際面への応用でこれまでに現れた主なものは，Shubik-Shapley (1954) の選挙投票，Vickrey (1959) の競争入札，Charnes-Cooper (1958) の traffic flow への応用などである．

(4)の games against nature というのは，rule が不完全規定の game である．例えば

I ＼ II	1	2
1	(10, ?)	(6, ?)
2	(7, ?)	(5, ?)

I ＼ II	1	2
1	(?, ?)	(?, ?)
2	(?, ?)	(?, ?)

I ＼ II	1	2 ………	?
1	(10, 10)	(6, 7) …	(?, ?)
2	⋮		
⋮			
?	(?, ?)		

など(?は unknown なことを示す)．これらは本来の定義からは game といえないわけだが，実際面ではこのような pseudo-game の研究は重要であろうと著者は言っている．　(坂口実)

SHUBIK, M. : SOME EXPERIMENTAL NON-ZERO SUM GAMES WITH LACK OF INFORMATION ABOUT THE RULES *Management Science, Vol* 8 *(1962), 215-234*

支払行列について不完全情報の2人非定和非協力 game の実験である．5対の被実験者に次の6通りの game をやらせてみた．

(a)

(6, 3)	(6, 7)
(10, 3)	(10, 7)

(b)

(1, 3)	(2, 3)
(1, 1)	(2, 1)

(c)

(2, 1)	(−1, −1)
(−1, −1)	(1, 2)

(d)

(3, 3)	(−1, −1)
(−1, −1)	(2, 2)

(e)

(3, 3)	(−2, 7)
(7, −2)	(−1, −1)

(f)

(5, 2)	(−10, −13)
(4, 1)	(−20, −23)

各 player は自分の支払行列のみを知っていて，相手のそれは知らされない．各 game を 10～20 回続けた．player 相互の通信は禁じたが，毎回，直前回にとった相手の choice を umpire が教えた．

およそ完全情報の2人非定和 game ならば，次の4通りの解(あるいは理論)：［1］joint maximization，［2］Nash 均衡解，［3］max-min 解，［4］max-min of difference があり得るが，このように不完全情報で，学習によって相手の支払行列を estimate してゆかねばならぬ場合には，どの理論が現

実のふるまいに合致するか？　これを知るのが実験の目的である．完全情報のときの最適戦略は(両人のfirst strategy をとる確率の組で表示)

理論 / game	[1]	[2]	[3]	[4]
(a)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(b)	(1, 0)	全部	全部	(0, 1)
(c)	(1, 1) or (0, 0)	(1, 1) or (0, 0)	$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$	(1, 0)
(d)	(1, 1)	(1, 1) or (0, 0)	$\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$	全部
(e)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(f)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	全部

実験の結果(○は data と一致，×は不一致，—は理論が無効を示す)

	[1]	[2]	[3]	[4]
(a)	○	○	○	○
(b)	×	—	—	×
(c)	○	○	×	×
(d)	○	○	×	—
(e)	×	○	○	○
(f)	○	○	○	—

であった．game(a)と(f)とは最も易しいのだが，play 終了後 subject に相手の支払行列を estimate させてみたら，(a)と(f)とに対して正確であった．(b)では戦略の組(1, 1)が most frequent であった(すなわちⅠが最小，Ⅱが最大の outcome)．これは co-ordination の欠除によるものであろう．(e)は Prisoner's Dilemma 型だが，実験でみられた学習のようすを解析してある．これを要するに，不完全情報のときは理論の［2］が最も現実と一致するらしい．［1］［3］［4］は余りあてにならないようである．(坂口実)

HEES, Jr. R. N. v. AND MEER ENDONK, Jr. H. W. v. d.: OPTIMAL RELIABILITY OF PARALLEL MULTICOMPONENT SYSTEMS *Oper. Res. Quart., Vol. 12, No. 1, 1961*

r 種類の部品を1個ずつ直列に結合した同型の装置が m 台あり，別に種類の部品に対しては信頼確率 p_i をもつ n_i 個の予備品を用意して($i=1, \cdots, r$)，この系を稼働させるときの信頼確率 ϕ(任意の1台の装置が稼働する確率)を一定の費用の下で最大にする予備品数 n_i の求め方を示している．勿論各部品の故障発生は独立と仮定している．

すなわち，種類 i の部品 $m+n_i$ 個の中 $m+S$ 個 $(0\leqq S\leqq n_i)$ が故障すれば，S 台の装置が種類 i の部品故障のため稼働できなくなるが，m 台の装置の中で任意に固定した1台がこの種の故障を起す確率 Q_i は

$$Q_i=\sum_{s=1}^{m}\frac{s}{m}\cdot\frac{(m+n_i)!}{(n_i+s)!\,(m-s)!}p_i^{m-s}(1-p_i)^{n_i+s}$$

であるから，この装置が稼働する確率 ϕ は，$P_i=1-Q_i$ として

$$\phi=\prod_{i=1}^{r}P_i$$

である．ここで種類 i の部品の cost を1個当り c_i とし，

$$\sum_{1=1}^{r}c_in_i<C$$

なる条件の下に ϕ を最大にしようとする．このために

$$n_i=0\cdot x_{i0}+1\cdot x_{i1}+\cdots+j\cdot x_{ij}+\cdots$$

$$x_{ij}^2=x_{ij},\ \sum_{j=0}^{\infty}x_{ij}=1$$

とおき，また $jc_i=c_{ij}$ とおくと

$$c_in_i=\sum_{j=0}^{\infty}x_{ij}c_{ij}$$

$$\log P_i=x_{ij}\log P_{ij}$$

となるから(P_{ij} は $n_i=j$ のときの P_i の値)，問題は条件

$$\sum_{i=1}^{r}c_in_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}x_{ij}c_{ij}\leqq C$$

の下で

$$\log\phi=\sum_{i=1}^{r}\log P_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}x_{ij}\log P_{ij}$$

を最大にする x_{ij} を定めるという，いわゆる，knapsack problem に帰着する．簡単な数値例について見通しのよい解法が図式的に示されている．

(阿部俊一)