多段階決定問題の取扱について

加　瀬　谷　忠　美*

I. 一 般 的 考 察

1.　多段階決定問題の取扱上の難点

問題自体の構造が操作的にはリカーレンス・リレーションを内包している多段階決定問題(multi-stage decision problems)であっても，ダイナミック・プログラミングとして実際に問題解決を行うのに，いろいろの困難が感ぜられる場合が少くない．たとえば，現実の問題においては，ダイナミック・プログラミングとしてモデル化しうるほど十分な資料が(特に将来の多数の段階の情況の予測に関して)入手できない場合が多い．また，ダイナミック・プログラミングにおいては，利子率などにもとづく割引係数を用いて，将来の利益または費用を現価(present value)に換算して扱う例が多いが，実際はこのように現価に換算する方法自体にも問題がある．さらに，函数方程式などの形でモデル化できたとしても，それを解くことが難かしいという場合もある．

本論文においては．これらの諸点について，一般的事項を整理し考察をこころみる．また，これらの難点を打開するために，問題の構造そのものに注意を向けることと共に，かなり多くのケースにおいては，数値解を求めるさいに注意をはらうことが非常に重要であるけれども，本論文では主として問題構造に関する面で示唆をあたえてくれる基本的な理論モデルによって，これらの一般的考察の適用例を示すこととする．

2.　モデルの分類

多段階決定問題をモデル化するさいに，いろいろの方法がある．一般に，次の5種類のカテゴリーのモデルを考えておくことが有益であろう．

A)　全段階の収益の合計を最大化するモデル．

B)　全段階の収益の現価の合計を最大化するモデル．

C)　全段階について一段階当り平均収益を最大化するモデル．

D)　いわゆる steady state で一段階当り平均収益を最大化するモデル．

---

*　早稲田大学　昭和36年4月第9回研究発表会にて「ダイナミック・プログラミングの必要性に関する根本問題」と題して発表せる内容の抄録．　昭和36年6月6日受理．　昭和37年3月12日再受理．

E) 一段階だけで打切り，その段階の収益を最大化するモデル．

なお，ここで「全段階」というのはもちろん考察に入れられている全段階を指すので，それは有限段階数の場合もあるし，無限に多くの段階を考える場合もある．また，収益を測度にしたので最大化を考えているが，損失または費用をとっているときは最小化を考えることはいうまでもない．本質的には同じことなので，便宜上，収益を基準にして考察を進めることとする．また，これらのすべてのカテゴリーがすべての多段階決定問題に適用できるわけでないということも，もちろんである．たとえば無限段階を考察に入れるとすればカテゴリー(A)，すなわち全段階の収益合計の最大化という立場は，問題自体に収束性のある場合(たとえば Bellman の資源の最適配分問題のような)以外には用いられない．さらに，カテゴリー(D)は steady state に達するような性質を持っている stochastic な問題の場合のみに限られ，stochastic な問題であっても最適政策のもとで果して steady state に達するかどうかが注意を要する点である．しかし，原理的には従来のモデルは以上に掲げた5つのカテゴリーのいずれかに属するものと考えられる．

さて，これらのカテゴリーの間に，次のような関係が存在することに注意しておく必要がある．まず，評価期間について見ると，(A)～(D)は全段階，(E)は当面の一段階のみであるという相違は一見して明らかだが，もっと大切なことは，(A)および(B)においては全段階に対応する評価値(効率測度について)が算出され取扱われるのに対し，(C)(D)(E)は一段階設定(one-stage setting)となって，一段階に対応する収益(効率測度)の評価値が出て来るということである．収益評価の上では，(C)(D)(E)の3つのカテゴリーが容易に比較対象となり得るのである．次に，これらの5つのカテゴリーの本質的な意味について比較すると，(B)の現価モデルは現価換算の操作によって，当面の第1期にウェイトをおいて考える立場であり，これの最も極端なものが(E)の立場だといえる．この(E)の立場になると，当面の第1期だけしか考慮に入れないわけである．これに対して，それ以外の(A)(C)(D)は実際上はいずれも全段階にわたる収益合計の最大化という目標に結局は一致するものであって，互換性のあるモデルのカテゴリーと考えられよう．なお，(A)は(E)と(B)(C)(D)の中間の立場になる，これらの関係を考慮して問題取扱いの立場を選択する必要がある．

3. モデルの比較と近似解の概念

いずれか2つのカテゴリーのモデルを比較する場合，あるいは，同一のカテゴリーだが考察に入れてある段階数の異る2つのモデルを比較する場合において，両者の関係について次のような3種類のケースが起りうると考えられる．(なお，同一のカテゴリーだが異る段階数に対するモデルを比較するということは，truncation を考えるさいに必要となる．)

［ケースI］ 比較されている2つのモデルにおいて最適決定が完全に一致している場合．

［ケースII］ 最適決定は操作的には近似的であるが，それに対応する効率測度(その最適政策をとったときそのモデルの立場で評価された収益合計などの評価値)はかなり相違している場合．

[ケースIII] 最適決定はかなり異るが，それに対応する効率測度はあまり異らないという場合.

さて，この内で［ケースI］においては，たとえ2つのモデルの効率測度評価値にどんな大きなひらきがあっても，最適決定は完全に一致して1つの政策を支持しているので問題ない．同様に，［ケースIII］においても，2つのモデルで支持される最適政策が操作上は非常に異るものであっても，対応する評価値を見るとほぼ同様な成果が得られることを示しているわけであるから，いずれの政策を選んでもよく，むしろこの場合は，操作上便利な政策の方をとればよいといえよう．このケースのモデルの例は比較的少いが，一例として拙稿［6］の動態的な場合をあげることができよう.（その例では理論的には混合戦略を必要とするが結果的には純粋戦略でも大差ないことが注目される.）なお実際にもいろいろな問題の中にはこのようなケースが起る可能性もあろうと予想される.

最後に問題となるのは［ケースII］である．この場合，比較の対象となっている2つのモデルが相互に近似的な性質のものであるかどうかは，効率測度の評価値の比較の上で判断しなければならない．この比較のさいに，前節において述べた評価期間対応の関係の注意が大切である．すなわちカテゴリー(C)(D)(E)のごとき立場の一段階設定モデルはこの場合最も容易に比較の対象とされうる.

なお，一般的には，無限個の選択対象を有する決定問題(連続的な変数の値を選択するというような問題)の場合は［ケースI］は実現しにくく［ケースII］の問題になりやすいが，離散的に扱って有限個の（特に少数の）選択対象を有する形の問題として扱えば，［ケースI］になる場合がかなり多いと期待される．これらの関係については興味深い例が豊富にあるが，紙面の都合上，割愛する.

4. 現価概念の問題点

以上の諸点と同時に考える必要のあるのは，いわゆる現価(present value)の概念の問題点である.

一般に，OR の文献にしばしば見られる表現によれば，「将来の費用や収益は現在のそれらよりも重要性が少いから割引いて考察するのである」といわれている．これはもちろん妥当であるが，その反面かなりあいまいな表現でもある.

具体的に，ダイナミック・プログラミングのモデルに導入される割引係数 α をいかにして決めるかといえば，従来，明確に示されている方法は，利子率 i について

$$\alpha=\frac{1}{1+i}$$

とする方法である．これについては，Sasieni［4］がすでに指摘しているような問題点がある上，さらにこの形の複利計算がその特定の情況において妥当するかどうか，また，果して各段階毎の収益や費用の重要性の関係が利子率だけで決まるものかどうか等の疑問がある.

1つの解決法としては，各段階毎の収益や費用の重要性の関係を，利子率以外の諸要因も考慮に入れて主観的に判断して α の値を任意に選ぶという便宜的方法もある．しかし，この α はカテゴリー(B)の現価モデルをフォーミュレートするさいにはモデルに組み込まれる値であり，このような段階で主観的判断を混じえることは望ましくない．この点を解決する手段として，前に述べた期間対応によるモデルの比較と関連させて，1つの方法を次に述べよう．

5. 問題取扱上の注意

以上に論じて来た諸点を考慮して，多段階決定問題の取扱いのさいに注意をはらうべき事項を，次の2項目に整理しておく．

第一に，打切り(truncation)可能な最小数の段階数を発見することが大切である．問題の性質によって，各段階での外部的与件が一定の場合もあるし，また，それが段階毎に変化して行くと予想される場合もあるが，いずれの場合にも，問題の構造と関連して，比較的少数の段階数だけを考慮に入れればよいことがある．必ずしも，無限に多くの段階をモデルに組み込む必要はない．このことは，将来の情況の予測の困難を回避するために重要である．なお，解析的に発見できるような問題構造に特有の性格としての打切可能段階数の発見のみならず，実際の問題解決に当っては，数値解を求めるさいにも，この点を注意することが大切であろう．

第二に，2種のモデルを比較したり，現価モデルの難点を回避する手段として，前述のモデルの各カテゴリーの関係を考慮しつつ，次のような比較判断を行うことが有益である．すなわち，

イ） 短期的観点での最適政策による短期的結果.

ロ） 長期的観点での最適政策による短期的結果.

ハ） 短期的観点での最適政策による長期的結果.

ニ） 長期的観点での最適政策による長期的結果.

の4つを同時に比較する．この比較には，カテゴリー(C)～(E)に類する1段階設定のモデルが有益な手段となる．最適政策の操作面だけを比較するには(A)や(B)のカテゴリーから出て来る政策もこれらの1段階設定モデルによる最適政策と比較可能であるが，前述のように，評価値の期間対応がないと効率測度(結果)の比較はできないという点を忘れてはならない．なお前論文[2][7]において考察段階数をいろいろに変えた場合のダイナミック・プログラミングの最適政策を比較することが有益な示唆をあたえることを指摘しておいたが，同論文で述べたような操作面での比較(政策函数の比較)は実際上は便宜的な性質のものであって，厳密には上述の立場によって評価値の比較も平行して行う方が正しい．

参考のため，以下に若干の例題を示す．

II. 例　　題

(例 1)　基本的な確率的在庫問題

最も典型的な確率的在庫問題を，あらためて次の形で考えて見る．1段階のイニシャル・ストック，スターティング・ストック，需要をそれぞれ x, y, z で表わす．仕入単価 a 円と適当な函数 $P(y, z)$ とによって，この1段階の利潤が

$$-a(y-x)+P(y, z)$$

となるものとする．ここではストックの返品または割引処分は不能とし，各段階の需要量は一定の分布函数 $F(z)$ にしたがうものとする．

従来，普通に考えられていた無限段階に対する現価モデル(前述のカテゴリー(B))の立場による最適在庫方程式を作ると，イニシャル・ステート x から出発して最適政策で無限段階営業して期待できる利潤現価総計 $f(x)$ は

$$f(x)=\max_{y}\left[-a(y-x)+\int_0^{\infty}\{P(y, z)+\alpha f(\max(y-z, 0))\}dF(z)\right]$$

の解である．ただし，x は十分小なる場合を考え，また，品切れで応じられなかった需要は見逃がすという場合を考えた方程式である．しかし，このケースは，x に関する項 ax が無条件に切り離せるため，実は函数方程式として扱う必要のない問題である．(この事実はちょっと注意すれば明らかであるが，なお前論文［1］特に pp. 291 および Karlin［3］の Lemma と関連がある)．段階数についていえば．たかだか2段階だけを考えておけば妥当な当面の決定は下せる構造であるといえる．

ここでは立場を変えて次のような考察をこころみる．まず，期間平均モデル(カテゴリー(C))を考え，n 段階に対して1段階当り平均収益を最大にする政策をとったときに初期状態 x から出発して期待しうる1段階当り平均収益 $V_n(x)$ とする．$n=1$ とすれば事実上カテゴリー(E)と一致する．すなわち

$$V_1(x)=\max_{x\geq x}\left[-a(y-x)+\int_0^{\infty}P(y, z)dF(z)\right]$$

x が十分小ならこれは

$$V_1(x)=ax+C_1$$

となる(C_1 はある定数)．これにもとずいて，

$$\begin{aligned}2\cdot V_2(x)=&\max_{y\geq x}\left[-a(y-x)+\int_0^{\infty}P(y, z)dF(z)\right.\\&\left.+\int_0^{y}V_1(y-z)dF(z)+\int_y^{\infty}V_1(0)dF(z)\right]\\=&\max_{y\geq x}\left[-a(y-x)+\int_0^{\infty}P(y, z)dF(z)+a\int_0^{y}(y-z)dF(z)+C_1\right]\end{aligned}$$

$$=ax+C_1+C_2$$

が一般にいえる．以下，一般に

$$n\cdot V_n(x)=\max_{y\geq x}\Big[-a(y-x)+\int_0^\infty P(y,z)dF(z)$$

$$+(n-1)\int_0^y V_{n-1}(y-z)dF(z)+(n-1)\cdot V_{n-1}(0)\int_y^\infty dF(z)\Big]$$

を逐次に解けばよいということになるが，出て来る最適政策は $n=2,3,\cdots$ に対しては全く同一になるので，計算を進める必要はない．また．

$$n\cdot V_n(x)=ax+C_1+(n-1)C_2$$

も明らかである．これより

$$V_n(x)=\frac{a}{n}x+\frac{C_1+(n-1)C_2}{n}$$

であるから $n\to\infty$ にすれば $V_\infty(x)=C_2$ へ収束する．ついでに C_1 と C_2 の大小関係を考えると

$$C_1=\max_y\Big[-ay+\int_0^\infty P(y,z)dF(z)\Big]$$

$$C_2=\max_y\Big[-ay+\int_0^\infty P(y,z)dF(z)+a\int_0^y(y-z)dF(z)\Big]$$

であるから，[ ] 内を比較するとすべての y の値に対して，

$$-ay+\int_0^\infty P(y,z)dF(z)<-ay+\int_0^\infty P(y,z)dF(z)$$

$$+a\int_0^y(y-z)dF(z)$$

がいえる．これだけでは一概に断定できないが，かなり一般の場合に $C_2>C_1$ が予想される．

さて，ここで重要なことは，上に示した方程式は特に x が十分に小なるときに上述のようにうまく扱えるのであるが，実際上からも，このような取扱いが重要な意味を持つ．一般に過大在庫ならば，返品または処分が可能ならそれを行う場合もあるし，返品または処分が不能で正規に販売するだけの場合にも仕入れはさし控えるから，いずれはイニシャル・ストックは小さくなるはずなのである．むしろ，ここで注意したいのは，こうして出て来る解の特性である．上述の場合に，$n\geqq 2$ のときに求められる最適なスターティング・ストックは steady state に対するモデル(カテゴリー(D))の最適解に一致する．いま，ここで steady state において1段階当り平均収益を最大にするスターティング・ストックを y^* と表わせば，その平均収益は

$$-a\Big[y^*\int_{y^*}^\infty dF(z)+\int_0^{y^*}\xi\cdot dF(\xi)\Big]+\int_0^\infty P(y^*,z)dF(z)$$

であり，これを変形して

$$-ay^*+a\int_0^{y^*}(y^*-\xi)dF(\xi)+\int_0^\infty P(y^*,z)dF(z)$$

となり C_2 と一致していることがわかる．

なお，具体例として，$P(y,z)$が比例的な売価 p, holding cost b, penalty cost c のみから成り，

$$P(y,z)=\begin{cases} pz-b(y-z) & (y\geqq z \text{ のとき}) \\ py-c(z-y) & (y\leqq z \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとすると，前記の C_1 および C_2 の式を参照してone-stage solution y_1^* および steady state solution y^* は

$$F(y_1^*)=\frac{p+c-a}{p+b+c}$$

$$F(y^*)=\frac{p+c-a}{p+b+c-a}$$

として定まる．

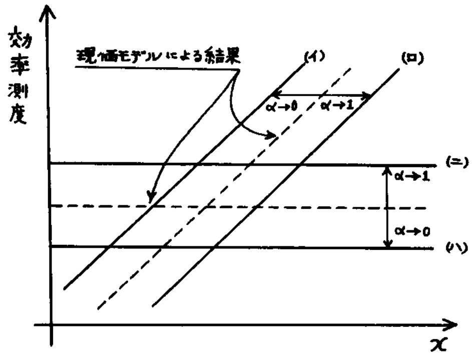
解(政策)の良さ(結果)を評価し比較検討するに，は前に第5節で述べたイ)～ニ)の各項に対応するものとして，

イ) $$-a(y_1^*-x)+\int_0^\infty P(y_1^*,z)dF(z)$$

ロ) $$-a(y^*-x)+\int_0^\infty P(y^*,z)dF(z)$$

ハ) $$-a\left[y_1^*\int_{y_1^*}^\infty dF(z)+\int_0^{y_1^*}\xi\cdot dF(\xi)\right]+\int_0^\infty P(y_1^*,z)dF(z)$$

ニ) $$-a\left[y^*\int_{y^*}^\infty dF(z)+\int_0^{y^*}\xi\cdot dF(\xi)\right]+\int_0^\infty P(y^*,z)dF(z)$$



第1図 基本的な在庫問題の政策の評価比較

を比較する．これは第1図のごとき関係になっている．

(例2) 割引値段で返品または処分できる場合

前の例題を割引値段 $a'(a'<a)$ にて返品または処分できる場合に拡張する．まず，one-stage model により，十分に小なる x に対しては最適スターティング・ストックは一般に

$$-a+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty P(y,z)dF(z)=0$$

の解である．これを y_L^* と表わそう．同様に十分大なる x に対しては最適スターティング・ストックは一般に

$$-a'+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty P(y,z)dF(z)=0$$

の解である．これを y_U^* と表わそう．ほとんどあらゆる場合に

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} P(y, z)\,dF(z)$$

は y について単調減少函数となるであろうから，$y_L^*<y_U^*$ が成立する．かつ，$y_L^*<x<y_U^*$ なる x については，$y_L^*\leqq y\leqq x$ なる x をとると

$$-a'+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} P(y, z)\,dF(z)>0$$

なので $y=x$ がよく，$x\leqq y\leqq y_U^*$ なる y をとると

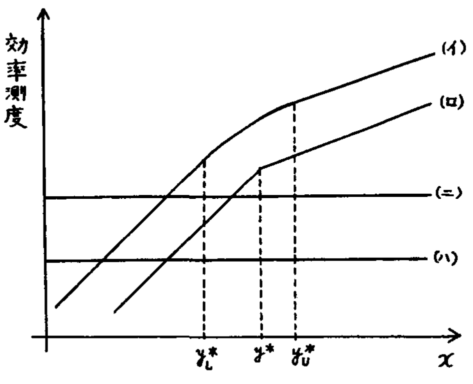
$$-a+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} P(y, z)\,dF(z)<0$$

なので $y=x$ がよく，いずれにしても $y_L^*<x<y_U^*$ のときは $y=x$ が最適となる．

次に，多数の段階を考えたときの政策として同様な形の政策，すなわち，2つの水準 y', y'' を考えて $(y'<y'')$

$$\begin{cases} x\leqq y' & \text{なら}\quad y=y' \\ y'\leqq x\leqq y'' & \text{なら}\quad y=x \\ x\geqq y'' & \text{なら}\quad y=y'' \end{cases}$$

とする政策をとるとすると，たちまち steady state となり，各段階毎に追加発注して y' を維持するという状態になる．したがって，この場合の critical level として y' のみを考えておけばよく，それを最適に定める方法は前述の例1のものと同じである．



第2図　割引価格で返品または処分できる場合

具体例として例1の中の具体例で割引値段 a' で返品可能とすると

$$F(y_L^*)=\frac{p+c-a}{p+b+c}$$

$$F(y_U^*)=\frac{p+c-a'}{p+b+c}$$

で y' は例1の y^* と等しい．評価値の比較は第2図の関係にある．

(例3)　段階毎に需要分布が変化する場合

各段階毎に需要分布が変化する場合は Karlin［3］によってカテゴリー(B)の現価モデルの立場をとって取扱われている．平均収益モデル(カテゴリー(C))の立場によっても，類似の結果が出る．第1段階，第2段階，…の需要分布を $F_1, F_2, \cdots$ とする．平均収益モデルは n 段階については

$$n\cdot V_n(x, F_1, F_2, \cdots, F_n)$$
$$=\max_{y\geqq x}\int_0^{\infty}[-a(y-x)+P(y, z)+(n-1)\cdot V_{n-1}\{\max(y-z, 0), F_2, \cdots, F_n\}]\,dF_1(z)$$

ただし $V_n(x, F_1, F_2, \cdots, F_n)$ は初期条件 x からスタートしてこのモデルの立場での最適政策で n 段階営業して期待しうる1段階当り平均収益．同じく $V_{n-1}(\cdot)$ は第2段階以後の $n-1$ 段階に対するそれを表わす．

実際上，このように購入費用が比例的な単価 a だけできまるときは最適政策は定水準政策で，上記の n 段階モデルおよび次期以後の $n-1$ 段階モデルについてのそれぞれの critical level を $y_n^*(F_1, \cdots, F_n)$，$F_{n-1}^*(y_2, \cdots, F_n)$ と表わせば，$y_n^*(F_1, \cdots, F_n) \leqq y_{n-1}^*(F_2, \cdots, F_n)$ という保証があれば当面の政策たる y_n^* $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ を求めるには単に

$$\max_y \left[-a(y-x) + \int_0^\infty p(y,z)dF_1(z) + a\int_0^y (y-z)dF_1(z) \right]$$

を解きさえすればよく，将来の分布函数が全部予測されていなくともよい．これは計画期間(考察にふくめるべき段階数)の打切りを考える場合に問題構造に対する注意が役立つという1つの好例である．

なお，上に述べたのは Karlin の結果において割引係数を1としたとき(現価換算の割引をしないとき)に対応する結果である，なお，Karlin は理論的立場から，きつい条件で制約しているが，実際上 $F_1(z)$ の情況を考えて当面の需要が $z=0$ ということはなく $z \geqq z_{\min}$ に分布していると予想されれば，$y_n^*(F_1, F_2, \cdots F_n) \leqq y_{n-1}^*(F_2, \cdots, F_n)$ なる条件をゆるめて

$$y_n^*(F_1, F_2, \cdots, F_n) - z_{\min} \leqq y_{n-1}^*(F_2, \cdots, F_n)$$

ならば上述のごとく当面の分布 $F_1(z)$ だけによって当面の決定ができる，さらに実際的には，次段階で再び発注する情況になる公算が大であれば，便宜上，上述の方法で当面の決定を下してよいといえよう．

このモデルから類推して，さらに一般の場合においても，将来のどの段階までを考察に入れれば十分であるかということが，問題の構造や与件の情況をちょっと注意して観察すれば容易に発見できる場合が多いと思われる．たとえば上述の例題のごとく購入費用が比例的のときは需要が上昇傾向にあるか，上昇傾向へ転換すると予想される段階までで考察を打切れるのである．

(例4)　多段ゲームとしての発注問題

筆者の前論文［1］［2］において取扱った発注政策問題を，あらためて本論文の観点で再検討し，制限条件をゆるめて実際化をこころみる．その問題群は，(a)仕入値段で返品可能，(b)割引値段で返品または処分可能，(c)返品または処分不可能の3つの場合に大別されるが，実際は(a)を(b)に内包させて2大別にできるので以下そのように扱う．

まず，これらの問題群においては，steady state solution は数式的には求まるが概念的には多少疑問がある．ただそれはやはりこの場合においもて平均収益モデルと同一結果となることは容易にわかる．政策上は，前論文［2］における極限解で割引係数 α を0にしたとき one-stage solution に一致し，$\alpha=1$ にしたとき上述の平均収益モデルの解に一致することが明らかで，こ

の場合にも α についての解の連続性が現れている．これらの性質や，前に(例1)(例2)によって示したような評価値の比較はきわめて容易に明らかとなるので紙面の制約上ここでは省略する．

ここでは将来の多段階の需要予測に不安がある場合の取扱いが可能なように拡張をこころみる．いま，第1段階でのスターティング・ストックの最適値を y_1^*，第2段階でのそれを y_2^* と現わすこととする．前論文では各段階の需要量の上下限が一定値として予想されている状態を仮定したが，ここではこの仮定をゆるめて，当面の第1段階についての需要量は $[z_{\min}, z_{\max}]$ の中の値に実現するものと予想されるが，第2段階以後についてはこの予想区間は変動があり，かつ，あまり将来の段階については予測が困難であるものとする．利益函数は前論文［2］におけると全く同様に比例的な売価 p, holdiny cost b, penalty cost c, 仕入価格 a, 返品(処分)可能のときはその割引価格 $a'(a'\leqq a)$ のみから成る構造を前提とする([2]第2節参照)．

割引値段で返品(処分)可能のときは，当然，$z_{\min}<y_1^*<z_{\max}$ が予想され，かつ，平均収益モデルをとることとして，次段階以後に対して，解函数がある適当な定数 v について，

$$v+\begin{cases} -a(y_2^*-x) & (x\leqq y_2^* \text{ のとき}) \\ a'(x-y_2^*) & (x\geqq y_2^* \text{ のとき}) \end{cases}$$

という形になるとする(これは前論文の結果から容易に考えられる)．そうすると当面必要な y_1^* を求めるには単に

(1)　$(p+b)z-(a+b)y+a(y-z)-ay_2^*$　$(0\leqq y_1^*-z\leqq y_2^*$ のとき)

(2)　$(p+b)z-(a+b)y+a'(y-z)-a'y_2^*$　$(y_1^*-z\geqq y_2^*$ のとき)

(3)　$-cz+(p+c-a)y-ay_2^*$　$(y-z\leqq 0$ のとき)

の3式によって規定されるペイオフ函数を考えれば十分であり，純粋戦略による最適解の存在条件([2]第2節参照，また証明は[7])を参照すれば直ちに次の結果を得る．

［公式Ⅰ］ $y_1^*-z_{\min}\leqq y_2^*$ を条件として

$$y_1^*=\frac{(p+b-a)z_{\min}+cz_{\max}}{p+b+c-a}$$

［公式Ⅱ］ $y_1^*-z_{\min}\geqq y_2^*$ を条件として

$$y_1^*=\frac{(p+b-a')z_{\min}+cz_{\max}+y_2^*(a-a')}{p+b+c-a'}$$

返品不能の場合に対しても同様の方法で当面の最適スターティング・ストックが求まる．紙面の制約上，計算を略して結果のみを示すと，この場合，最適政策は定水準政策で $y_1^*=\max(x, x_1^*)$, $y_2^*=\max(x, x_2^*)$ という形をとり，x_1^* は次の公式により定まる．

［公式Ⅰ′］ $x_1^*-z_{\min}\leqq x_2^*$ を条件として

$$x_1^*=\frac{(p+b-a)z_{\min}+cz_{\max}}{p+b+c-a}$$

［公式Ⅱ′］ $x_1^*-z_{\min}\geqq x_2^*$ を条件として

$$x_1^*=\frac{(p+2b)z_{\min}+cz_{\max}+x_2^*(a+b)}{p+2b+c}$$

(なお，ここでは計算を略したので，この場合においても解函数の形について［2］の結果から示唆が得られることを参考までに付記しておく．)以上の諸公式から示唆されるように，この問題においても遠い将来までの需要予測は必要ない．さらに一般化すると，需要が上昇傾向の時点，または上昇傾向へ転換する時点を予測して，そこまでの段階で打切って考察することができる．また，上述の諸結果にはこのほかにも興味深い性質が観察されるが，紙面が限られているので説明を省略する．

(例5) ある投資問題

短期間で打切りの困難な例題を1例だけ示しておく．市場価格の変動する財の売買で投機的に利益を得ようと行動する．売買のために動かさないで保有しておいた現金および財についてはその1段階当りそれぞれ係数 k_1 および k_2 の比例的収益(利子など)があり，この他に市価の変動を利用した利益獲得が期待できる．n 段階をとり，計算の便宜上，段階の番号は時間と逆に $n, n-1, \cdots, 1$ とつけて，各段階の価格 z の分布を $P_n(z), P_{n-1}(z), \cdots, P_1(z)$ とする．各段階の取引量を y (売りなら $y>0$, 買いなら $y<0$) とすれば，最後の1段階の収益は手持の現金 c と財 x にて

$$f_1(c, x, P_1)=\sum_z \max_{-\frac{c}{z}\leq y\leq x}\{yz+k_1\cdot\max(c, c+yz)+k_2\cdot\min(x, x-y)\}P_1(z)$$

{ } 内を吟味すれば最適決定は $z>k_2$ なら $y=x$, そうでなければ $y=0$. よって

$$f_1(c, x)=k_1c+x[k_2\sum_{z<k_2}P_1(z)+\sum_{z>k_2}z\cdot P_1(z)]$$

一般にこれから出発して段階をさかのぼって計算すればある係数 g_n および h_n によって

$$f_n(c, x, P_n, \cdots, P_1)=x\cdot g_n+c\cdot h_n$$

という形であり，その1段階前へさかのぼる計算は

$$\begin{aligned}&f_{n+1}(c, x, P_{n+1}, P_n, \cdots, P_1)\\&\quad=\sum_z \max_{-\frac{c}{z}\leq y\leq x}\{yz+k_1\cdot\min(c, c+yz)\\&\qquad+k_2\cdot\min(x, x-y)+f_n(c+yz, x-y)\}P_{n+1}(z)\end{aligned}$$

これに上の f_n を代入して $y>0$ と $y<0$ に分けて { } 内を吟味すれば，最適決定は当面の価格 z について,

$$\begin{cases} z<\dfrac{g_n}{1+h_n+k_1} & \text{なら買い}\ \left(y=-\dfrac{c}{z}\right)\\[2ex] \dfrac{g_n}{1+h_n+k_1}<z<\dfrac{g_n+k_2}{1+h_n} & \text{なら売買せず利子をかせぎ}\\[2ex] z>\dfrac{g_n+k_2}{1+h_n} & \text{なら売り}\ (y=x)\end{cases}$$

となる．また，この決定を f_{n+1} に代入してリカーレンス式

$$\begin{cases} h_{n+1}=k_1+h_n+\sum\limits_{0<z<\frac{g_n}{1+h_n+k_1}} \left\{\dfrac{g_n}{z}-(1+h_n+k_1)\right\}P_{n+1}(z) \\ g_{n+1}=k_2+g_n+\sum\limits_{z>\frac{g_n+k_2}{1+h_n}} \{(1+h_n)z-(k_2+g_n)\}P_{n+1}(z) \end{cases}$$

を得る．この結果を吟味すると，この性質の問題ではあまり短期的なモデルでは妥当性がとぼしいと推察できる．しかし．たとえば確実に「売り」になるような上げ相場の時期を予測して打切り，それまでを考察期間としてよいということも明らかである．なお，この投資モデルは Fisher [5] のものと一見似ているが，本質は別個のもので，またここに示した以外に各種の変形が考えられるという点を付記しておく．

あとがき

紙面の制約上，若干の例題と詳細な吟味を残念ながら割愛したが，問題処理にさいして参考になれば幸いである．本論文作成前に部分的内容について討論をしていただいた方々，ならびに原稿に関して御指示を賜った学会レフェリーに対し感謝の意を表したい

参考文献

[1] 春日井博および加瀬谷忠美，“ある動態的マクシミン発注政策とその一般化”，経営科学，第3巻，第4号 (1960)

[2] Kasugai, H. and Kasegai, T., “Characteristics of Dynamic Maximin Ordering Policy”, J. Op. Res. Soc. Japan, Vol. 3, No. 1 & 2 (1960)

[3] Karlin, S., “Dyamic Inventory Policy with Varying Stochastic Demands,” Management Science, Vol. 6, No.3 (1960)

[4] Sasieni, M., “Dynamic Programming and Inventory Problems”, Operational Research Quarterly, Vol. 11, No, 1 & 2, (1960)

[5] Fisher, J, L., “A Class of Stochastic Investment Problems”, Operations Research, Vol. 9, No. 1, (1961)

[6] Kasugai, H. and Kasegai,T., “Note on Minimax Regret Ordering Policy,” J.Op. Res. Soc. Japan, Vol. 3, No. 4, (1961)

[7] 加瀬谷忠美，“ある多段階経営行動決定過程とダイナミック・プログラミング”，商経論集(早大) 第5号，(1961)

[8] 加瀬谷忠美，“管理行動，長期計画，ならびに多段階決定過程の構造上の諸問題”，商経論集(早大) 第6号，(1962)