<綜合告報> Queuing Theory について

森　村　英　典*

はしがき

queue の理論はここ10年程の間，特に最近の数年間に，実におびただしい数に上る研究が行われ，OR としての見地からも，数学としての見地からも一応の整理期にはいったようである．以下でも触れるように，あまりにも多くのタイプが存在するので，queue の研究者の間でも既知の結果を集成整理することが望まれている．しかし1,000篇にも上ろうかという数の論文について，その結果を集成整理することは到底浅学な筆者の為し得ることではない．そういった仕事は，そのことも目標の1つとして組織された数理科学綜合研究班第6班のグループとしての仕事に委ねて，ここでは現在までに考えられている諸種の型とその解法について概観をしたのち，最近及び今後の研究の方向といったものに焦点を絞って報告したい．なお，諸種の型の queue についての既知の結果は Saaty〔1〕による綜合報告の他，最近宮脇教授他2氏によって刊行された著書〔2〕にも数多く紹介されているので，それらを参照していただきたい．また文献を渉るには Doig の論文〔3〕が役立つ．

§1. queuing model のタイプ

周知のように，queue の model を決定するものは input（以下客の到着という表現をとる）と service station における service の統計的な型及び queue における諸種の規則である．この各々に対してそれぞれ数種乃至数十種の型が普通考えられるから，その組合わせをとれば queuing model の型は非常に多く存在し得るわけであり，しかもそれらの各タイプ毎に待ち時間とか行列の長さとか，考察の対象となるものがまた数種考えられるから，もしそれらを個々別別にしかもしらみつぶしにやって行こうとすれば実に厖大な研究対象になり得る．1,000篇以上の論文が書かれるのも当然であろう．また，それらは現実の問題として解答を迫られて解かれたものが多かったと思うし，またそうあるべきであったと思う．もしも現実の background から遊離して，ただ珍奇な型の問題の解答を追っても，それはおそらく演習問題解答の意味しか持たないであろう．queue の問題は，数学的に一言にしていえば，マルコフ過程の special case に過ぎないのである．ただ現在のところ一般論からは細かい結果を簡単に導くような有効な方法が知られていないのに，現実の問題としては具体的な結果が要求されるので，個々の場合にさまざま

---

* 東京工業大学 昭和36年9月12日受理

の工夫をこらして，少しでも exact な結果を導こうと努力が続けられているわけである．その工夫のしかたもいろいろで，主なものだけでも十指に余るが，いずれも簡単なマルコフ過程に持ち込もうとする努力だといえるであろう．これについては次節で触れたい．

さて，input および service の確率的な型は，大体対応して考えられる．つまり客の到着は1人ずつであり，しかもその到着時間間隔は互いに独立で common distribution をもつ確率変数列で表わされると考えるのが普通であるが，service time も全く同様に考えられるので，これを分類するために，その分布の型を指定する．Kendall〔4〕は次の記号を提唱した．

M: 指数分布

E_k: phase k の Erlang 分布 （パラメーター $k\lambda$ の指数分布を k 回 convolution すれば phase k，平均値 $1/\lambda$ の Erlang 分布が得られる．もちろん，k の値によって平均値は変らず，$k=1$ のときは指数分布そのものであるが，$k\to\infty$ のときは単位分布に法則収束する．別ないい方をすれば，自由度が偶数の χ^2 分布である）

D: 単位分布

L: 主として service 側に使っているので，その言葉で述べると，**service 毎に phase 数の違う Erlang 分布**で，どの phase をとるかは別の分布で定められる．〔4〕にはこの記号はないが，後に Mathematical Reviews などで Kendall 自身が用いている．

G: 一般の分布 （平均値，もしくはより高次のモーメントの存在は仮定する）ただし，input に用いる際は，時間間隔の独立性（大ていの場合は仮定している）のあるときは GI と書く．

多くの型は，以上の記号と server の数の3つによって $M/M/1$ の如く表わされ，これ以外に queue length についての制限とか queuing discipline とかによって分類される．この記法の第1の文字は input の分布型，第2の文字は service time の分布型，第3の文字は server の数を示している．

指数分布は input の場合は Poisson 到着というよび方でよばれることが多い．これは上に述べた仮定（1人ずつ到着して，時間間隔は互いに独立）のもとでは，客の到着という事象が Poisson 過程を作るということと，時間間隔の分布が指数分布であるということとが同等だからである．よく知られたように Poisson 過程は“ランダムな”到着を表現すると解釈される3つの条件から一意的に導かれるので（たとえば〔5〕）“ランダム到着”という名でもよばれると同時に規則性の最もゆるい場合の表現として一方の極端に位置すると通常考えられている．これに対する他方の極端は最も規則性の強い場合で，input としては“regular 到着”と名づけられ，単位分布が対応する．(service のときは“一定サービス”と呼ばれる．) Erlang 分布は $k=1$，$k\to\infty$ の2つの極端な場合が夫々上記の2つの極端な場合に対応するから，多くの現実問題で起る分布は Erlarg 分布で表現し得る場合が多いと見なされている．Morse〔6〕などはこの立場に立つ．指数分布の変動係数は1，単位分布のそれは0，Erlang 分布は $1/\sqrt{k}$ で0と1の間にあるから，この量で測っても上述の関係は裏書きされる．そうすると，当然変動係数が1よりも大きい分布

も考えられるが，その1つとして超指数分布が Morse などによって，よく考えられている．Erlang 分布は χ^2 分布の special case であり，χ^2 分布（又はもっと一般に Γ 分布）はいろいろな場合によく適合する分布であることが知られているため，Erlang 分布によって現実の多くの分布が cover 出来ると考えられがちである．しかし Γ 分布はよく適合しても Erlang 分布では十分適合したとみなせないことも当然多い筈で（k が整数値しかとれないから），そのための拡張として Gaver〔7〕，Luchack〔8, 9〕などによって前記 L 型の分布が考えられている．この分布だと k が整数値でないようなものも，更には one-peak でないような場合にも用いられ得る．待合せ理論で χ^2 分布とか Γ 分布とかせず，特に Erlang 分布として k を整数値に限ったのは，何個かの指数分布の和として，到着時間間隔や service time を与えたかったからで，計算を容易にするための技巧的手段に過ぎない．しかしこの技巧は k が整数値でないと全然使えなくなるから，その点を保存して拡張するために前記のような型の分布が出て来たわけである．

queue の理論で取扱われている special な型の分布は，若干のものを除き大体以上のようであり，これらの special な分布形を仮定しないのが G とよばれる場合である．

上の拡張の方向に見られるように，指数分布という根底は出来るだけ保存しておこうとしているが，これは，行列の系内の人数だけに着目するとき，それがマルコフ過程を作るためにはこの指数分布が本質的な役割を果すからに他ならない．そのため，$M/M/1$ という場合がすべての型の基本とみなしてよいであろう，

service station に客が到着したとき，free な server がいれば直ちに service を受け始めるが，全部の server が塞っていれば queue を作って待たなければならない．そうして誰か service を終る者があれば，列の先頭の者が直ちに service を受け始める．これが先着順，infinite queue の規則 (discipline) である．$M/M/1$ でこの場合を特に simple queue という．

もしも，queue の長さに制限があって，系全体として N 人までしか留れないとする．それ以上並ばなければならないときは（あふれて）立去ることになる．$N=\infty$ のときが infinite queue であり，$N=s$（s は server の数）のときは，実際上行列の出来ない場合であって，電話関係では即時式と呼んでいる．それで，このような制限 N を設けることは simple queue からみるとやはり一種の拡張になっているわけである．

simple queue では service の順番として先着順を仮定したが，この他，last-come, first-service という極端な場合や，順番を指定しない random 順位や，優先権を認める priority のある場合などが考えられている．priority の場合も，優先権の高い者は低い者よりも列の前の方に並んで待つという普通の場合 (head-of-the-line の priority) と，もしも service 中の者が優先権が低ければそれを押のけて service を受ける場合 (pre-emptive の priority) とが考えられている．後者は機械の大故障といったものから考えられたもので，数式の取扱いは，普通の場合よりも容易である．ただこの場合は，途中で service を中止させられた客の service について更に細かな case が生ずる．

一旦 queue に並んでも，あまり長く待たされると帰ってしまうことは日常よく経験する．これを impatient customer というが，いつ立去るかの規則の与え方で，これも細かな case に分れる．途中からでなく，最初からあきらめて並ばずに立去ることもある(balking)．many server のときには，普通行列は1本しか作らないと考えるが，各 server の前に parallel に並んで待つときも実際上よくある．その場合には，新しく来た客はどの列に並ぶかという規則や，途中でも短い列の方に乗り換えてよいかどうかという規則など，いろいろ細かい条件の設定をして model を作る．

このような条件を作ることは，多くの場合，simple queue の拡張になっている．その他，技術的な理由のために，窓口 (server) が塞っているときに到着した客は付加的な遅れを受ける場合〔10〕や，逆に窓口の空いているときに遅れを受ける場合〔11〕なども考えられており，これも1つの拡張である．

以上の場合は，到着やサービスは1人ずつ別々の場合であったが，それを集団的にすることによる拡張が考えられている．到着の方を集団にしたもの（1集団内の人数については別の分布を与える）は，船の積荷の unloading から考えられ，〔12〕の研究が詳しい．service の方を集団にするのは外来患者診療の場合などから考えられ〔13〕，両者とも集団にして統一した論文も最近出た〔14〕．

§2. 主な解き方

前節の終りの方で述べたように諸種の discipline を考えるときは，それに応じて工夫の必要なこともあるが，大体において，先着順，infinite queue の場合と本質的に違いないような解き方で解かれることが多い．つまり型に応じて解法を変えるが，それは分布の型によって強く影響されるといえるであろう．また考察の対象に待ち時間を選ぶか，queue size を選ぶかによっても解法が著しく異ってくる．前にも触れたように queue size (厳密には system 内の人数) に着目するときには，M/M 型でないとマルコフ過程にならないので，分布を E_k, L というように拡張する以外は，Kendall〔15, 4〕による imbedded process の考えによることが多い．$M/G/1$ の場合に，service の終った時点に注目し，その相続く時点において system 内にいる人数に着目すると，この時点間に service を終って立去る人は必ず1人であり，一方 input に M を仮定しているため，この時点間に到着する人数は，それ以前の状態に影響されない．それでこれらの時点における人数はマルコフ連鎖を作り，その推移確率は具体的に表わされ且つ時間に関係しない．こうして抽出されたマルコフ連鎖を imbedded process とよぶが，これに対しては Feller〔16〕に与えられているようなマルコフ過程の理論がそのまま適用出来る．

この方法は $GI/M/s$ の場合にも適用出来る．ただし，この方法によった場合，得られた結果は必ずしも，すべての時点に着目した場合の結果に一致するとは限らない．この点については Finch〔17〕, Takács〔18, 19, 20〕, Morimura〔21〕などが調べている．

ところで待ち時間は本質的にマルコフ的である．つまり，第 n 番目の客の待ち時間は，窓口1つの際には，第 $n-1$ 番目の客の待ち時間と，到着時間間隔及びサービス時間で完全に決定されるのである．第 $n-1$ 番目の客の到着時点後 X_{n-1} たって第 n 番目の客が到着し，第 $n-1$ 番目の客は Y_{n-1} なるサービス時間を受けるとすると，第 n 番目の客の待ち時間 W_n は

$$W_n=\max(0,\ W_{n-1}+Y_n-X_n)$$

で与えられる．この関係に基いて，Lindley〔22〕は，$n\to\infty$ のときの待ち時間の分布は Wiener-Hopf 型の積分方程式を満すことを導き，同時に ergodicity の条件（$n\to\infty$ のとき，行列が無限に長くならないための必要十分条件）は $\rho<1$ であることを示した．ここで ρ はトラフィック密度などと呼ばれるもので，平均サービス時間を，平均到着時間間隔で割ったものである．また Pollaczek〔10〕は，この式から出発して，数多くの結果を，専ら函数論的方法で導いている．窓口が多い場合はずっと厄介で，Kiefr-Wolfowitz〔23〕が上式と同様の考え方で ergodicity の条件を求め，更にモーメントの存在する条件などを考察した〔24〕が，具体的な分布などを求めるために利用されてはいないようである．これは積分方程式が，手がつかない程面倒だからである．

待ち時間に類似の量に着目して，Wiener-Hopf 型よりは取扱い易い微積分方程式を作ることを Takács〔25〕が提唱し，これも現今の中心的方法の1つとなっている．ただし，これには input が M 型（若干拡張はしてある）という仮定が本質的に利いている．

待ち時間は本来到着した人についてだけ考えられるのであるから，任意の時点における系の状態を記述するには不向きである．そこで，サービスを始めてからの経過時間（elapsed time）と行列の系にいる人数とを併せ考えた phase space をとると，任意の時刻における queue の状態は phase space の一点として表現出来る．そして，このような phase space の値をとる process を考えればそれはマルコフ過程である．many server の場合には，server の数だけ elapsed time を表わす座標をとってやればよい．もしも，このような process が簡単に扱えるのならば，いままで述べて来たようないろいろな工夫は意味を持たなくなる．しかし，もちろん，そうはいかないのであって，$M/G/1$ の場合にだけ Keilson-Kooharian〔26〕が Takács のに似た微積分方程式を導いている．

到着時点だけに注目すれば，本質的には待ち時間の間の関係と類似な関係を利用して，queue size の分布を求めることが $GI/G/1$ の場合に試みられた．これは Kawata〔27〕によるもので結果的には Winer-Hopf 型の積分方程式が導かれるが，それを解くのではなく，renewal theory や組合せ論的確率論の諸結果からむしろそれを構成することに特色がある．この方法を使って，待ち時間と queue size の分布の間の関係を論ずることが出来るし〔21〕，他の量についての議論を進めることも出来る〔28〕．

以上，本節で概観した諸方法は，普通の型の queue について発展させられたもので，しかもどちらかというと数学的色彩が濃い．ここではあえて述べなかったが M/M 型のときは微分差分方程式が出来，極限の平衡状態ではそれが一次方程式系に帰着されることもよく知られている．M

型の本質を害わない拡張，つまりE_k型，L型の場合もこれは全く同様である．OR の書物や文献では，分布としてはMを仮定することによって，数式上の取扱いを簡略化し，その代りに複雑な discipline をつけて考える傾向が強い．

なお，本節の内容のもう少し詳しい記述については拙稿〔29〕を参照されたい．

§ 3. 現実問題との gap

queue の問題は前にも触れたように，数学的に見ればかなりせまい topic に過ぎない．それにもかかわらず，これ程多くの研究が行われ，また現在も続けられているというのは，現実問題からの強い要請がその背後にあるためだといえるであろう．queue の問題は，よく知られているように，約50年余り前の電話交換の問題の確率論的取扱いに端を発している．それ以来 Kendall〔15〕の仕事までの約40年間は主として電話交換の問題としてのみ発展して来た．もちろんその間 Хинчин〔30〕，Колмогоров〔31〕，Pollaczek〔32，他〕等の“待ち行列”を model とした数学的研究も若干は行われていたが大勢を占めるには至っていなかったようである．1950年頃から OR の発展に伴い，むしろ電話交換以外の問題を model として queue の理論が開発され，その結果多くのタイプの問題が手がけられ，多くの方法が考えられて現在に至っているのは前節までに見て来たとおりである．ところが，これ程多くの型について精力的な研究が行われていながら，現実の問題に apply して相当程度の成功を収めたという実例は，残念ながらそれ程多くもないようである．それのみならず，実際問題に apply する際，既成の理論では足らずに，致し方なく simulation を行うこともよくある．実務家としては，最初から simulation に訴えようとする傾向も強いように思われる．つまり，現実問題との間にはまだまだ gap が大きいといえるであろう．その原因の大半は，現実の問題が複雑すぎ，特に人為的な control の効果が無視出来ないと考えられることが多い点にあるように思われる．もちろん，人為的な control の要素を組込んだ analysis を数式的に行うことは，多くの場合困難で，simulation によらざるを得ないこともほとんどであろう．しかし“simulation”と簡単にいっても実行にかなりの暇と金を要することを思えば，大雑把なところを理論を用いて見当をつけておくこともまた大切な準備であろうと思う．もし理論的解析で十分現実が表現出来ることが分れば，少々の model 上の違いはあってもかまわないであろう．そういうためにも，いままで開発されて来た理論結果を現実問題に apply するときに生ずる諸問題を解析しておくことは重要である．最近こういった方向の研究が徐々にではあるが行われ出している．本節ではそれについて述べたいと思う．

(i) **time-dependent な問題** queue の議論の大半は steady state についての待ち時間や queue size の分布について行われている．もちろん，その方が簡単だからである．しかし，現実の話は時刻tが有限の範囲ですんでしまい，$t\to\infty$ のときに達成される steady state には到達し得ないと考える方が適切な場合も多いことは否めない．それで time-dependent な問題，つまり有限時刻tにおける分布などを問題にすることが必要になってくる．M/M 型などでは，

(前節では省略したが）周知のように，queue system 内の人数が時刻 t において k 人である確率 $P_k(t)$ が微分差分方程式を満足するから，それを初期条件のもとで解けば，有限時刻における人数の分布は求められる．steady state における分布ならば，微分方程式でなく一次方程式を解けばよいため，簡単にはその方を選ぶわけであるが，微分方程式となると解くことが容易ではない．$M/M/1$ という場合にだけ，多くの研究者により，いろいろな方法で解かれているが，そのような最も簡単な場合ですら，その結果は変形ベッセル函数を項とする無限級数を含む形で与えられ，相当複雑である．（これらの結果と解法の大要は〔33〕参照）したがって現実問題に apply するには数表化もしくは図表化が行われていることが望ましい．しかし，それには厖大な計算を必要とするので，いまのところほとんど手がつけられていない．わずかに平均値について例示的なグラフが与えられている程度である〔34〕．

(ii) **Convergence velocity の問題** 現実問題では，待ち時間や queue size の分布そのものではなく，それらを用いて表現されるような他の量を measure of effectiveness とすることも多いから，そういう場合には更に，time-dependent な結果を使うことの複雑さは倍加し，たとえそれらが図表化されていても解析が困難になることが多いように思われる．それで，とにかく比較的簡単な形をした steady state の結果を用いて議論を進めたくなる．ただ，その結果があまりにも遠くかけはなれたものでも困るから，t がどの程度なら steady state の結果を用いる誤差がどの位かというような点が判っていると具合がよい．しかし，この問題，つまり $t\to\infty$ のときの収束の速さの評価はやはり困難な問題であって，$M/G/1$ の場合に Pollaczek〔10〕が，理論的に収束の速さの order を与えている程度であるが，この場合とても order だけなので，実用化するには定数を評価するというめんどうな問題が残されている．

$M/M/s$ で即時式，つまり server がすべて塞っている時に到着した客は待つことを許されない場合には，そういう事象の起る確率（電話用語でいえば呼損率）が重要な量であり，steady state におけるその値は Erlang の loss formula として古くから知られている〔35〕．Башарин〔36〕ρ_s は，t が十分大きいとき，時刻 t における呼損率の標本値は，Erlang 式のまわりに標準偏差 $\rho_s/\sqrt{t}$ の正規分布をすることを，local limit theorem を用いて導いている．そして計算機を用いての数表を作成した．こういう種類の仕事がいろいろの場合になされていると，すこぶる都合がよいようである．

また，$M/M/s$ で infinite queue の場合に，Davis〔37〕は build-up time という量を導入し，これで convergence の尺度としようとした．まともに convergence velocity を評価するのは前記のように困難なので考えられた方法である．$t=0$ という初期において窓口が空いていたとすると，時刻 t において system の中にいる人数の期待値 $M_1(t)$ は単調増加で $t\to\infty$ のとき $M_1(\infty)$ に収束するから，$M_1(\infty)$ で割って正規化すると分布函数タイプの函数になる．この"分布函数"についての平均値，$T=\int_0^\infty t\,d\,M_1(t)/M_1(\infty)$ を build-up time of the waiting line とよんだのである．もちろん，T が大きいときには $M_1(t)$ の convergence は遅く，小さ

いときには早いと直観的に予想はされる．しかしこの“分布函数”の分散については何も考えていないので，その辺の議論もかなり曖昧である．そして，彼は $M/M/\infty$ のとき（系内の人数の分布は Poisson 分布になる）から予想して，$2T$ 乃至 $3T$ 位のところで，$M(\infty)$ からの喰違いが10%位になるといい，数値例によって，その値が現実の値からするとかなり大きいことを注意している．ところで，この Davis の論文には計算上のミスがあり，もしそれを修正すると結果（T の exact form）は相当めんどうな形になってしまって，折角の実用上の意味が薄くなってしまう．そこで Morimura〔38〕は，$M/G/1$ の場合に Takács 流の仮想された待ち時間 $W(t)$（〔25〕）の平均値に基いて build-up time を考えた．この方は相当簡単な式で表現される．そして $E\{W(t)\}$ の性質を議論することにより，Davis の議論よりは幾分精密な議論の結果，10% の喰違いは $2T$ 位で測ればよいことを示し，Davis の考えを支持した．なお，$W(\infty)$ の変動係数は常に 1 よりも大きいから，平均値を使っていろいろの議論をする際，平均値そのものをかなり粗い尺度と考える方が適切であろう．

(iii) **統計的な問題** 実際問題に apply する際，その基本となる資料の解析が大切であることは queue の問題に限らないが，queue の場合には特に ρ の値の推定が大きな意味を持つ．ρ が 1 に近いような場合には，その推定誤差は結論に対して大きな影響を及ぼす．したがって，このようなパラメータの推定理論は非常に大切であるにも拘らず，現在までのところ，ほとんど開拓されていない分野である．これからは当然，こういう方向の研究が進められるであろうが，いままでのところでは $M/M/1$ の infinite queue に対して Clark〔39〕が ρ の最尤推定値を求めた研究があるだけのようである．なお，Fortet が国際電話の会議で報告した paper の中にもこの関係のものがあるらしい（筆者未見）．Clark は，ρ の最尤推定値は，次の 2 次方程式の $0<\rho<1$ なる実根で与えられることを示している．

$$(m-\nu-1)T\rho^2-[(m-\nu)T+(n+\nu+1)\tau]\rho+(n+\nu)\tau=0$$

ここで，τ はあらかじめ定められた，窓口の塞っている延時間であって，窓口の塞っている時間がこの τ に達したら観測を止めるという方式をとっている．そしてその観測期間中にサービスを受け終って立去った人数を m，その最後の m 番目の客の立去った時刻を T，その T までに到着した客の人数を n とおいている．ν は観測をはじめたときに系の中にいる人数である．彼は，更に $m-\nu$，$n+\nu$ が大きいときの ρ の近似式 ρ_1 が $\rho_1=(n+\nu)\tau/(m-\nu)T$ で与えられることを示し，ρ と ρ_1 との誤差の限界も $0<\rho_1-\rho<2\rho_1/(1-\rho_1)(m-\nu)$ として与えている．したがって，かなり安心して ρ_1 を使うことが出来るわけである．ここで興味あることは，ρ の最尤推定量がその近似式 ρ_1 についてすら，直観的に考えられがちな ρ の推定量つまり窓口の塞っている割合（近似的に τ/T）とは若干喰違っており，特に初期条件が本質的に利いている点である．

(iv) **discipline などの変化による影響** 正直に model を作ろうとすると実際に直面する問題は既成の model に合わず，既知の結果が利用出来ないことはむしろ頻繁に起るであろう．しかし，上述のように，平均待ち時間などがかなり“待ち時間”の代表と考えるには粗い尺度なの

であるから，少し位 model が違い，したがって結果に喰違いがあっても，大した影響はないかもしれない．そういう意味で，discipline などに若干の変化があったとき，それが結果にどう響くかを調べておくことは応用上意味を持つと思われる．こういう方向の研究が最近現われ出したようで，今後もいろいろの研究が進められるであろう．たとえば，Gumbel〔40〕は $M/M/s$ で server 毎に能力の違う場合を論じた．ちょうど分散に当るようなサービス速度のバラツキを表現する量に対して，待ち時間などがどう変るかを図表化している．結論的には，多くの普通の case では，すべての server の能力が同じと考えた場合と大差はないことが確認されたわけで，実用上の功績は大きいと思われる．

また，Wishart〔41〕，Riordan〔42〕などは，last-come first-service などという極端な discipline の場合を論じたが，これはこういう極端な case を調べることにより，先着順との喰違いを評価しようとする考えからである．

(v)　**数表と図表**　queue の理論を実用するには，数表や図表が重要であることは論を俟たないところであろうが，現在のところ十分多いとはいい兼ねる．現存のものには，歴史的な carrier のせいもあってか電話関係のものが多い．そしてその関係上，大部分は Poisson input である．これらについては雁部〔41〕に詳しくまとめられている．

機械修理の問題などでは，input の population が有限のことが多い．こういう場合に使う数表としてはかなり大部のものが，アメリカ OR 学会から出版されている〔42〕．

$M/M/s$ 以外のタイプのものについては，結果の式が複雑なだけに，余計数表化が望まれながら厖大な数表になるし，ある場合には数表化しやすい形の式が得られていなかったりで，なかなか実現していない．$E_l/M/1$, $M/D/1$, $E_l/M/s$, $D/M/s$, $E_l/E_k/1$ などの各タイプについて，系の中の人数の分布，mean queue size，待ち時間の分布などが最近数表化された〔43〕．この数表を作成するためには，相当複雑な理論計算がその前提として行われる必要があり，Kawamura〔44〕によって実行された．

以上の数表やこれに類したものの図表については，大前〔45〕が使い方を例示している．

また，前項とも若干関連するが，$M/M/1$ の場合を標準として，サービス分布が Erlang 分布，超指数分布のときの queue size の期待値の比を図表化したものがある〔46〕．これは上述の分布などの図表とはいささか趣きが異っているが，実用上の便利さを狙ったものでありこれより一層有用な図表が，このような方向についても作られて行くことであろう．

(vi)　**極限分布のすその近似**　平衡状態における待ち時間や queue size の分布でも，分布が一般な場合にはかなり厄介であるので，Saunders〔47〕は，single server について，この分布のすその方の近似を求めた．待ち時間については，非常に多く待たされる割合がサービス基準として重要なのであるから，このすその方の様子と平均値が分れば，応用上はかなりな information が得られたことになるであろう．したがってこういう研究も応用上の見地からみれば有用なものと思われる．

以上，いくつかの項目にわたって，現実問題と理論との間の gap をうめようとする理論的研究の方向とその既知の結果について述べて来た．しかし，前にも述べたように，こういった理論解析だけで現実問題が cover 出来るとはもちろん考えられない．そこに simulation が有効な武器として登場して来る．それで，次に simulation または Monte Carlo 法について節を改めて触れることにしたい．

§4. Simulation または Monte Carlo 法

simulation または Monte Corlo 法に訴える際，大別して2つの行き方があるように思える．その1つは通常の考え方で，始めから実際問題を simulate する model を作り，主として計算機上でを行うやり方である．もう1つはいきなり simulation に訴えないで，出来るだけ分解した形で model を考え，部分的に simulation を行い，別の部分には理論結果を適用するなどして分析を進めて行くやり方である．

後者の行き方の一例としては Lee-Longton による研究〔48〕がある．$M/G/1$ の場合には steady state における平均待ち時間に対して，Pollaczek-Khinchine-Kendall の公式とよばれる簡明な式があるが，$M/G/s$ とするとそういううまい公式は知られていない．そこで single channel の場合からの類推により，類似の公式を $M/M/s$ のときの平均待ち時間（既知）を使って表現することを試みた．しかし，それを理論的に証明することは困難であるため，彼等は Monte Carlo 法により，（いくつかの phase の Erlang 分布について）この公式の成立つことを，実験的に確めたわけである．そこには，物理や化学でよく使われている実験式の考え方があるように思われる．OR も一種の実験科学である以上，こういった行き方は，当然とられてしかるべきものと思われる．

さて，前者の行き方をとる場合には，他の問題の simulation でも同じことであるが，かなり大型の電子計算機でも，乱数の発生が大きな障害となるであろう．そこで，乱数の発生だけは別の装置で行えば simulation がかなり容易に行われるであろう．そういった考えで，特に queue の専用 simulator が作られる意義がある．電電公社の通信研究所における擬似トラフィック装置もこの一種で，専ら Poisson process を発生するように作られている．

最近，工大で日本電気と協力して queue の専用 simulator を作成した．これは，さきの秋季研究発表会で発表し，順次会誌にも発表する予定でいるので，ここでは詳しく述べないが，乱数発生はサイラトロンにより，2 進の一様乱数をまず発生させ，それを任意の分布に変換し，更にその乱数を時間的なものに変換するという点に特徴がある．乱数発生装置の着想は，佐藤〔49〕による．

§5. 統 一 と 拡 張

最後に，主として理論的な面での最近の傾向について触れておきたい．

queue の理論での残された大問題は many server の場合の M/M 型以外の解法である．しかし，これはそう簡単に片付くものとも思われない．

その他の問題で，最近やや目立った傾向として感じられ，これからの主な動きになろうと思われるものは，各種の型を統一し，拡張して行くという行き方である．はじめにも述べたように，queue の理論は一応の整理期にはいったと思われるが，そういうとき当然行われるべき仕事の1つは，既知の結果を整理するために，統一した方法でいくつかの結果を導いてみせることであろう．そして，それは大ていの場合，新しく拡張された面をも含む．

具体的な例を2，3挙げると，平衡状態における queue size と待ち時間の，それぞれの期待値の間に非常に単純な関係（一方が他方の定数倍）が，いくつかの special case について成立つことが知られていたが，Little〔50〕は，この関係式が $GI/G/s$ でしかも discipline に関係せず成立することを示した．また Коваленко〔51〕は，simple queue, impatient customer（普通の場合と，系の中で過す全時間が制限以上になったときは立去る場合の2つ）を special case として含み，更にそれらの mixed type も含むような形の model を考えている．

また，現在のところ研究はされていないようであるが，control の効果を含むような model が作られると，queue だけでなく inventory の問題なども統一して論じられるであろう．

参　考　文　献

[1] Saaty, T, L, Resumé of useful formulas in queueing theory, Oper. Res. vol. 5 (1957) 161-200; Mathematical method of Operations Research, McGraw Hill, 1959 に再録．山内二郎監訳「オペレーションズ・リサーチの数学的方法」下巻，紀伊國屋書店（現代経営科学全集）

[2] 宮脇一男，長岡崇雄，毛利悦造「待合せ理論とその応用」日刊工業新聞社，1961.

[3] Doig, A. A bibliography on the theory of queues, Biometrika, vol. 44, (1957), 490～514.

[4] Kendall, D.G., Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by means of the imbedded Markov chain, Ann, Math. Stat. vol. 24 (1953), 338–354.

[5] ヒンチン，森村英典訳「待ち合わせ理論入門」広川書店，1960.

[6] Morse, P.M., Queues, inventories and maintenance, J. Wiley, 1958.

[7] Gaver, D.P. The influence of servicing times in queuing processes, Oper. Res vol. 2 (1954), 139–149.

[8] Luchack, G, The solution of the single channel queuing equation characterized by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a class of holding time, Oper. Res, vol, 4. (1956), 711–732

[9] Luchack, G, The distribution of the time requires to reduce to some pre-assigned level a single channel queue characterized by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times, Oper. Res. vol. 5 (1957) 205–209.

[10] Pollaczek, F., Problèmes stochastiques posés par le phonomène de formation d'une queue d'attente a un guichet et par des phénomènes apparentés. Mémorial des science mathematiques, CXXXVI, Gauthés-Villases, 1957.

[11] Finch, P. D, A probability limit theorem which application to a generalisation of queuing theory, Acta Math. Sci. Acad. Hung., vol. 10, (1959) –.

[12] Gaver, D.P., Imbedded Markov chain analysis of a waitig-line process in continuous time, Ann. Math. Stat., vol. 30 (1959) 698–720.

[13] Bailey, N. T. J., On queuing processes with bulk service, J. Roy. Stat. Soc. Ser. B, vol. 16(1954) 80–87.

[14] Miller, R. G. Jr., A contribution to the theory of bulk queues, J. Roy. Stat. Soc., Ser B, vol. 21 (1959), 320–337.

[15] Kendall, D. G., Some problem in the theory of queues, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, vol. 13 (1951), 151–185.

[16] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, J. Wiley; 河田龍夫監訳「確率論とその応用」下巻，紀伊國屋書店（現代経営科学全集）.

[17] Finch, P. D., On the distribution of queue size in queueing problems, Acta Math. Acad. Sci, Hung., vol. 10 (1959), 327–336.

[18] Takács, L., On a stochastic problem concerning some waiting line problems, Теория Вер. и ее При Том, 2 (1957), 92–105.

[19] Takács, L. On a coincidence problem concerning telephone traffic, Acta Math. Acad. Sci. Hun., vol. 9 (1958), 45–81.

[20] Takács, L. On the generalization of Erlang's formula, Acta Math. Acad. Sci. Hung., vol. 7 (1956), 419–433.

[21] Morimura, H,. On the relation between the distributions of the queue size and the waiting time, to appear in the Kodai Math. Sem. Rep. (1962).

[22] Lindley, D. W., The theory of queues with a single server, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 48 (1952), 277–289.

[23] Kiefer, J. and Wolfowitz, J., On the theory of queus with many servers, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 78 (1955), 1–18.

[24] Kiefer, J. and Wolfowitz, J., On the characteristics of the general queuing process with applications to random walk, Ann. Math. Stat., Vol. 27 (1956). 147–161.

[25] Takács, L., Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, Acta Math. Acad. Sci. Hung., vol. 6 (1955), 101–129.

[26] Keilson, J. and Kooharian, A., On time dependent queuing processes, Ann. Math. Stat., vol. 31 (1960), 104–112.

[27] Kawata, T., On the imbedded queuing processes of general type, Bull. de I. S. I., Tom 38, 3e Liv. (1961), 445–455.

[28] Morimura, H., On the number of served customers in a busy period, J. Oper. Res. Japan, vol. 4 (1961), No 2

[29] 森村英典，queuing theory について，日本数学会昭和36年度秋季綜合分科会統計数学分科会講演予稿集（特別講演，シムポジウム講演），1–50.

[30] Хинчин, А. Я., Математическая теория стационай очереди, Мат. Сборн. (1932), 73–84.

[31] Колмогоров, А. Н., 'Sur le probleme d'attente, Мат. Сборн., (1931) 101–106.

[32] Pollaczek, F. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie, Math. Z., Bd. 32(1930), 64, 729.

[33] 河田龍夫「有限時刻における待ち行列の分布」数理科学綜合研究班報告，第6班第4号，1960.

[34] Bailey, N. T. J., Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, vol. 19 (1957), 326–333.

[35] Brockmyer, E, Halstrom, H. L. and Jensen, A., The life and works of A. K. Erlang, Copenhagen Telephone Co., 1948.

[36] Бащарин, Г. П., О предельном распределении времени занятности полно остугного пучка линий, Теор. Вер. и Прим., Том. 5 (1960), 246-252.

[37] Davis, H. The build up time of waiting lines, Naval Res. Log. Quat., vol, 7 (1960), 185-193.

[38] Morimura, H., The build up time of equilibrium waiting time, J. Oper. Res. Soc. Japan., vol. 4, No.2 (1961).

[39] Clark, A. B., Maximum liklihood estimates in a simple queue, Ann. Math. Stat., vol. 28 (1 957), 1036-1040.

[40] Gumbel, H., Waiting lines with hetero-geneous servers, Oper. Res., vol 8 (1960), 504-511.

[41] 雁部穎一「待合せ理論の数表, 図表について」数理科学綜合研究班報告, 第6班第1号. 1960

[42] Peck, L. G. and Hazelwood, R. N., Finite queuing tables, J. Wiley, 1958.

[43] 河村知男, 館甚吉, 島田正三, 氏家一彬「待合せ理論の数表」(その1～その5) 数理科学綜合研究班報告, 第6班, 第5号, 第8号, 第12号, 第13号, 第15号. 1960～1901.

[44] Kawamura, T., Equilibrium behaviors of certain queuing systems and numerical tables, J. of General Culture, Keio Univ. No. 8 and 9 (1961).

[45] 大前義次「待ち行列の数表, 図表の使い方」数理科学綜合研究班報告, 第6班 第17号. 1961

[46] Healy, T. L., Queues with exponential-type service-time distributious, Oper. Res., vol. 8, (1960).

[47] Saunders, L. R., Probability functions for waiting times in single-channel queues with empahasis on simple approximations, Oper. Res., vol. 9 (1961) 351-362.

[48] Lee, A. M. and Longton, P. A. ,Queuing processes associated with airline passenger check-in, Oper. Res. Quart., vol. 10 (1959), 56-71.

[49] 佐藤拓宋「乱数電圧法による積分演算器」自動制御, 第6巻 (1959), 310-313, その他.

[50] Litte, J. D. C. A proof of the queuing formula ; L=λW, Oper. Res., vol. 9(1961), 383-387.

[51] Коваленко, И. Н., 'Некоторые задачи массового обслуживания с ограничен, Теор. Вер. и При м., Том. 6 (1961), 222-228.