書　評

POLLACZEK, FÉLIX : PROBLÈMES STOCHSTIQUES POSÉS PAR LE PHÉNOMÈNE DE FORMATION D'UNE QUEUE D'ATTENTE A UN GUICHET ET PAR DES PHÉNOMÈ NES APPARENTÉS. GAUTHIERVILLARS, PARIS. *1957, 123 p.*

本書は有名な叢書 Mémorial des Sciences Mathématiques の 136 号として出版されたものである．Queue の研究にはいくつかの異った方法が使われており，それぞれの目的に応じて，それらの方法がそれぞれ何人かの研究者によって発展させられて来ているが，本書の著者 Pollaczek の用いる函数論的方法はほとんど他の人によっては用いられず専らこの著者 1 人によって発展させられて来た特異な方法である．queue の歴史は電話の traffic の研究における Erlang (1909, 1917) に始ることはよく知られているが，その次に位置する研究者は，この Pollaczek (1930) であろう．その後現在まで約 30 年間彼はほとんど 1 つの題目 (queue) を 1 つの方法で研究しつづけている．本書はそれらの仕事の集大成と考えられよう．それだけに，本書の内容は研究書としてみても，きわめて高い水準にある．待ち時間の分布のラプラス変換をとって，その性質を複素変数の函数として詳しく調べ，逆変換によって分布を求めるという方法で一貫している．その方法から来る制約上，queuing descipine の変ったものや，複数チャンネルのものは沢山は考えられていないが，反面，この方法で取扱えそうな問題はほとんど完全に研究されつくされているといっても過言ではないように思われる．以下章を追って紹介するが，基本的には逆変換の形で求まったものは解けたと考えているので，現実に必要な特殊な分布についての具体的な結果がすべて求っていたり，またすぐに計算されるわけではない．その点を一言注意しておく．

第 1 章　**Répartition des délais d'attente dans l'hypothése d'une répartition poissonnienne des instants d'arriveé.**

Poisson 到着，サービス分布は一般，先着順，窓口 1 個の場合で，基本的な研究の方法を述べる．この書物の基礎となる部分である．queue の問題で難かしい，本質的な点は，待ち時間などの確率変数が負の値をとらないところにある．この事情を表現するために $\max(0, a)=a^+$ という記号や，更に確率を積分で表現するために，Heaviside の導入した．

$$s(x)=1(x>0) \qquad =0(x<0),\ s(0)=1/2$$

なる函数を用いる．そうすると $n+1$ 番目に到着した人の待ち時間 τ_{n+1} について

$$P(\tau_{n+1}<t)=Es(t-\tau_{n+1})$$

とかけるが，$s(x)$ は $x\neq 0$ ならば

$$s(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c e^{xz}\frac{dz}{z}$$

とかけるから，$P(\tau_{n+1}<t)$ も $\frac{1}{2\pi_i}\int_c\cdots\cdots$ という形で表現される．ここでは c 原点のところだけ左側に除けて虚軸上を通る複素平面上の積分路を示す．この積分の中には $E(e^{-q\tau_{n+1}})$ というようなラプラス変換 (母函数) が再帰関係として含まれているので，その解析を通して $P(\tau_{n+1}<t)$ などが求められるわけである．そのために $\Phi(q, z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n Ee^{-q\tau_n}$ の形の母函数が多く用いられている．

第 2 章　**Application des formules du chapitre 1.** 第 1 章の結果を用いて，平衡状態における待ち時間の分布や，具体的なサービス時間分布についての結果を示す．第 1 章でも論じていることだが平衡状態の確率への収束の速度について論じていることが印象的である．

第 3 章　**Répartition bernoullienne des instants d'arrivée.** (0, T) なる線分内に N 個の点を入れて線分を次々に分けていくとき Δx の長さの線分の出来る確率は $\Delta x/T$ であるようにする．

つまり $X_0,\cdots\cdots,X_{N-1}$ をその N 個の点の座標を表すとき $0\leq X_0\leq X_1\leq\cdots\cdots\leq X_{N-1}\leq T$ となっている確率変数列が，$0\leq x_0\leq\cdots\cdots\leq x_{N-1}\leq T$ なる条件をみたす実数列に対し

$$P(x_i\leq X_i\leq x_i+dx_i|0\leq x_0\leq\cdots\cdots\leq x_{N-1}\leq T)$$
$$=\frac{N!}{T^N}dx_0\cdots\cdots dx_{N-1} \qquad i=0,\cdots\cdots,N-1$$

なる確率法則をみたすときは，$X_0,\cdots\cdots,X_{N-1}$ はベルヌーイ分布に従うといい，到着時点がベルヌーイ分布で表わされる場合に第 1 章で論じた問題を取扱う．

第 4 章　**L'hypothèse du dèlai Supplémentaire virtuel.** 技術的な理由で，待ち行列が出来ていることによってある種の遅れが生じ，それが待ち時間

に加算されることがある．n 番目の客の到着時点において窓口が塞っているときには余分な待ち時間 Θ_{n-1} が加算されるという点以外は第1章の仮定を保存し，Θ_n の分布は一般な形で取扱う．これは第1章の一般化になっている．

第5章 Délais d'attente quantifiés. 時間の単位を適当に測った上で，待ち時間が整数値しかとらないような場合を考える．第4章で扱った形と同様付加的な遅れ Θ も考慮する．(Θ は有限個の整数値しかとらないとする)

第6章 Construction de fonction de répartition a plusieurs variales.

待ち時間を表わす確率変数列 $\tau_0, \tau_1, \cdots\cdots, \tau_n, \cdots\cdots$ は独立ではない．この dependence を研究するために2変数の分布函数 $P(\tau_{n_1}<t, \tau_{n+n_1}<t_1)$ を考える．この同時分布も今までと全く同様の方法で取扱えることを示し，n が大きいときは漸近的独立であることを導いている．(その漸近速度も求めている)

第7章 Répartition non-poissonnienne des instants d'arrivée(《general input》).

いままでは到着間隔の分布を具体的に指定したが，ここでは一般の分布として扱う．第1章で紹介した $\Phi(q, z)$ について積分方程式を作り，それを解くことによって議論を進める．待ち時間の分布やモーメントを具体的な分布について例として導いている．この中には他の方法では求めにくいものもある．

第8章 Répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet いままでの章は待ち時間が中心であったが，ここでは busy period について考える．到着分布については若干の解析的条件をおくが，どちらも一般の場合について議論する．しかし具体的な結果を求めるには簡単な方法ではない．たとえば Poisson 到着のときには Takács が指数サービスや，Earlang サービスのときには Conolley が特殊な方法を用いているが，その方がより簡単ではある．また窓口の空いている確率が，$1-\rho$(ρ は平均サービス時間を平均到着時間間隔で割ったもの)であることも示しているが，これは Finch の結果よりも古い．

第9章 Problèmes stochastiques concernant des《guichets》sans possibilité d'attente

電話交換の言葉でいえば即時式の複数チャンネルを扱う．到着及びサービス時間はともに一般で，呼損率を求めている(逆変換の形で)．

以上述べたごとく，分布に関してはかなりゆるい条件で，広汎な問題を単一の方法で考察したものであり，OR 的な Morse の著書，初等数学的なヒンチンの著書と並べてみると，その方法，程度，題材どの面からみても，それぞれ全く異ったタイプの queue の本だと云えるであろう．なお蛇足ながらつけ加えると，最近 D. R. Cox と W. L. Smith の共著による queue の本の新刊が予告されているが，この顔ぶれからみると，本書とはまた違ったタイプの専門書(数学的な)が生れるのではないかと期待される．　(森村英典)

▶ニュース◀

本学会ではさる3月の理事会において，今年度開かれる国際経営科学協会(TIMS)に，理事松田武彦君(東京工大)を，また第 33 回国際統計会議(ISI)に，理事藤森謙一君(日本道路公団)を本学会代表として派遣すべく国費支給方を日本学術会議に申請することとした．4月末，日本学術会議より松田君に対して国費(必要経費の約 1/3)の支給が認められ，藤森君に対しては私費渡航の形で外貨の枠が与えられることになった．藤森君が一身上の都合で辞退されたので，5月の理事会において，前理事横山勝義君(日本国有鉄道)を代理として ISI に派遣することを決定，直ちに日本国有鉄道十河総裁に欧洲出張を依頼し，幸い承認されたので同君は8月 26 日夜出発した．

○第 33 回国際統計会議(ISI)開く

既報のように8月 29 日から9月7日までパリで開かれたが，日本からの出席者は下記のとおり．〔順不同〕森田優三(ISI 副会長: 一橋大)，中山伊知郎(一橋大)，北川敏男(九大)，増山元三郎(東大)，小田原登志郎(総理府統計局長)，後藤正夫(行政管理庁統計基準局長)，佐倉致(経済企画庁)，横山勝義(国鉄)，山田良太郎(東京都統計部長)，本間光広(電通)．