全数選別におけるある最適方式

吉　村　　功*

1. まえがき

品質管理が普及した現在でも，電気，機械用部品などは，全数検査を行って不良品を選別する場合が多い．このような場合，一般に検査項目が多数あり，それぞれの項目の不合格率や検査時間はまちまちである．そして，各項目の検査順序によって期待検査時間は変わってくる．たとえば不合格率の大きい検査項目を先に検査することは，この意味で手数を省くことになることが直観的にもあきらかであろう．この論文では，この問題に関する結果を拡張して，実際によく起る束縛条件のもとでの最適方式を与えている．

2. 問題の定式化と既知の結果

検査項目が n 個あり，これを $C_1, C_2, \cdots, C_n$ であらわし，これに関して次の4条件をおく．(i) 1項目でも不合格であればその製品は廃棄される．(ii) 項目 $C_i (i=1, 2, \cdots, n)$ の検査に要する時間(検査時間が合格品，不合格品に関係なく分布する場合は期待値でよい)は製品1個あたり $t_i (i=1, 2, \cdots, n)$ である．(iii) 項目 $C_i (i=1, 2, \cdots, n)$ の不合格率 p_i, C_i を検査しても合格・不合格の情報が得られない確率 $q_i (i=1, 2, \cdots, n)$ は既知定数である．(iv) 製品が項目 C_j で不合格になることと $C_j (j \neq i)$ で不合格になることとは確率的に独立である，

このとき，製品1個の検査が終了するまでの時間の期待値 T は，$(1-q_i)p_i/t_i$ をすべての i について計算しその値の大きいものから順に $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を配列した場合に，最小値をとることが知られている[1]．

(注) *Bellman*[1] や *Gluss*[2] が取り扱った問題は，この論文で取り扱ったものと少し違うため，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ という条件を伴なっているが．これは不要であり，$0 < p_i < 1$ であればよい．又，$q_i = 0$ と置き，t_i の代りに $t_i/(1-q_i)$ を代入しても．形式的に同じ結果が得られる．この性質は以下の議論でも常に保存されることが *Bellman* の証明から明らかなので，以下では $q_i = 0$ として議論を進める．

さて，上の条件においては C_i の配列に制限をつけなかったが，実際問題では，技術的，政策的な制限がつく場合が多い．たとえば，性能検査は外観検査より先に行うのが普通であり，汚れやすい測定は洗浄に便利な順序にしなければならない．上にのべた最適方式がこの条件を自然に満たしていれば差支えないが，そうでなければ上の配列を修正する必要がある．次節ではこの場合の最適方式を示すが，便宜上次のように問題を定式化しておく．

---

* 東京大学　昭和36年11月27日受理

[問題] 前述の4条件(ただし $q_l=0$)のもとで，p/t の大きい順に検査項目をならべ，これを $C_1, C_2, \cdots, C_{r-1}, C_r, C_{r+1}, \cdots, C_{s-1}, C_s, C_{s+1}, \cdots, C_n$ で表わすことにする．C_s を C_r より先に検査するという制限条件のもとで T を最小とするような配列を求めよ．

3. 解と証明

[解] n 項目から C_r と C_s を取除き，かわりに $p_{sr}=p_s+p_r-p_rp_s$, $t_{sr}=t_s+t_r-p_st_r$ なる p と t を持つ項目 C_{sr} をいれ，この $n-1$ 項目について前述の最適方式で配列を行い，C_{sr} の位置に C_s, C_r を置くと，この配列が T の最小値を与える．

[証明] まず制限のない場合の解の証明を行う．最適配列の T の値 T_0 は次式で表わされる．

$$\begin{aligned} T_0=t_1&+(1-p_1)t_2+\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_{i-1})t_i+\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_{i-1})(1-p_i)t_{i+1}+\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_{n-1})t_n\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで C_i と C_{i+1} をいれかえた配列を考え，これに対応する T の値 T_i を計算すると

$$\begin{aligned} T_i=t_1&+(1-p_1)t_2+\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)\cdots\cdots(1-p_{i-1})t_{i+1}\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)\cdots\cdots(1-p_{i-1})(1-p_{i+1})t_i+\cdots\cdots \\ &+(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_{n-1})t_n \end{aligned} \qquad (2)$$

となる．仮定により，$T_i-T_0\geqslant 0$. 故に，

$$T_i-T_0=(1-p_1)(1-p_2)\cdots\cdots(1-p_{i-1})(p_i t_{i+1}-p_{i+1} t_i)\geqslant 0 \qquad (3)$$

$0<p_i<1$, $0<t_i (i=1,2,\cdots,n)$ は本来の意味から当然であり，従って

$$p_i t_{i+1}-p_{i-1} t_i\geqslant 0$$

$$\therefore \quad p_i/t_i\geqslant p_{i+1}/t_{i+1} \qquad (4)$$

(4)式がすべての i についてなりたつことが必要であり，この条件をみたすものは一意にさだまる．($p_i/t_i=p_{i+1}/t_{i+1}$ の場合はどちらを先にしてもよいわけで．このようなものを除いて一意ということにする)

次に制限のある場合を考える．

配列の数は有限であるから最良の配列は必らず存在する．これを $C_{(1)},\cdots,C_{(a)},C_s,C_{(a+2)},\cdots,C_{(b)},C_r,C_{(b+2)},\cdots,C_{(n)}$ で表わそう．3個の部分配列 $C_{(1)},\cdots,C_{(a)}$; $C_{(a+2)},\cdots,C_{(b)}$; $C_{(b+2)},\cdots,C_{(n)}$ はそれぞれ p/t の大きさの順になっていなければならない．なぜなら，そうでないと更によいものが得られることが，(4)式を得る過程を繰り返すことによって示されるからである．次に第2の部分配列が実は存在しないことを示そう．今述べたことにより $(a+2)<(a+3)<\cdots<(b)$ である．ここで，もし $(a+2)<s$ であれば C_s と $C_{(a+2)}$ は交換した方が T が小さくなる．又，$r<(b)$ であれば C_r と $C_{(b)}$ は交換した方がよい．従って $(b)<r$ かつ $s<(a+2)$ でなくては

ならない．$r<s$ であるからこれは不可能である．すなわち C_s の次にはつづいて C_r がこなければならない．このとき C_s と C_r をまとめて1項目と考えても T には影響を与えない．このとき等価的な不合格率と検査時間が解における p_{sr} と t_{sr} であることが(1)式を導びく際にあきらかとなる．以下の過程は制限条件のない場合と全く同じで，最後に等価的な項目 C_{sr} を元の形で表わすだけで解が最適であることがわかる．

4. 拡　　張

制限条件として n 項目中の k 項目 $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \cdots, C_{\alpha_k}$ について相対的な順序が指定されている場合にも同様にして次の解が得られる．

〔解〕 順序を指定された k 項目について，相続く l 項目 $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \cdots, C_{\beta_l}(l\geqq 2)$ がすべて逆順，すなわち，p/t の小さい順になっているときは，それらをまとめて1項目と考えて取扱う．このとき等価不合格率は $p_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_l}=p_{\beta_1}+(1-p_{\beta_1})p_{\beta_2}+\cdots+(1-p_{\beta_1})(1-p_{\beta_2})\cdots(1-p_{\beta_{l-1}})p_{\beta_l}$，等価検査時間は $t_{\beta_1\cdots\beta_l}=t_{\beta_1}+(1-p_{\beta_1})t_{\beta_2}+\cdots+(1-p_{\beta_1})(1-p_{\beta_2})\cdots(1\cdots p_{\beta_{l-1}})t_{\beta_l}$ である．この操作をくりかえしてゆき，順序を指定された k 項目が p/t の大きさにならんだ等価的な$(k-m)$項目に帰着されたら，最初の n 項目から $C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_k}$ を除き，かわりに等価的な$(k-m)$項目をいれて p/t の大きさの順に配列し，等価的な項目を元の $C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_k}$ で表現しておけば，これが T の最小値を与える．

〔証明〕 相続く l 項目がすべて逆順のとき，これが等価的な1項目に帰着できることを示そう．C_{β_1} と C_{β_2} の間に他の項目がこない方がよいことは前節の証明よりあきらかである．そこでこれを等価的な1項目 $C_{\beta_1\beta_2}$ として扱うことができる．この項目の p/t は $\{p\beta_1+(1-p_{\beta_1})p_{\beta_2}\}/\{t_{\beta_1}+(1-p_{\beta_1})t_2\}$ であり，これが p_{β_1}/t_{β_1} と p_{β_2}/t_{β_2} の間の値を取ることは加比の理より示される．従って $C_{\beta_1\beta_2}$ と C_{β_3} はやはり逆順である．従ってこれも等価的な1項目 $C_{\beta_1\beta_2\beta_3}$ でおきかえることができる．この論理を反復すれば $C_{\beta_1}, \cdots, C_{\beta_l}$ を等価的に $C_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_l}$ なる項目として取り扱ってもよいことが言える．この手順を反復して逆順のものがなくなれば，p/t の大きさで配列してよいことは前節までの結果から明らかである．従って解が最適配列を与えている．

制限がもっとデタラメにいりくんでいる場合でも，指定された項目間の相対的順序を整理した上で本節の方法を用いれば最良の配列を得ることができるから，今節の結果は十分一般的なものであることがわかる．

5. 各検査項目が互いに独立でない場合

今までは第2節の条件(iv)を仮定してあったが，現実にはこの仮定がなりたたない場合も少くない．たとえば．電気部品できずがあって外観不良となるものは性能試験でも不合格となりやすい．このような場合の最適配列を定める簡単な方法はまだ発見されていないが，最適配列の満たすべき必要条件には本節で示すものがある．

[**記号**]　$p_{r_1r_2\cdots r_n}$：$r_1r_2\cdots r_n$ で表わされる事象の確率，$r_i(i=1,2,\cdots,n)$は0または1なる値をとり，$r_i=0$ は項目 C_i で不合格になることを意味し，$r_i=1$ は項目 C_i で合格になることを意味する．たとえば，$p_{111\cdots10}$ は $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ で合格となり，C_n で不合格となる確率である．

$p_i\equiv\sum_{(r_i=0)} p_{r_1\cdots r_n}(i=1,2,\cdots,n)$は確率 $p_{r_1r_2\cdots r_n}$ の $r_i=0$ という条件のもとでの和を表わす．

$p_{j|i}\equiv\sum_{(r_i=1,\,r_j=0)}p_{r_1\cdots r_n}$ は確率 $p_{r_1\cdots r_n}$ の $r_i=1$, $r_j=0$ という条件のもとでの和を表わす．以下同様にして $p_{k|ij}$ などをさだめる．

[**必要条件**]　最良の配列が $C_1, C_2, \cdots, C_n$ であるように添字を定めたとすると．任意の $i(1\leq i<n)$に対して

$$p_{i|1,2,\cdots,i-1}/t_i\geqq p_{i+1|1,2,\cdots,i-1}/t_{i+1} \qquad (5)$$

がなりたたねばならない．

[**証明**]　(5)式の特別な場合が(4)式で，求め方は全く同じである．

最適配列における T の値 T_0 は次式で表わされる．

$$\begin{aligned}T_0=t_1&+\sum_{(r_1=1)}p_{r_1\cdots r_n}t_2+\sum_{(r_1=1,\,r_2=1)}p_{r_1\cdots r_n}t_3+\cdots\cdots\\&+\sum_{(r_1=1,\cdots,r_{i-1}=1)}p_{r_1\cdots r_{1n})}t_i-\cdots\cdots\\&+(p_{11\cdots11}+p_{11\cdots10})t_n\end{aligned} \qquad (6)$$

ここで C_i と C_{i+1} をいれかえると T の値 T_i は，

$$\begin{aligned}T_i=t_1&+\sum_{(r_1=1)}p_{r_1\cdots r_n}t_2+\cdots\cdots\\&+\sum_{(r_1=1,\cdots,r_i-1=1)}t_{i+1}+\sum_{(r_1=1,\cdots,\,r_{i-1}=1,\,r_{i+1}=1)}p_{r_1\cdots r_n}t_i+\cdots\cdots\\&+(p_{11\cdots11}+p_{11\cdots10})t_n\end{aligned} \qquad (7)$$

で表わされる．仮定により

$$\begin{aligned}T_i-T_0=&\sum_{(r_1=1,\cdots,r_{i-1}=1,\,r_i=0)}p_{r_1\cdots r_n}t_{i+1}\\&-\sum_{(r_1=1,\cdots,r_{i-1}=1,r_{i+1}=0)}p_r t_i\geqq0\end{aligned}$$

記号を変え，式を変形すれば(5)が得られる．証明終り．

$p_{i+1|1,2,\cdots i-1}\geqq p_{r+1|1,2,\cdots,i-1,i}$ は記号の意味からあきらかだから，(5)式とあわせると，

$$\begin{aligned}p_1/t_1\geqq p_{2|1}/t_2\geqq\cdots&\geqq p_{i|1,2,\cdots i-1}/t_i\\&\geqq p_{i+1|1,2,\cdots,i}/t_{i+1}\geqq\cdots\geqq p_{n|1,2,\cdots n}/t_n\end{aligned} \qquad (8)$$

がなりたつ．もし現行のスケジュールが(8)式すら満足していなければ，かなり改善の余地があると言える．

6.　結　　　語

検査項目が互いに独立な場合の最適配列は第2節から第4節までに述べた方法で容易にもとまる．独立でない場合には第5節で述べたように簡単な求め方は発見されていない．

実際には前者のみ，または前者と後者の中間すなわち n 項目が互いに独立な数グループにわけられる場合が殆どである．この場合には，各グループ内で最良の配列を求め，それに対応する

$p_{i|1,2,\cdots,i-1}/t_i$ を各グループ内で計算し，この大きさの順で n 項目を配列すれば最良のものが得られる．

t は時間である必要はなく，正の値をとる量(たとえば費用など)であればよい．

おわりに，この問題を私に示された南雲仁一助教授，討論に参加していただいた日本規格協会スケジュール分科会の諸氏，参考文献の見おとしを指摘された OR 学会の審査委員の方々に深く感謝の意を表します．

参考文献

1) R. Bellman, "Dynamic Programming," Princeton Univ. Press. p. 90, 1957.
2) B. Gluss, "An Optimum Policy for Detecting a Fault in a Complex System", *Oper. Res.* vol. 7, p. 463.

<原稿募集> 刊行物委員会では，「経営科学」誌に「小論文のページ」を設け，1つの題目たとえば「在庫管理」とか「工程計画」とかの表題のもとに，それに関連した小論文をいくつか特集的に集めてみたいと考えております．この小論文は論文とするほどまとまりがないが，考え方や適用の方法に originality のあるもの，いわば「note」とか「remark」とかいった類のものを指しております．もちろん referee をつけ論文としての取扱いをいたします．原稿用紙 4，5 枚以下のもので結構です．論文とするにはいささか枚数不足だがタネはあるという方々は，まとまるまであたためないで，この「小論文のページ」に御投稿下さい．