文献抄録

MORRISON DONALD F.: COST FUNCTION FOR SYSTEMS WITH SPARE COMPONENTS *Oprs. Res, 9. No. 5, (688—694), 1961.*

一つのシステムが同一種類の多数の構成部品からでき上っており，どの部品が壊れてもシステムは止り故障部品を予備部品と取替えることによって，システムは再び動きはじめる．予備部品がなくなればこのシステムは廃棄される．この場合の予備部品の最適数を見出すための費用函数を導いた．すなわち，構成部品数を n，予備部品数を k とし，

$L(n, k)$ =システムの全寿命（$k+1$ 番目の故障までの時間）

$R(T; n, k)$ =システムの信頼性，すなわち，$L(n, k)$ が T を越える確率

$h(T; n, k)$ =時間間隔 $(0, T)$ に故障する部品数

と定義し，費用については

c_1=システムを構成する個々の部品の費用

c_2=システム運転中に生じた故障部品にともなう損失（たとえば，取替に要する費用，取替中のシステム停止損失等）

c_3=規定された時間間隔 T の前にシステムが最終故障に達した場合の損失

であるとして，次式でシステムの費用函数 $c_1'(T; n, k, c_1, c_2, c_3)$ を与えた．

$$c_1'(T; n, k, c_1, c_2, c_3)=c_1(n+k)+c_2Eh(T; n, k)+c_3[1-R(T; n, k)]$$

ここで $Eh(T; n, k)$: T までの故障数の期待値

部品が指数型の寿命分布に従う場合について，上式を最小にするような予備部品数を見出す数表を与えた．また，故障しないで残った部品についても，指数型の寿命分布に従う場合には故障率は一定であるから，それを後のシステムに使用するとした場合，費用函数 $c_2'(T; n, k, c_1, c_2, c_3)$ は

$$c_2'(T; n, k, c_1, c_2, c_3)=(c_1+c_2)Eh(T; n, k)+c_3[1-R(T; n, k)]$$

となり，この場合の最適予備部品数を与える表についても述べている．（大前義次）

SASIENI, M. W.: DOUBLE QUEUES AND IMPATIENT CUSTOMERS WITH AN APPLICATION TO INVENTORY THEORY *Oper. Res. 9. Vol. No. 6, 1961, 771—781.*

Kendall が 1951 年の有名な論文 "Some problems in the theory of queues," (J. Roy. Stat. Soc., B, Vol. 13, No. 2) で触れたように queue は客とサービス・カウンターの両方において作られうる．普通の queue の場合でも，手待ちの server は仕事をするために queue を作っているとみられぬこともない．こういう立場で眺めると，queue はどの問題も double queue であるが，大ていの問題では server の数が有限である．客の数を有限として考えられることも，もちろんあるが，Kendall の与えたタクシー・ステーションにおける客とタクシーとの例のように，どちらもその総数に制限のないような double queue もある．けれども，こういうモデルでは，客の来方もタクシーの来方もともに一定の割合とすると，必ずどちらかがあふれて平衡状態に達することはあり得ない．たとえ双方の割合が同じであるとしても，タクシーの数と客の数の差 r の平均値は0になるが r の分散は時間のたつにしたがってだんだん大きくなり，ついには ∞ になってしまう．

この論文では，平衡状態に達することを保証するために，客もタクシーも "待ち切れなくて帰る" ことがあることを仮定した．つまり客は T，タクシーは S 以上は待てなくて，それ以上になるものは，サービスを受けずに立去るという制約を課したわけである．当然予想されるように，これならば平衡状態に達し得る．そして，客は n 人が待っているときに到着して列に加わる rate は λ_n，タクシーの方では m 台待っているとき列に加わる rate は μ_m であるとし，その時間間隔はともに指数分布を仮定する．

まず，客の総数が N，タクシーの総数が M という場合について，平衡状態の方程式を作る．待っている人のいままでの待ち時間を列の先頭から順次 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ とすると，平衡状態の方程式は x_i

についての偏導函数と x_1 についての積分とを含む方程式になるが，これを解くと，平衡状態において n 人の客が待っている確率 $P_n{}^*$ は

$$P_n{}^*=Q_0\mu_0{}^{-n}\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right\}\left\{1-e^{-\mu_0 T}\sum_{i=1}^{n-0}(\mu_0 T)^i/i!\right\}$$

で表わされることがわかる．ここで Q_0 はタクシーも，人もいない確率である．タクシーについても同様にとかれる．ここでは M, N という制限があったが，それをとり除いても，λ_n, μ_n が有界ならば，$\sum P_n{}^*$, $\sum Q_n{}^*$ はそれぞれ収束することも注意されている．そして，このことから，double queue が平衡状態に達するための必要条件は λ_n, μ_n が有界であることだといっているが，この論理はちょっとうなずけない．

更に special case として，$\lambda_n=\lambda$, $\mu_n=\lambda$ のときの平均や分散を計算し，前記 r の分散なども求めている．また $\lambda_n=\lambda$, $\mu_m=(M-m)\mu(0\leqq m\leqq M)$, $\mu_m=0(m>M)$ とおき，$S\to\infty$ ならしめて Barrer (Oper. Res. vol. 5, 650—656, 1957) のモデルに reduce し，その結果の一致することも確めている．

最後に，いま置いたようなモデルで S, T の制限をおくと，バック・オーダを考えに入れた在庫問題 (Morse の本 [1958] と同じ考え) で，しかもある時間内にはいらないものは破棄されるようなモデルになるが，そのことの注意と若干の special case の考察を行なっている．（森村英典）

CHARNES, A. AND COOPER, W. W.: SOME PROBLEMS AND MODELS FOR TIME-PHASED TRANSPORT REQUIREMENTS *Naval Res. Logist. Ouart. Vol. 7 (1960), 533—544.*

「正規変量と線型決定規則とをもつ確率計画法」という副題がついている．

石油会社が油槽船隊の長期用船政策をきめたい．用船契約 (charter) には短期と長期の 2 種類あって，後者は 5 期間である．

D_i……第 i 期の配船需要量 (shipping demand). 各 $\mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i{}^2)$ 分布の独立 *r. v.* とする．

s_i, l_i……第 i 期のそれぞれ短期，長期用船率 (charter rate). いずれも D_1, ……, D_N に依存する *r. v.* でよいがその期待値は既知とする．

S_i, L_i……第 i 期首にきめたそれぞれ短期，長期用船数．S_i は非 *r. v.*, L_i は D_1, ……, D_{i-1} に依存する *r. v.*

とする．$\{\beta_i\}_1{}^{N+1}$ を与えられた確率として，拘束条件

$$P_r\{S_i+L_i+L_{i-1}+\cdots\cdots+L_{i-4}\geqq D_i\}\geqq\beta_i \quad (i=1, \cdots\cdots, N)$$

$$P_r\{L_N+L_{N-1}+\cdots\cdots+L_{N-4}\leqq L\}\geqq\beta_{N+1}$$

のもとに最小問題

$$E\left\{\sum_{j=1}^{N}(s_jS_j+l_jL_j)\right\}\to\min_{\{L_j,S_j\}}$$

を考える．もちろん $j\leqq 0$ に対して $L_j\equiv 0$. 拘束条件の最後のものは，最終期で残った契約分が水準 L を越えてはならぬというのである．

第 i 期には既に D_i, ……, D_{i-1} が観察されている．線型決定規則

$$L_i=\sum_{k=1}^{i-1}\gamma_{ik}(D_k-\mu_k)+\gamma_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, N)$$

の中で最適のもの——すなわち最適な係数 γ_{ik}, γ_i——を求めようとする．

仮定 $E\{l_j(D_k-\mu_k)\}=0\ (j\neq k)$ をおくと，変数 γ_{ik} は実質的に消え去り，γ_i と S_i のみを変数にもつ割合簡単な線型計画の問題となる．（坂口　実）

BELLMAN, R.: DYNAMIC PROGRAMMING APPROACH TO OPTIMAL INVENTORY PROCESSES WITH DELAY IN DELIVERY *Quart. Appl. Math., Vol. 18 (1961), 399—403.*

z_n……第 n 期に発する注文量 ($n=0, 1, \cdots\cdots, N-d$). d 期後に配達される．

x_n……第 n 期首における在庫量．第 $(n-d)$ 期に発した注文が配達される前の量である．

v_n……第 n 期中の需要．独立確率変数列．

とすると

$$x_{n+1}=x_n-v_n+z_{n-d} \qquad (n=0, 1, \cdots\cdots, N;\ z_{-d}=\cdots\cdots=z_{-1}=0)$$

である．量 z の注文に対する注文費用を $g(z)$, 量 $x(\gtreqless 0)$ の在庫保持に対する損失を $\phi(x)$ として，N 期間における全損失

$$E\left\{\sum_{i=0}^{N-d}g(z_i)+\sum_{i=0}^{N}\phi(x_i)\right\}$$

を最小にせよ．(1) により

$$x_i=\begin{cases}x_0-\sum_{k=0}^{i-1}v_k, & i=1, 2, \cdots\cdots, d-1\\ x_0-\sum_{k=0}^{i-1}v_k+\sum_{k=0}^{i-d}z_k, & i=d, d+1, \cdots\cdots, N\end{cases}$$

であるから，これは

$$E\left\{\sum_{i=0}^{N-d} g(z_i)+\sum_{i=0}^{d-1}\phi\left(x_0-\sum_{k=0}^{i-1}v_k\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=d}^{N}\phi\left(x_0-\sum_{k=0}^{i-1}v_k+\sum_{k=0}^{i-d}z_k\right)\right\}\to\min_{z_0,\cdots\cdots,z_{N-d}}$$

の問題である．

$N\geqq d$ とする．第2項を除いたものの最小値を $f_N(x_0)$ とおくと容易に

$$f_d(x_0)=\min_{z_0}E\left\{g(z_0)+\phi\left(x_0-\sum_{k=0}^{d-1}v_k+z_0\right)\right\}$$

$$f_N(x_0)=\min_{z_0}\left[g(z_0)+E\left\{\phi\left(x_0+\sum_{k=0}^{d-1}v_k+z_0\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+f_{N-1}(x_0-v_0)\right\}\right]$$

が得られる．これを解けばよい． (坂口　実)

ISBELL, J. R. : AN OPTIMAL SEARCH PATTERN *Naval Res. Logist. Quart.*, *Vol. 4 (1957), 357—360.*

GLUSS, B. : AN ALTERNATIVE SOLUTION TO THE LOST-AT-SEA PROBLEM *Naval Res. Logist. Quart. Vol. 8, (1961), 117—122.*

last-at-sea の問題というのは Bellman が出したもので「基点 O から単位距離のところに直線 L があるがその方向がわからない．O を出て L に行きつくまでに歩む距離の最大値を最小ならしめよ」というのである．せいぜい $1+2\pi\fallingdotseq7.283$ を歩めば必らず L にゆきつくことは自明だが，Isbell によると最適政策は図1のように進み $\sqrt{3}+\frac{7}{6}\pi+1\fallingdotseq6.397$ を歩むだけである．

後の論文で Gluss が解いているのは「L の方向

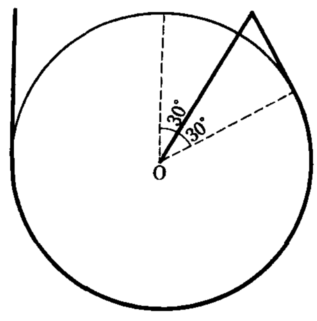

図 1

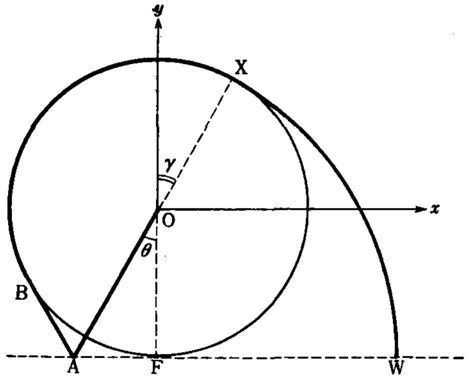

図 2

θ が $(0, 2\pi)$ で一様分布の確率変量として，L に行きつくまでに歩む期待距離を最小にせよ」という問題である．ここでは近似解を求めているだけだが，それによると図2のように OABXW と進むのが一つの近似解で，このときの期待距離は 3.4691．ここに図2で，$\theta=33°56'$, $\gamma=33°58'$, AB は接線，XW は図中の直交軸につき放物線

$$x=1.5108-0.8115y-0.4057y^2$$

で，X で円に接し，W で水平線 AF に直交する．

(坂口　実)

KARUSH, W. : A THEOREM IN CONVEX PROGRAMMING *Naval Res. Logist. Quart.*, *Vol. 6 (1959), 245—260.*

数理計画法の応用でしばしば現れる最小問題は

$$F(A,B)\equiv\min_{A\leqq x_1\leqq\cdots\cdots\leqq x_n\leqq B}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i) \qquad (*)$$

(ただし $f_i(x)$ はみな凸函数)を求めることである．

(Lemma 1) x° が解 vector なための必要充分条件(略)．

(Lemma 2) $(*)$を問題(A, B)とよぶことにする．問題(M, N)の解を y° とする．$M\leqq A<B\leqq N$ とすると問題(A, B)の解は

$$x_i^\circ=\begin{cases}A, & y_i^\circ<A\\ y_i^\circ, & A\leqq y_i^\circ\leqq B\\ B, & y_i^\circ>B\end{cases}$$

で与えられる．

などに基づいて

［定理 1］ 任意の $A\leqq B\leqq C$ に対して等式

$$F(A,C)=F(A,B)+F(B,C)-F(B,B)$$

が成立する．

［定理 2］ $F(A, B)=M(A)+N(B)$
が成立する．ここに M, N は何れも凸函数で M は $\uparrow$, N は $\downarrow$.
が証明されている．

これらは数学的に興味のある事実だが，もちろん解を具体的に求めるには DP を使って

$$F_k(A)\equiv \min_{A\leq x_k\leq\cdots\cdots\leq x_n\leq B}\sum_{i=k}^{n} f_i(x_i)$$

とおけば

$$F_k(A)=\min_{A\leq x_k\leq B}[f_k(x_k)+F_{k+1}(x_k)]$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ n;\ F_{n+1}(A)\equiv 0)$$

が成立するからこれを解けばよいのである．

（坂口　実）

WETHERILL, G. B.: BAYESIAN SEQUENTIAL ANALYSIS *Biometrika, Vol. 48(1961), 281—292.*

α を助変数にもつ確率分布族 $\{\xi(\theta|\alpha)\}$ が，密度函数 $\phi(x|\theta)$ をもつ観測値 x につき closed under sampling（略して c. u. s.）というのは

$$(\forall\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)\exists\beta=\beta(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n);$$

$$\xi(\theta|\beta)=\xi(\theta|\alpha)\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i|\theta)\Big/\int\xi(\theta|\alpha)\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i|\theta)\,d\theta$$

のことであると定義する．

（例 1） Beta 分布は二項分布観測値につき c. u. s. 実際，二項分布の母数 θ の事前分布を $\mathbf{B}(s, t)$ とすると，$x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n$ を得た後の θ の事後分布は $\mathbf{B}\left(s+\sum_1^n x_i,\ t+n-\sum_1^n x_i\right)$ になる．

（例 2） 確率 k-vector の全体は，任意の密度函数 $\phi(x|\theta)$ をもつ観測値につき c. u. s. 実際，θ の事前分布を確率 k-vector $(a_1,\ \cdots\cdots,\ a_k)$ で表わすと（θ の可能な値が $\theta_1,\ \cdots\cdots,\ \theta_k$ の k 通りとする），$x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n$ を得た後の θ の事後分布は，確率 k-vector

$$\left(a_j\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i|\theta_j)\Big/\sum_{j=1}^{k}\left\{a_j\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i|\theta_j)\right\}\Bigg|\,j=1,\ \cdots\cdots,\ k\right)$$

となる．

（例 3） 正規分布は正規分布観測値につき c. u. s. 実際，正規分布 $N(\theta, 1)$ の平均値 θ が未知として，その事前分布がやはり正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のとき，$x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n$ を得た後の θ の事後分布は

$$N\left(\frac{\bar{x}+\mu(n\sigma^2)^{-1}}{1+(n\sigma^2)^{-1}},\ \frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}\right)$$

となる．

簡単のために 2 決定の問題を考える．$W_i(\theta)$ $(i=1, 2)$ を θ が真の母数値のときに最終決定 d_i をなすことの loss とする．未知母数に関する知識が $\xi(\theta|\alpha)$ のときに，最終決定 d_1 または d_2 をなすか，またはさらに観測を続ける（continue sampling）か何れかに決めなければならないから

$R(\beta)$……知識が β のとき（$\xi(\theta|\beta)$ のことを標記的にかく表わす）からはじめて，最適政策による全 risk

とおくと，DP 方程式

$$R(\beta)=\min\begin{bmatrix} d_1:\ \int W_1(\theta)\xi(\theta|\beta)\,d\theta \\ d_2:\ \int W_2(\theta)\xi(\theta|\beta)\,d\theta \\ C:\ 1+\int R(\beta_x)\,dx\int\phi(x|\theta)\xi(\theta|\beta)\,d\theta \end{bmatrix}\quad(*)$$

を得る．ここに β_x は，x を得た後の事後知識で

$$\xi(\theta|\beta_x)=\xi(\theta|\beta)\phi(x|\theta)\Big/\int\xi(\theta|\beta)\phi(x|\theta)\,d\theta$$

の形にかける β_x のことである．

（$*$）を解く例が（例 1, 2, 3）についてそれぞれ示されている．例えば（例 2）において，$k=3, \phi(x|\theta_i)$ は母数 θ_i の二項分布とすると，$\theta_i/(1-\theta_i)=\lambda^i$ $(i=1, 2, 3)$ とかけるようなとき（$*$）は解き易い．$d_1=$ "accept the batch", $d_2=$ "reject the batch"; $\theta_1=1/4$, $\theta_2=1/10$, $\theta_3=1/28\ (\lambda=1/3)$; $W_1(\theta_j)=\max(0,\ 500(\theta_j-0.07))$ $W_2(\theta_j)=\max(0,\ 500(0.07-\theta_j))$ として解いてある．

（坂口　実）

GLUSS, B.: AN OPTIMAL POLICY FOR DETERMINING A FAULT IN A COMPLEX SYSTEM *Oper. Res., Vol 7(1959), 468—477.*

ある複合系が N 個の成分（module）より成り，各成分 r $(r=1,\ \cdots\cdots,\ N)$ は n_r 個の部品（item）より成るとする．成分 r の中の部品 i のことを簡単に (r, i) と記す．

p_r……故障が成分 r の中にある確率

p_{ri}……故障が部品 (r, i) にある確率

t_r, t_{ri}……それぞれ成分 r，部品 (r, i) の点検の所要時間

q_{ri}……部品 (r, i) の点検が（故障か否かについて）何の情報をも与えない確率

とする．最も早く故障場所をみつけるための search

policy を求めんとする．

$f(p_1,\ \cdots\cdots,\ p_N)$……最適政策により故障場所つきとめまでの所要時間の期待値

$f_r(p_r,\ \cdots\cdots,\ p_{rn(r)})$……故障が成分 r の中にあることがわかっているとき，最適政策により故障場所つきとめまでの所要時間の期待値

とおくと容易に

$$f(p_1,\ \cdots\cdots,\ p_N)=\min_{1\leq r\leq N}\Big[t_r+p_r f_r(p_{r1},\ \cdots\cdots,p_{rn(r)})$$

$$+(1-p_r)f\Big(\frac{p_1}{1-p_r},\ \cdots\cdots,\ \overset{r}{0},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_N}{1-p_r}\Big)\Big] \quad (1)$$

$$f_r(p_{r1},\cdots\cdots,p_{rn(r)})=\min_{1\leq i\leq n(r)}\Big[\frac{t_{ri}}{1-q_{ri}}$$

$$+(1-p_{ri})f_r\Big(\frac{p_{r1}}{1-p_{ri}},\ \cdots\cdots,\ \overset{i}{0},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_{rn(r)}}{1-p_{ri}}\Big)\Big] \quad (2)$$

がわかる．

(2)はすぐ解けて最適政策が "$A_{ri}=\dfrac{t_{ri}}{p_{ri}(1-q_{ri})}$ を最小にする i をまず点検せよ" となる．また

$$f_r(p_{r1},\cdots\cdots,p_{rn(r)})$$

$$=\frac{t_{r1}}{1-q_{r1}}+(1-p_{r1})\frac{t_{r2}}{1-q_{r2}}+(1-p_{r1}-p_{r2})\frac{t_{r3}}{1-q_{r3}}$$

$$+\cdots\cdots+(1-p_{r1}-p_{r2}-\cdots\cdots-p_{r,\,n(r)-1})\frac{t_{rn(r)}}{1-q_{rn(r)}}$$

(ただし $A_{r1}\leqq A_{r2}\leqq\cdots\cdots\leqq A_{rn(r)}$ のとき)となる．

(1)もすぐ解けて最適政策が $f_r(\cdot)$ に無関係に "t_r/p_r を最小にする r をまず点検せよ" となる．

$$f(p_1,\cdots\cdots,p_N)=\sum_1^N p_r f_r+t_1+(1-p_1)t_2$$

$$+(1-p_1-p_2)t_3+\cdots\cdots+(1-p_1-\cdots\cdots-p_{N-1})t_N$$

(ただし $t_1/p_1\leqq t_2/p_2\leqq\cdots\cdots\leqq t_N/p_N$ のとき)が得られる．くわしい数値例がある． (坂口　実)

PRUITT, W. E.: A CLASS OF DYNAMIC GAMES *Naval Res. Logist. Quart., Vol 8 (1961), 55—78.*

ある確率変量の観測値にもとづいて決定をくだすという事態は OR において多数にある．game ではこれは poker に似ている．この論文では2個以上の変量が player に観測され，またその一部は相手 player に open であるような model について解析する．この論文でくわしく解かれている3例の中，1例のみを説明しよう．

(例)　stud poker

	Hand	才1段	才2段	I への支払い
I	(x_1,x_2)	bet a fold		 −1
II	(y_1,y_2)		see fold	$(1+a)\iint \mathrm{sgn}.(x_1\vee x_2 x_3-y_1\vee y_2\vee y_3)\,dx_3\,dy_3$ -1

player I, II は独立に(0, 1)内の乱数を2つずつ配られる(このため入場料1を払う)．両者は何れも一方の札(それぞれ x_1, y_1)は伏せておき (face down) 他方の札(それぞれ x_2, y_2)は開いておく (face up)．まず I が先手で，自分の x_1, x_2 および相手の y_2 をみて，金額 a(正の定数)を賭ける(bet)か，または(望みなしとみて)おりる(fold)．後者のとき I の負けで入場料1は没収される．I が賭けたときは次は II の手番で，自分の y_1, y_2 および相手の x_2 をみて，賭けに応ずる(see)か，またはおりる(このときは II の負けで入場料1は没収される)かどちらか選ばねばならぬ．両者が賭けたならばもう一枚ずつ(それが x_3, y_3) card を抜いて，3枚の手札の最大を較べあい高い手のものが低い手のものから入場料＋賭金$=1+a$ を没収する．

この game が完全に解かれている．この game は I が先に move しなければならぬことを除けば I, II につき全く対称である．最適の手は $0<a\leqq2$, $2<a\leqq3.822$, $a>3.822$ の3場合に分れるが何れにおいても，I にとってはそれは max $(x_1,\ x_2)$ に依存するのに対し II にとっては y_1, y_2 の個々に関係することがわかる． (坂口　実)