文献抄録

MAHALANOBIS, P. C.: INDUSTRIALIZATION OF UNDERDEVELOPED COUNTRIES—A MEANS TO PIECE., *Sankhya, Vol. 22, Parts* 1 & 2, *Jan. 1960, pp. 173～182*

この論文は1958年9月の第3回 Pugwash 会議で述べられたもので，1959年1月の Bulletin of the Atomic Scientists, Vol. XV, No. 1 に掲載されたものを再録したのである．はっきり項目を挙げてないが 12 章よりなっている．

まずはじめに世界の人口と所得をブロック別に述べている．1956 年の世界総人口は26～27億，総所得は1兆億米ドルを推定されている．このうち米・加・濠を含めた西欧諸国には4億の人口で約 5500 億ドル，1300 ドル/年-人の高度な生活水準を保っている．ソ連・東欧に3億，中国に6億の計9億が約 3000 億ドルの所得で 330 ドル/年-人の生活水準で目下急速に生活水準が向上している．残余の 13 億の人々はいわゆる低開発国であるが 1900 億ドルの所得で150 ドル/年-人以下の生活水準に過ぎない．日本・トルコを除き中国を含めたアジア・アフリカ諸国をみると人口は15.5億であるが所得は1100億ドルでわずかに 75 ドル/年-人にしかならない．低開発国には天然資源があるが西欧の高度工業国がおさえてをり，ソ連圏は別にこの資源に依存する必要はないが戦略および経済上の立場からこれを弱めようとしている．つまり低開発国が開発されない限り世界の緊張がとけないという書出しで始まっている．

過去200年の科学・工業上の革命は殆どすべて西欧諸国により行われた．その結果軍事上，経済上に優越性を占め，今日多くの低開発国が政治的に独立したが経済的に独立するまでに至ってない．またある近代経済学の一派では農業の分業化を説くが，農業だけでは生活水準の向上にならないことは米国農業が典型的な例ではないかと反論している．国連その他の生活水準向上のための技術援助計画等いろいろあるが過去 12 年間有効でなく，高度工業諸国と低開発国の貧富の差は増大したという．

低開発国の特長は生活水準が低いだけでなく収入の分布が著しく偏よっていること．少数のグループが富・収入・政治上・経済上の影響を独占している．外国はこれらわずかの人々に圧力をかけたり依存するので，外国と低開発国の関係が根本的に不安定であると説いている．

ソ連その他の社会主義国の出現により情勢が変化した．西欧の技術的・軍事的独占が破れた．工業化を急速に進める唯一の方法が経済計画であることが認識された．開発が進むにつれてその国の天然資源が開発されるようになり，工業化が進むと他の国々との通商および経済関係が対等になる．また開発が進むと多くの人々が経済上・政治上の決定に加わるため政情が安定する．

1950 年 11 月 20 日の国連総会で“低開発国を急速に工業化することが，生産活動の水準を向上し，全体として世界経済を発展させ，国際間の平和と安全を保障する根本であることを認識する”またこの目的のため“国際基金の流通を増加する必要があることを認識する”決議が通過し，1951 年に専門委員会が設けられた．この委員会の見積りによると，低開発国(中国も含む)の 15 億の人々が，人口増加も含め年2%の収入増加をもたらすため年間約 140 億米ドル(約9.3 ドル/人)がいるとした．また 1957 年 P. M. S. Plackett が推定したところでは 8～10 年で10億の人々に対し年間28億米ドル(約 2.8 ドル/人)とみた．

こういう問題に対して役立つ経済開発理論がまだないので，経済開発問題を取扱う一般的な考え方を形成するため真剣に組織的に研究を始めるよう，また低開発国を援助するための実行計画の定式化がいると述べている．

上記2つの推定は1人当りであるが，低開発国でも大国と小国とは異ること．大国としてインドと中国を挙げているが，特に中国は約6億の人口に対して，1953～1957 年の第1次5年計画の間にソ連から約 12.5 億米ドルの借かん(約40 セント/年-人)で工業化を自立するに充分だったと述べている．

海外貿易の依存度は大国では少く(対国民所得で米国が約 5～6%，ソ連が約 2.5%)小国ほど大きいことを述べ，小国間では特別の対策，例えば共同市場の設置等を提案し，1955 年4月のバンドン会議のときの論文(附録)で初めてこれにふれたと述べている．

低開発国が自立するまで 15～20～25 年という長

期計画がいること，これには農業開発の大ざっぱな計画と，優先順位がついた近代工業の建設・教育・保健・科学研究も含んでいる．

先進国の専門家の指導の下に低開発国の職員がこういう計画が立てられるよう，また調査計画にも優先順位が附されてなければならないこと，らせん型に改訂されてゆくべきことが述べられている．既に低開発国の中でもインド，パキスタン，ビルマ，セイロン，インドネシア，アラブ連合では経済開発に対する計画を立て始めている．

低開発国が開発されることが直ちに先進国の生活水準低下にならない．むしろ逆に世界のすべての国国の資源が開発されるので，各国の生活水準を保護するといった相反する利害が調整される．

現在まで西欧諸国に名目はとも角実質的に低開発国をおさえて来た．開発援助の100倍もの金を軍事援助に使っている．ソ連はじめ東欧諸国はそのマルクシズム立場から紐つきでない援助を与え大きな刺戟となっている．いずれにせよ低開発国の工業化は必須であり，単なる軍縮や核兵器禁止だけでなく両ブロックが共同して低開発国を援助することにより世界の平和がもたらされると結んでいる．

中進国としての日本が今後どん歩んでゆくべきかのあり方がこの論文の中にもうかがはれると思うので，いささか狭義のORからは外れるが紹介することにした． (矢部 真)

KANTOROVOH, L, V.: MATHEMATICAL METHODS OF ORGANIZING AND PLANNING PRODUCTION.

Manag. Scie. ***6*** *no 4. 1960*

これは 1939 年にソ連で発表されたもの英訳で，Koopmans の序文がついている．

経済建設計画における LP やその他の手法の利用については，最近ソ連や東欧諸国で活潑に論ぜられ，「経済分析における数学の応用」(「マルクス経済学の数学的方法」という題で二巻に邦訳されて出版されているというような本も出されているが，この論文はこの分野における先駆的な業績であり，アメリカにおける Dantzig の研究などにも先立つこと数年である．しかしその後この方面の研究はソ連においてはあまり進められることがなく，第2次大戦後もっぱらアメリカを中心として研究が進められ，それが近年「雪どけ」とともにソ連やあるいはポーランド等に逆に輸入されるような形になっていることは，理論の開発と政治的社会的情勢との間の微妙な関係を示唆するもので興味深いものがあろう．

さてこの論文の内容について，扱われているのはLP の特殊問題に属するものである．例として次のような問題を考える．

n 個の機械で，m 個の部分からなる製品を作るとする．i 番の機械で，k 番の部品を作ると $\alpha_{i,k}$ だけ生産することができるとする．そのときなるべく多くの製品を作るにはどのようにすればよいか．

i 番の機械を全体のうち $h_{i,k}$ 時間だけ k 番の部品を作るのに用いるとする．そうすると，

1) $h_{i,k} \geqq 0 \quad (i,\ k)$

2) $\sum_k h_{i,k} = 1 \quad (i)$

すべての部品は同じ個数だけなければならないから $Z_k = \sum_i \alpha_{i,k} h_{i,k}$ とおくと

3) $Z = Z_1 = Z_2 = \cdots\cdots = Z_k$

このような条件の下で，Z を最大にすることが問題となる．

この問題を解くために Kantorovoch の提唱する方法は次の通りである．

m 個の部品に対応して適当に個の定数 $\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_m$ (これを resolving multipliers と呼ぶ)を定める．各 i ごとに，$\lambda_1\alpha_{i,1}\lambda_2\alpha_{i,2}\cdots\cdots\lambda_m\alpha_{i,m}$ と計算して，$\lambda_k\alpha_{i,k} = \max_j \lambda_j\alpha_j$ となる k 以外についてはすべて $h_{i,k}=0$ とする．もしこのようにした上で $\sum_k h_{i,k}=1$，$Z_1 = Z_2 = \cdots\cdots Z_m$ となるようにすることができるならば，この $h_{i,k}$ が求める解になる．従って resolving multipliers の値を適当に定めることができれば問題は解決することになる．それには最初 λ_1 λ_m に適当な値を与えた後，$Z_1Z_2\cdots\cdots Z_m$ の値が互いに等しくなるようにくり返えし計算を行っていけばよい．

このような $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_m$ の存在，および解が確かに最適であることの証明は本文中に与えられているが，次にこれが実は LP の双対理論の一変形にすぎないことを示しておこう．

上記の 3) を書きかえて，

$Z - \sum \alpha_{i,k} h_{i,k} = 0$

かつ $\quad Z = \max$

とすると，2)，3)の条件に対応する双対変数を $\mu_1 \cdots \mu_2,\ \lambda_1 \cdots \lambda_m$ とすると，双対問題は，

1)′ $\mu_i - \alpha_{i,k}\lambda_k \geqq 0 \quad i,\ k$

2)′ $\sum \lambda_i \geqq 1$

の条件の下で $\sum \mu_i = \min$ となる．

この解は明らかに $\mu_i = \max_k \alpha_{i,k}\lambda_k$ であるから，$\mu_i = \alpha_{i,k}\lambda_k$ となるときに限り $h_{i\,k} \neq 0$ であることが

わかる.

この論文では更に問題を一般化して, 1), 2)の条件の下で $Z_k=\sum_{i,l}\sum\gamma_{i,k,l}h_{i,l}$ とし, $Z=Z_1=\cdots\cdots Z_k$ を最大にする問題も同じような方法で扱われている.(これは実は一般の LP の問題と同等である)またこのような定式化が有効と思われる多くの実際的な場合が論ぜられ, このような方法が有用であることが主張されている. (竹内 啓)

GOMORY, RALPH. E.: OUTLINE OF AN ALGORITHM FOR INTEGER SOLUTIONS TO LINEAR PROGRAMS. *Bulletin of Amer. Math. Soc. vol. 44. No 5. 1958. pp. 275~278*

次に紹介する論文の中, 手順に関する部分の要約である. 変数 $x_1, x_2\cdots x_m, t_1\cdots, t_n$(slack を含めて)と目的函$w$とがすべて整数との条件をつけて LP (linear programming)の問題を解く方法は未解決の問題であったが, ここで次のようにして解法が与えられる. まず整数条件を無視して通常の LP の問題として simplex method で解いた結果(basic form)を

$$(1)\quad \begin{cases} w=a_{00}-\sum_{j=1}^{n}a_{0j}t_j \\ x_i=a_{i0}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j \qquad i=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

とすると $a_{i0}(i=1,2\cdots m)$, $a_{0j}(j=1,2\cdots n)$ はすべて $\geqq 0$ となる. ここで a_{00}, a_{i0} が全部整数であれば最適解は $x_i=a_{i0}$, $w=a_{00}$ で問題はない.

そこで a_{i0} の中に一つでも整数でないものがあったとして, それを a_{i0} とする. そのとき a_{i0}, a_{ij} を各々整数部分と小数部分に分解して

$$(2)\quad \begin{cases} a_{ij}=n_{ij}+f_{ij} \qquad j=0,1,2\cdots n \\ n_{ij}:\ \text{整数} \\ 0\leqq f_{ij}<1, \qquad 0<f_{i0}<1 \end{cases}$$

とおき,

$$(3)\quad s_1=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}t_j-f_{i0}$$

を考えると feasible な整数解に対しては

$$(4)\quad s_1\leqq -f_{i0}>-1$$

また $s_1\geqq\sum(a_{ij}-n_{ij})t_j-(a_{i0}-n_{i0})$

$$=n_{i0}-\sum n_{ij}t_j-\{a_{i0}-\sum a_{ij}t_j\}$$

$$(5)\qquad =n_{i0}-\sum n_{ij}t_j-x_i=\text{整数}$$

だから s_1 は0または正の整数となり, 条件式

$$(6)\quad s_1=\sum f_{ij}t_j-f_{i0}\geqq 0$$

が成立する. (1)で得られた解は(6)を満足しないから, 条件式(6)を加えて双対法で計算すると別の解が得られる. その解がなお整数解でないときは今と同じ事を反覆する. その結果, 途中の段階では取扱う行の数が $m+1$ より大きくなるが, s_1 等の変数(これは(6)の条件式の slack になる)が正になって basis に入って来たらすぐその行を除いてしまう事にすれば, 行の数は $m+n+2$ を超えないで済む.

この手順によって有限回で最適整数解に達するか, または整数解のない事が判明するのであるが, その事の証明やより数学的な議論は次の論文に委ねられている.

この手順を小型の計算機 E 101 にプログラムして小規模の問題(7変数まで)について完全に自働的に解を得る事に成功している. (渡辺 浩)

GOMORY, RALPH. E.: AN ALGORITHM FOR INTEGER SOLUTIONS TO LINEAR PROGRAMS. *Princeton-IBM Math. Res. Project. Techn. Rep. No. 1. (mimeographed) Nov. 1958*

前掲の論文に紹介された手順についての詳細な理論と証明を与えている. 内容の区分は1~10の中, 1は前おき, 2~4 は非整数解を cut-off するためにつけ加えるべ条件式の集合の代数的な構造の研究, 5は計算上有利な条件式の選び方, 6 は提唱されたものとは別の条件式について, 7~8 は手順の有限性の証明とその準備, 9~10 は諸注意と計算例を与えている.

目的函数を

$$(1)\quad z=a_{00}-\sum_{j=1}^{n}a_{0j}x_j \longrightarrow \max$$

制約条件を

$$(2)\quad a_{i0}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqq 0 \qquad i=1,2\cdots m$$

で a_{ij} と x_j はすべて整数とすると, z や(2)の slack も整数になる. これに slack を附加して simplex 法の手順で変換して行った任意の step k における basic form で各変数を $\equiv 0$(modulo. 1)とおく. これは常数項を含めて $n+1$ 項を持つ一次式に関する $m+n+1$ コの合同式で, これらの各々を任意に整数倍して加減したものも $\equiv 0$(mod. 1)となる. すなわち $m+n+1$ コの合同式から整係数によって生成される合同式の module M が定まる. 今その中の一つに

(3)　$0 \equiv a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j t_j$

$a_j \geqq 0 \quad j=1, 2 \cdots n$

の形のものがあったとすれば，前論文のようにして条件式

(4)　$f_0 \leqq \sum_{j=1}^{n} a_j t_j$

が成立つが，Mの中でこのようなものを全部つくると，その中に

(5)　$f_0 \leqq \sum_{j=1}^{n} f_j t_j$

の形のものが含まれている．(f_0，f_j は各々 a_0，a_j の小数部分である)(5)は(4)より cut off の効果が大きいから(5)の形に reduce したものだけを考えればよい．Mの中のすべての式に対し(5)の形の条件式が対応する．(7)の形をベクトル(f_0，f_1，$f_2 \cdots f_n$)で表し，それらの間の linear な演算を各成分ごとに mod. 1 で定義すると，この集合は加法群Fになり，MからFへの対応は準同型になる．この step における基底行列の行列式の絶対値をD(これは整数)とすると，f_j 等はD倍によってすべて整数となり，Fは mod D の整数から成るベクトルを元とする有限加法群 F になる．Tucker の定理と elementary divisor の定理を使うとFは巡回群の直積に分解されるが，多くの場合(f_j をD倍した時に現れる整数全体と D との最大公約数が 1 のとき) F自身が巡回群になる．巡回群になればもちろん，ならないときでもその位数は $\leqq D$ となる．この構造に関しては更に立入った分析があるが省略する．なお(5)は最初の step の nonbasic な変数で表すと整係数の不等式になる．

このように附加条件が多数にとれるが，実際の計算で能率をよくするには，簡単には f_{i0} の最大になるような行を選ぶだけで充分であるが，更にいえば f_{i0}/f_{ij} の大きくなるようなものを選ぶのがよいが，それには Euclid の互除法などが使える．Fが普通は巡回群になる事から，f_{i0}，f_{ij} を mod. 1 で何倍かして見て，比率の適当な所を探すのもよい．

7では simplex 表の列ベクトルに対して，上の方を優先的とした辞書式の順序関係を与えて，辞書式双対シンプレックス法を定義している．この方法で附加する条件を決めて行く事によって，8 で手順の有限性が比較的簡単に証明される．この手順を更に徹底させると，解の変数値だけでなく simplex 表の数値が全部整数になる所まで計算を続ける事ができる．

9では計算の経験やその他の注意が与えられている．

色々な例について計算の結果は，分数を使う方式で計算機の桁数の点で overflow した時以外はすべて非常にうまく行った．

等式の条件を含む問題，符号の制限のない変数を含む問題にもそのままこの方法は使える．またこの方法はEuclidの互除法その他初等整数論で使われるいくつかの方法の拡張になっている．通常の LP の問題で条件の変動に対して取られる方法の analogy も成立する．変数の一部にしか整数条件がない時は，このままの方法は使えない．手順の有限性は条件式の選び方にある制限をおいて証明されたが，経験によれば勝手な選び方でも常に有限回で済んだ．

最後に3つの小規模な数値例が与えられている．

(渡辺　浩)

DANTZIG, GEORGE. B.: SOLVING LINEAR PROGRMS IN INTEGERS. *P-1359, Rand Corporation, July 1958*

LP の整数解を求める R. Gomory の方法に用いられる条件式の意味が直観的に判りにくいので，それより弱いが意味の明瞭で簡単な次の条件式を提案する．ただしこの条件式により有限回で整数解に到達するという証明はなされていないし，到達するにしても Gomory の方法より step の数が長くなる事は覚悟すべきであろう．

その条件式というのはある basic solution が整数でないとき，その non basic な変数を x_{m+1}，$x_{m+2}, \cdots, x_n$ として

$$x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots\cdots + x_n \geqq 1$$

とするのである．全部が $\geqq 0$ の整数で，全部が 0 であれば整数解にならないから．　(渡辺　浩)

DANTZIG, GEORGE. B.: ON THE SIGNIFICANCE OF SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH SOME INTEGER VARIABLES. *P-1486. Rand Corporation, April. 1959*

R. Gomory の提出した LP の整数解問題の解法は極めて有望であり，前々出の論文では全変数に整数条件のついた場合が解決されたが，もし変数の一部にだけ整数条件のある場合(E. M. L. Beale と Gomory の論文がある)も解決する事になれば以下の

ように従来の数学的方法によって攻撃できなかった広範な分野の問題が取扱えるようになる．なお Gomory の方法の出る前の状態でこれに関する論文として，H. M. Markowitz and A. S. Manne: On the solution of discrete programming problems. Econometrica 25. 1957 が参考になる．

1) Dichotomies: 制約条件に either…or の入っている場合．G, H は $X=(x_1\cdots x_n)$ の一次式として，Xの考えられる範囲(他の制約条件で規定された)では $G(X)\geqq G_0$, $H(X)\geqq H_0$ とする．今制約条件

(1) $\quad G(X)\geqq 0 \quad \text{or} \quad H(X)\geqq 0$

があるとき，これを次のように整数条件と "and" で成立する条件で表す事ができる．

$$(2)\quad \begin{cases} G(X)-G_0y\geqq 0 \\ H(X)-H_0(1-y)\geqq 0 \\ 0\leqq y\leqq 1, \quad y: \text{整数} \end{cases}$$

したがって必ずしも convex でない領域での LP が可能になる．より一般的に

$$(3)\quad \begin{cases} G_i(X)\geqq 0 \quad i=1,2\cdots\cdots p \\ \text{の中の少くとも } k \text{ コの条件式が成立する事} \end{cases}$$

という条件は

$$(4)\quad \begin{cases} G_i(X)-G_{i0}y_i\geqq 0 \\ y_1+y_2+\cdots\cdots+y_p\leqq p-k \\ 0\leqq y_i\leqq 1, \quad y_i: \text{整数} \end{cases}$$

によって表される．或いは更に制約条件(5)または(6)の一方が成立する事

(5) $\quad G_i(X)\geqq 0 \quad i=1,2\cdots\cdots,p$

(6) $\quad H_i(X)\geqq 0 \quad i=1,2\cdots\cdots,q$

という条件は

$$(7)\quad \begin{cases} G_i(X)-G_{i0}y\geqq 0 \quad i=1,2\cdots\cdots p \\ H_i(X)-H_{i0}(1-y)\geqq 0, \quad i=1,2\cdots\cdots q \\ 0\leqq y\leqq 1 \quad y: \text{整数} \end{cases}$$

によって表される．

2) 離散的変数値の問題: ある変数 x_1 がいくつかの離散的な値 a_1, $a_2\cdots\cdots a_k$ だけを動き得るという場合に次の条件で表す事ができる．

$$(8)\quad \begin{cases} x_1=\sum_{i=1}^{k}a_iy_i \\ \sum_{1}^{k}y_i=1 \\ y_i=0 \text{ or } 1 \quad (0\leqq y_i\leqq 1,\ y_i: \text{整数}) \end{cases}$$

数個の変数がベクトルとして取り得る値がいくつかに指定されているときも同様にできる．

3) 非線型問題: convex な函数の最小化，或いは concave な函数の最大化の問題は非線型でも，LP による近似解法が可能であったが，non-convex な函数の最小化の問題が整数条件を使う事によって取扱える．変数分離の場合でいうと目的函数

(9) $\quad \sum_{j=1}^{n}\phi_j(x_j)=z\longrightarrow \min$

に対し，第一の方法として x_j の軸を 0 から h_i, $i=1,2\cdots k$ の長さに区切ってその各区間における勾配 s_i なる折れ線で $\varphi_j(x_j)$ を近似したとき

$$(10)\quad \begin{cases} x_j=y_1+y_2+\cdots\cdots y_k \\ \varphi_j(x_j)=l_0+s_1y_1+s_2y_2+\cdots\cdots s_ky_k \\ 0\leqq y_i\leqq h_i \\ h_i-y_i=0 \quad \text{or} \quad y_{i+1}=0, \quad i=1,2\cdots\cdots k-1 \end{cases}$$

として表される，この中最後の or を含む部分は 1) によって整数条件つきの linear な条件になる．

第二の方法として，折線の折目の位置を $(a_i,\ b_i)$ $i=0,1,2\cdots\cdots k$ としたとき

$$(11)\quad \begin{cases} x=\sum_{i=0}^{k}a_i\lambda_i \\ \varphi(x)=\sum_{0}^{k}b_i\lambda_i \\ 1=\sum_{0}^{k}\lambda_i, \quad 0\leqq\lambda_i\leqq 1 \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \lambda_0\leqq\delta_0, \quad \lambda_k\leqq\delta_{k-1} \\ \lambda_i\leqq\delta_{i-1}+\delta_i \quad i=1,\cdots\cdots k-1 \\ \sum_{i=1}^{k}\delta_i=1 \quad \delta_i=0 \text{ or } 1 \end{cases}$$

と表される．(12)が convex でないために必要になった条件式を表す．

4) 条件つき制約条件:

$G(X)>0$ ならば $H(X)\geqq 0$ なること

という型の制約は

$G(X)\leqq 0$ or $H(X)\geqq 0$

と表されるから(1)の場合に帰する．

5) concave な函数の最小化の問題．

これは非線型問題の中で LP による近似解法を許さない一つの大きな問題類型であったが，領域が一次不等式で表されるとき(領域が凸集合でなくても 1)で述べた方法によってこうなる場合がある)その中に取った mesh point で目的函数 z の接平面の式(これは一次式)をつくり，z がそれらの接平面の一つより上方にあるという条件の下で z を min にするように式を作ればよい．この方法は 1) によって可能である．

6) 固定費の問題

$$(13)\quad C=\begin{cases} kx+b \quad (x>0) \\ 0 \quad (x=0) \end{cases}$$

の形をした費用函数が目的函数に入っている時，こ

れを次のようにして linear に取扱うことができる．

$$(14)\quad \begin{cases} C=kx+b\delta \\ x \geq U\delta \\ \delta=0 \text{ or } 1 \end{cases}$$

ただしUはxのとりうる値の上限以上に取ってくればよい．

7) 巡回セールスマンの問題

Dantzig, Fulkerson, Johnson や M. M. Flood の JORSA に出した論文から明かなように，整数条件をつける事が許されれば，この問題を LP に定式化する事は困難ではない．

8) 直交ラテン方格の作成

$n=10$ に対してこれが存在しないだろうとの Euler の予想があったが，これは 10,000 コの変数，600 コの条件式の整数値の LP 問題になる．(ただし目的函数は不要，すなわち feasible sol, を求める問題である．次の四色問題も同様)現状の計算機ではこのまま直接には解けないが，輸送型のような構造を持っているから，簡易解法があるだろう．(この問題はその後 Bose と Shrikhande および Parker によって解かれた．すなわち $n=10$ の直交ラテン方格は存在する)

9) 四色問題

球面上にいくつかの国が国境を接して割拠しているとき，四色を使って国境を接している国が同色にならないように塗り分けるには，どの国を何色にしたらよいか？ (このような塗り分けが一般に可能か否かは位相数学(topology)の有名な未解決問題である)の問題は整数条件つきの LP の問題になる．たとえば，国名 $r=1,2\cdots R$ に塗る色 0,1,2,3 を t_r で表し，

(15) $0 \leqq t_r \leqq 3, \quad t_r$: 整数

また r と s が国境を接しているときには

(16) $t_r \geqq t_s+1$ or $t_r \leqq t_s-1$

とする．(16)は(1)により，整数条件つきの linear な同時的条件として表される． (渡辺 浩)

BERKOVITZ, L. D. AND DRESHER, M.: ALLOCATION OF TWO TYPES OF AIRCRAFT IN TACTICAL AIR WAR: A GAME-THEORETIC ANALYSIS *Oprs. Res 8, 694～706 (1960)*

爆撃機と戦闘機とを3つの任務に割りつける問題を多段2人 game 的 model にしたものである．青軍と赤軍とあり，青軍は爆撃機B，戦闘機F機をもち，赤軍は爆撃機β，戦闘機φ機をもつ．両軍はいずれも自軍の爆撃機の一部を割いて

対空(counter-air)…敵航空基地をおそって敵機を破壊する，

残りを地上援護(ground-support)にあてる．また戦闘機は一部を

防空(air defense)…敵の対空作戦に対抗する．すなわち自軍の航空基地をおそう敵機を迎えうつ

に残部を地上援護にあてる．

いま両軍が

青軍			赤軍	
爆撃機B	rx	対空(敵爆撃機基地へ)	$\rho\xi$	爆撃機β
	$(1-r)x$	対空(敵戦闘機基地へ)	$(1-\rho)\xi$	
	$B-x$	地上援護	$\beta-\xi$	
戦闘機F	u	防空	μ	戦闘機φ
	$F-u$	地上援護	$\varphi-\mu$	

のように割りつけると，赤軍の防衛線を破る青軍爆撃機の数は $\max(0, x-c\mu)$ (c は与えられた定数)，赤軍爆撃機基地，戦闘機基地をおそう青軍爆撃機の数はそれぞれ

$$r\max(0, x-c\mu), \quad (1-r)\max(0, x-c\mu).$$

やられる赤軍爆撃機，戦闘機の数はそれぞれ

$$\min\{\beta, b_1 r\max(0, x-c\mu)\}$$
$$\min\{\beta, b_2(1-r)\max(0, x-c\mu)\}$$

(b_1, b_2 は与えられた定数)である．地上火器および空中戦でやられる数は少いから無視する．従って，防空および地上援護に当った機は失われない．敵防衛線を破れなかった爆撃機は自軍基地へ戻るものとする．

残った赤軍の爆撃機，戦闘機の数はそれぞれ

$$\beta_1 \equiv \max\{0, \beta-b_1 r\max(0, x-c\mu)\}$$
$$\varphi_1 \equiv \max\{0, \varphi-b_2(1-r)\max(0, x-c\mu)\}$$

となる．全く同様にして，b_1, b_2, c に対応する同様の係数を d_1, d_2, e とすると，赤軍の襲撃から残った青軍の爆撃機，戦闘機の数はそれぞれ

$$B_1 \equiv \max\{0, B-d_1\rho\max(0, \xi-eu)\}$$
$$F_1 \equiv \max\{0, F-d_2(1-\rho)\max(0, \xi-eu)\}$$

である．

このような襲撃(strike)をN回続けたときのN段 game の payoff を，地上援護機数の差

$$\sum_1^N\{(B-x+F-u)-(\beta-\xi+\varphi-\mu)\}$$

であるとする．この論文では $b_1=b_2=c=e=d_1=d_2$

$=1$, $F=\varphi=1$, $N=3$ として，この game を解いている.　(坂口　実)

MILLS, E. S.: A NOTE ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF AN OPTIMAL PROCUREMENT POLICY *Manag. Sci.*, *5*, *204～209 (1959)*

x_i……第 i 期の必要量
Z_i……第 i 期の調達量
$c(Z)$……量 Z を調達するに要する費用，$c''(Z)\geqq 0$ とする
r……単位量単位期間当りの在庫保持費用
I_i……第 i 期末の在庫量

として Modigliani-Hohn (1955) は最小問題

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}(c(Z_j)+rI_j)=\min \\ \qquad Z_j\geqq 0 \qquad (j=1,\cdots,N) \\ I_j=I_0+\sum_{i=1}^{j}(Z_i-x_i)\geqq 0 \qquad (j=1,\cdots,N) \end{cases} \tag{1}$$

を解いた.

ここでは $c(Z)\equiv\alpha+\beta Z+(\delta/2)Z^2(\beta,\delta>0)$，$x_i=\rho^i x_0(i=1,\cdots,N;\rho>1)$ とする．すなわち $100(\rho-1)$ %の成長率で必要量が増大している．いま第 n 期よりはじめて N 期間，すなわち第 n，$n+1,\cdots,n+N-1$ 期にわたる計画を (N,n) 計画とかこう．この論文の目的はつぎを示すことである：各期でいつも新しい N 期計画の第1期最適調達をやるとすると，$n\to\infty$ のときに

$$\lim_{n\to\infty} I_n=I\infty, \quad \text{indep. of } I_0 \tag{2}$$

かつ各期の調達量決定の rule は，現在の要求量に比例する量を調達する：

$$Z_n=(\rho N/N\rho-N+1)x_n \tag{3}$$

という簡単なものになる.

まず Modigliani-Hohn によると(1)の解は次の如し：(N,n) 計画の基本解 (fundamental solution)(拘束条件を $I_{n+N-1}=0$ だけにしたときの解)が(1)の拘束条件を全部みたしていれば，(このとき(1)に対し feasible なりという)これが(1)の解である．もし基本解が feasible でなければ，

(k,n) 計画の基本解が feasible なような最大の k を k_1 とする．$(k,n+k_1)$ 計画の基本解が feasible なような最大の k を k_2 とする．$(k,n+k_1+k_2)$ 計画の……

というふうにして，$n\sim n+k_1-1$，$n+k_1\sim n+k_1+k_2-1,\cdots$ 等の各期での調達政策を，対応する各計画の基本解にとるとこれが(1)の解を与える.

(2)，(3)の証明は以上の筋道と $x_n=\rho^n x_0$ とからでる.　(坂口　実)

SAATY, T. L.: TIME-DEPENDENT SOLUTION OF THE MANY-SERVER POISSON QUEUE *Oper. Res. 8, 755～772, 1960*

queue の問題は，いままでほとんどの研究がいわゆる steady state について行われ，その平衡状態になる前の有限時刻における問題はここ数年来やっと本格的に取組まれ出したようである．しかしほぼ完全に解かれ，ある程度実用上の目安も与えるように図表などのつけられたものは，まだ，もっとも簡単な simple queue，つまりポアソン到着，指数分布サービスで窓口1つの場合に限られている．この場合は多くの人によって試みられて，いくつかの方法が使われて来たので，それらの方法を用いて窓口が複数の場合の問題を解くことは，めんどうさを除けばあまり困難な問題はないことは予想されていた．そのことを実現してみせたのがこの論文である.

Clark (Ann. Math. Stat., 24, 1953) の方法を適用し，時刻 t における状態確率のラプラス変換の間の再帰公式を求めているが，その中に超幾何函数の導函数などを含み相当複雑な式である．それで著者は窓口2つの場合を特に取扱い，これについては一応 explicit な形で状態確率を求めている．しかし，それとても変形ベッセル函数を項とする2重級数を随所に含み，相当複雑であってこのままでは実用出来ないであろう．数表化なり図表化なり行われることが望まれるが，そのこと自体大型計算機を用いても果して簡単かどうか疑問も感ずる程厄介な結果である.

この他少くとも一方の窓口が塞っている時間の分布や2つの窓口で service rate が違ったときに関連して若干のノートが付加えられている.

(森村英典)

JAISWAL, N. K.: TIME-DEPENDENT SOLUTION OF THE BULK-SERVICE QUEUING PROBLEM, *Oper. Res.*, *8*, *773～781, 1960*

本誌第4巻第2号で紹介した同著者の論文のつづきであって，そこで予告されていたものである．問

題及び扱い方の基本的な点は前論文について紹介した通りであって，time-dependent な場合を取扱う点だけが本質的に違っている．Bulk-service の場合に，time-dependent な問題を扱ったのはこの論文が最初であると思う．Luckak の立場をとるので差分微分方程式が出来，それを，上に紹介した Saaty の論文同様，ラプラス変換をとってその母函数を求めているが，その形は explicit ではない．特に Erlang 分布サービスの場合には，もう少し計算を進め，$P_0(t)$ だけは一応求めているが，Luckak の導入した函数の積分を含む級数で表わされていてこれも相当面倒であり，concrete な形ともいいかねる．

更に，$s=1$ として普通の(bulk-service でない) queue の場合の結果を導いて Luckak の結果と較べ，そこで更に指数分布にして Clark の結果と一致することを確めている．

また，はじめに断るのを忘れたが，この論文では，窓口が空いているときに来た客は直ちにサービスを受けられるとしているが，普通の bulk-service の問題では，service-epoch が来なければやはりサービスを受けられないとしている．エレベーターが動いているとき，客がいてもいなくても連続的に動いているのが後者に当り，客がいないときには来るまで待っているのが前者に当る．平衡状態の際に，この2つの場合の比較を行っている．　(森村英典)

SZWARC, W.: SOLUTION OF THE AKERS-FRIEDMAN SCHEDULING PROBLEM, *Oper. Res. 8, 782～788, 1960*

チャーチマン他の「オペレーションズ・リサーチ入門」やサシーニ他の「オペレーションズ・リサーチ——手法と例題」などで紹介されている，「2種の仕事をm台の機械にかける場合の順序づけ」の問題を取扱う．この場合，Akers-Friedman の feasibility theorem によって feasible な解をいくつか求め，その中(この解の集合を Γ とする)から最適なものを求めるには，それぞれの解にしたがって所要時間を計算して最小時間のものを選び出すというやり方をとっていた．またこの問題を図的に解くやり方も知られているが，この場合も視察によって最適らしい解を求め得るに過ぎず，最適解を Γ の中から選び出すには，Γ がはっきりする意味から Akers-Friedman の定理による方が確実であった．この図的解法は「機械の遊休時間を示す垂直方向の移動をなるべく少くして，斜めに移動せよ」というのが根本原則であって，直観的にもわかりよい．それでこの論文は，この図的解法において垂直部分の移動を最小にするような道を見出す systematic な方法を提案している．基本原理は垂直方向の移動が最小の道を探すのに，DP と同じように数段階に分けて順次に最小になる道を選んで行くというやり方である．直接引用している個所はないのにBellman の書物を参考文献に挙げているのもそのためであろう．実際に最適解を見つけるには，図を描いて視察でわかる数字をいくつか書込みながら作業を進めればよいので，実用上は使い易いであろう．

なお，n種の仕事をm台の機械にかける場合に，$\binom{n}{2}$個の $2\times n$ 型のプログラムに分け，その最適解を結びつける方法を提案している．もっとも，これはそれが feasible solution であるとも，たとえ，feasible のときでも optimal であるとも保証されないので，この問題の解になっているとは到底いえないけれども，正直にやれば$(n!)^m$個のプログラムを調べなければならないのだから，うまく行く場合には，それよりもはるかに都合よいことになる．

(森村英典)