集中研磨でのバイト保有数決定について

藤　本　正　明*

ま　え　が　き

バイトの集中研磨方式を実施する場合，工具室とバイト使用者の間で交換するバイト，すなわち交換バイトの品切れを防ぐため，バイトをどれだけ予備として保有すればよいか，ということが問題となる．予備品保有数が多ければ，品切れを防ぐことができるかわりに，予備品保有のための費用が高くなる．反対に，予備品保有数が少なすぎれば予備品費は安くなるけれども，品切れが発生しやすくなり，品切れ損失もそれだけ大きくならざるを得ない．その間に存在する，予備品費と品切れ損失の和を最小とする，いわゆる適正予備数の求め方として，例えば，待ち合わせ理論等による方法が考えられるが，本文では，或る程度の仮定のもとに，ランダムウォークの理論を応用して，その適正予備数の決定を試みてみた．

1.　集中研磨でのバイトの動き

集中研磨では，バイトは第1図のように循環する．第1図で，

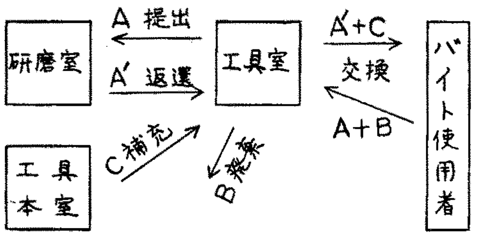
A：再研磨可能のバイト（研磨提出バイト）

B：再研磨不能のバイト（破損バイト）

C：破損バイト補充用新品バイト

A′：研磨作業が落成した返還バイト

A+B，A′+C：工具室と使用者の間で交換するバイト



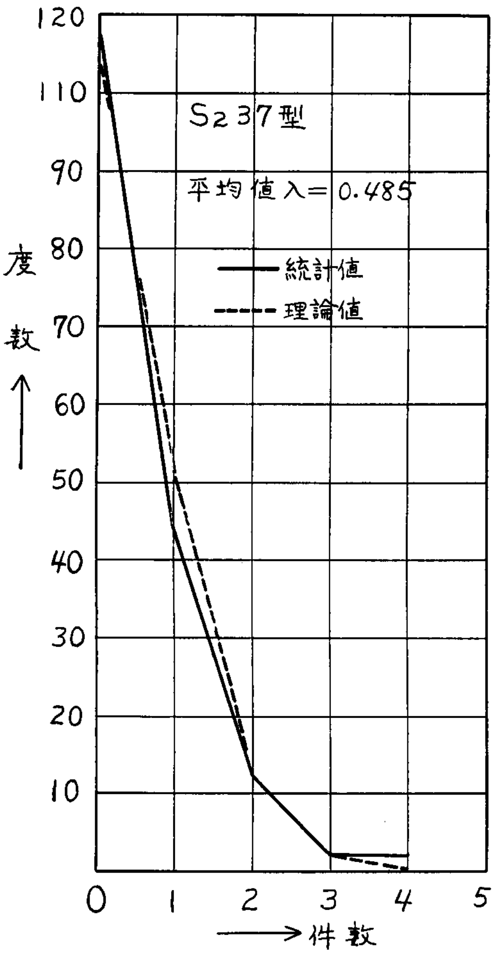
第1図　集中研磨方式でのバイトの動き

を表わしている．交換バイトA+Bのうち，Bは寿命のつきた再研磨不能のバイトであって，そのまま廃棄され，それにかわるものとして，工具本室よりCという新品のバイトが補充される．また，もうひとつのAは，再研磨可能のバイトであって，そのまま工具室から研磨室へ送られ，そこで研磨作業が落成したのち，改めてA′となり工具室へ返還される．BとCに基づく在庫管理の問題は，従来の個別研磨方式の場合にも存在するものであるが，新らしく集中研磨方式を採用すれば，その他に，AとA′の関係からくる在庫管理の問題が発生する．この集中研磨特有の，研磨提出バイトAと落成返還バイトA′に基づく在庫管理の問題について，以下検討を加えてみたい．

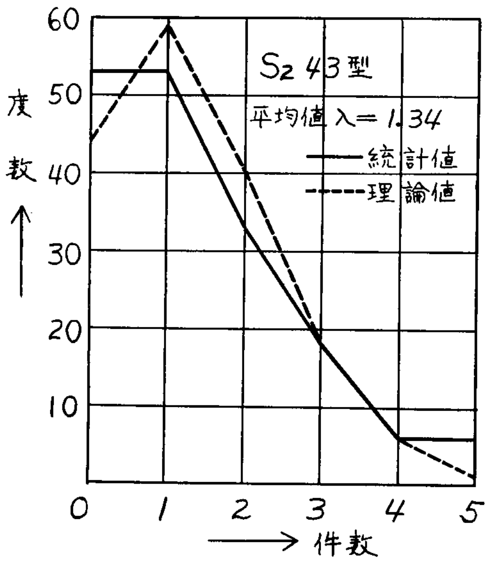
* 日本国有鉄道小倉工場 昭和36年4月23日　第9回研究発表会にて講演　昭和36年5月10日受理

2. バイト交換件数の分布

第2図および第3図は，国鉄小倉工場で記録したバイト交換件数(研磨提出件数に同じ)の分布図の例である．実線が実際の統計値で，点線は同じ平均値をもつポアソン分布の理論値を示す．両者ともポアソン分布を仮定して χ^2 検定を行なった結果，有意差がないことが判明した．その他の種類のバイトについても，交換件数はよくポアソン分布に従うことが確認されたので，この事実をひとつの前提条件として，次の議論を進めてみよう．



第2図　1日当りバイト交換件数の分布



第3図　1日当りバイト交換件数の分布

3. 落成返還件数の分布

バイト落成返還件数の分布は，実際の統計値より判断するのもひとつの方法であるが，次のようにして導くことができる．

落成返還バイト A′ は，A として研磨室へ提出されたバイトが，提出された日，またはその後の或る日に落成返還されるものと考えられるから，A′ の分布は A の分布に落成遅れ日数の影響を加えたものとなる．

p_m: 研磨室へ提出された或るバイトが m 日後に落成返還される確率

$\bar{m}$: m の平均値

D_0: 考えている或る1日

D_m: D_0 より数えて m 日だけ過去へさかのぼった日

とすると，p_m はまた，D_m に研磨室へ提出された或るバイトが D_0 に落成返還される確率とも考えられる．研磨室へ提出された1本のバイトは，いつの日にか必らず落成返還されるので，

$$p_0+p_1+p_2+\cdots\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}p_m=1 \tag{1}$$

r_m: D_m に研磨室へ提出されたバイトの総数

k_m: r_m のうち，D_0 に落成返還されるバイトの数

とすると，r_m のうち，D_0 に k_m だけ落成し，(r_m-k_m) は落成しない確率 g_m は，

$$g_m={}_{r_m}C_{k_m}p_m{}^{k_m}(1-p_m)^{r_m-k_m} \tag{2}$$

で示される．また，D_m の研磨提出件数が r_m である確率 l_m は，提出件数(交換件数)の平均値を λ とすると，

$$l_m=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r_m}}{r_m!} \tag{3}$$

従って，D_m に研磨室へ提出されたバイトのうちから，D_m に k_m 本落成する確率 P は，

$$\begin{aligned}P&=\sum_{k_m\leqq r_m}l_m\cdot g_m\\&=\sum_{k_m\leqq r_m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r_m}}{r_m!}\cdot{}_{r_m}C_{k_m}p_m{}^{k_m}(1-p_m)^{r_m-k_m}\\&=\sum_{k_m\leqq r_m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r_m}}{r_m!}\cdot\frac{r_m!}{k_m!(r_m-k_m)!}p_m{}^{k_m}(1-p_m)^{r_m-k_m}\end{aligned}$$

$$r_m=k_m+i$$

とおくと，

$$\begin{aligned}P&=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k_m+i}p_m{}^{k_m}}{k_m!i!}(1-p_m)^i\\&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p_m)^{k_m}}{k_m!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i(1-p_m)^i}{i!}\\&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p_m)^{k_m}}{k_m!}\cdot e^{\lambda(1-p_m)}\\&=e^{-\lambda p_m}\frac{(\lambda p_m)^{k_m}}{k_m!}\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{4}$$

これは，平均値を λp_m とするポアソン分布であることがわかる．この結果を用いて，D_0 にバイトが y 本落成する確率 Q は，

$$y=k_0+k_1+k_2+\cdots\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}k_m$$

として，

$$\begin{aligned}Q&=\sum_{k_0+k_1+\cdots\cdots=y}e^{-\lambda p_0}\frac{(\lambda p_0)^{k_0}}{k_0!}\cdot e^{-\lambda p_1}\frac{(\lambda p_1)^{k_1}}{k_1!}\cdots\cdots\\&=e^{-\lambda(p_0+p_1+\cdots\cdots)}\sum_{k_0+k_1+\cdots\cdots=y}\frac{(\lambda p_0)^{k_0}(\lambda p_1)^{k_1}\cdots\cdots}{k_0!k_1!\cdots\cdots}\end{aligned}$$

$$=e^{-\lambda(p_0+p_1+\cdots\cdots)}\frac{\lambda^y(p_0+p_1+\cdots\cdots)^y}{y!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} \tag{5}$$

これは，平均値を λ とするポアソン分布の式にほかならない．つまり，毎日のバイト落成返還件数は，交換件数(研磨提出件数)と同じ平均値のポアソン分布に従うことがわかる．

4. 工具室在庫数の動き

ひとつの種類のバイト総数 M を次の4群に分けて考える．

h_1：バイト使用者が常時所有するバイト数(各使用者が1本ずつ所有するとき，使用者数と一致)

h_2：研磨室最小滞在数．ここでは，研磨室に滞在するバイト数の平均値 $\bar{m}\lambda$ とする．すなわち，

$$h_2=\bar{m}\lambda$$

x：工具室在庫数．工具室に備えられて，使用者との交換に用いられるバイトの数

y：研磨室にあって，研磨作業を受けているバイト数とそれを待ち合わせているバイト数の和

とすると，

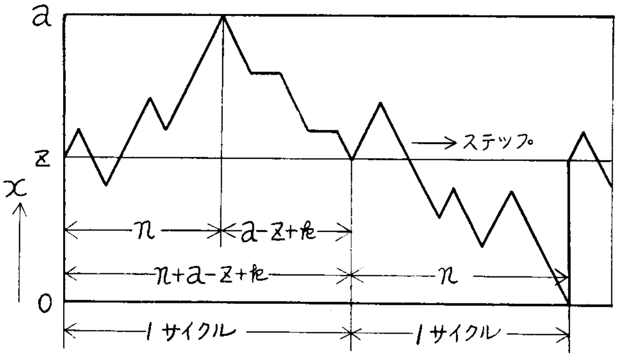
$$M=h_1+h_2+x+y=\text{const.} \tag{6}$$

$$h_1, h_2=\text{const.}$$

であるから

$$x+y=\text{const.}(=a) \tag{7}$$

x および y は変数であるが，両者の和 $x+y$ は定数であるので，これを a とおく．



第4図　工具室在庫数 x の動き

今，x の動きを追跡すると，例えば第4図のようになる．ここで

z：工具室初期在庫数

とし，(7)より，x の最大値，すなわち工具室最大在庫数が a になることを考慮すれば，x は，$x=z$ より始まって，時間の経過とともに上下方向に変動し，或るステップ数ののち，$x=a$ または $x=0$ に到達する．ここでステップ数とは，工具室と研磨室でやりとりしたバイトの延数をいう．まず，x が a に到達した場合，研磨作業を暫く中止して，x が初期位置 z まで復帰するのを待ち合わせ，また一方，x が0に到達した場合には，在庫が払底したわけであるから，超過勤務又は優先作業等の特別措置を講じて，x を初期位置 z まで引き上げて品切れを防ぐものとする．

ここで，或る1日をとりあげ，その日バイトが摩耗して使えなくなり再研磨を要する件数，す

なわちバイト交換件数と，その同じ日に研磨室から帰ってくる件数，すなわち落成返還件数とを考えると，両者は独立として差し支えない．落成返還件数と過去の交換件数は無関係ではないが，両者には時間的なずれがある結果，研磨作業を中止することや，0から z まで引き上げる異常な取り扱いおよび研磨室最小滞在数の影響などが存在することを考えて，これらも独立と考えてみよう．そうすれば，このモデルは，初期位置を z とし，$x=a$ と，$x=0$ の2つの吸収壁をもつランダムウォークのくり返しと考えることが出来る．

ここで，$x=0$ となった場合，x を0から z へ引き上げるとき，若干の費用が必要になるが，次に損失費用について検討してみよう．

5. 損 失 函 数

$u_{z,n}$：x の値が初期位置 z より始まって，n ステップ目に0に到達する確率

$v_{z,n}$：同じく a に到達する確率

$$u_z=\sum_{n=0}^{\infty} u_{z,n} \tag{8}$$

$$v_z=\sum_{n=0}^{\infty} v_{z,n} \tag{9}$$

とすると，古典的な破産問題で，u_z は賭博者が結局破産する確率，v_z は結局勝つ確率を表わす．われわれの場合，工具室へ入ってくる件数と，工具室から出て行く件数が同じ平均値をもつので，賭博の問題で，成功の確率 p と失敗の確率 q が等しく $p=q=1/2$ の場合に相当する．このとき

$$u_z=\frac{a-z}{a} \tag{10}$$

$$v_z=\frac{z}{a} \tag{11}$$

であることがランダムウォークの理論で知られている．

次に，x が初期位置 z より出発して，a または0に到達したのち，再び z に復帰するまでの過程を1サイクルと考え，1サイクルの間のステップ数の平均値 $\bar{X}$ を求めよう．

まず，x が z より出発して，a に到達したのち z へ復帰するサイクル($z\to a\to z$ のサイクル)では，一般に，n ステップで，$z\to a$ の過程を経，次の $a\to z$ の過程では，$a-z+k$ のステップを要する．ここで k の意味は，x が a に到達したとき，z に復帰するまで研磨作業を中止するので，$a\to z$ の過程に要するステップ数は，提出件数のみについて考えれば，$a-z$ であるけれども，その他に，k だけ落成返還件数が間引かれていることを表わす．(第4図参照)

$k(\geqq 0)$ の出現の確率 $f(k;r,p)$ は，負の二項分布であるから

$$f(k;r,p)=\binom{r+k-1}{k}p^r q^k \tag{12}$$

但し，今の場合，　$r=a-z,\ p=q=\dfrac{1}{2}$

$z\to a$ の n ステップと，$a\to z$ の $a-z+k$ ステップは独立であるから，$z\to a$ に n ステップで，かつ $a\to z$ に $a-z+k$ ステップを要する確率は，

$$v_{z,n}\cdot f(k;r,p) \tag{13}$$

但し，各 n の値について，　$k=0,1,2,\cdots\cdots$

故に，$z\to a\to z$，もしくは $z\to 0\to z$ に要する平均ステップ数 $\bar{X}$ は，

$$\begin{aligned}\bar{X}&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(n+a-z+k)\cdot v_{z,n}\cdot f(k;r,p)\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot u_{z,n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n(v_{z,n}+u_{z,n})+(a-z)\sum_{n=0}^{\infty}v_{z,n}\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}kv_{z,n}f(k;r,p)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n(v_{z,n}+u_{z,n})+(a-z)v_z\\&\quad+v_z\sum_{k=0}^{\infty}kf(k;r,p)\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，最右辺の第1項は，古典的な破産問題でゲームの継続時間の期待値 D_z を表わしており，$p=q=1/2$ のとき，次式で示される．

$$D_z=\sum_{n=0}^{\infty}n(v_{z,a}+u_{z,n})=z(a-z) \tag{15}$$

また，第3項の中にある $\sum_{k=0}^{\infty}kf(k;r,p)$ は，負の二項分布の期待値であって，われわれの場合，

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot f(k;r,p)=\frac{rq}{p}=r=a-z \tag{16}$$

となる．従って，(14), (15), (16) より，

$$\begin{aligned}\bar{X}&=z(a-z)+(a-z)v_z+v_z(a-z)\\&=(a-z)(z+2v_z)\\&=(a-z)\left(z+2\cdot\frac{z}{a}\right)=z(a-z)\left(1+\frac{2}{a}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

今，$f_n=u_{z,n}+v_{z,n}$ とすると，$\sum_{n=0}^{\infty}f_n=1$ であって固執的だから，充分大きな N ステップ数の間に生起するサイクル数の平均値 $\bar{s}$ は，

$$\bar{s}=\frac{N}{\bar{X}}=\frac{N}{z(a-z)\left(1+\frac{2}{a}\right)} \tag{18}$$

と考えてよい．この $\bar{s}$ は，$z\to a\to z$ のサイクルと，$z\to 0\to z$ のサイクルの両者の生起回数の和であるから，そのうち，$z\to 0\to z$ のサイクル，すなわち品切れの起るサイクルの生起回数の平均値 $\bar{s}_1$ は，

$$\bar{s}_1=\bar{s}\cdot u_z=\frac{N}{z(a-z)\left(1+\frac{2}{a}\right)}\cdot\frac{a-z}{a}$$

$$=\frac{N}{z(a+2)} \tag{19}$$

と考えられる．

ここで，品切れ時にバイト1本を研磨するのに要する費用を c_1 とすると，0から z まで引き上げるわけであるから，品切れ発生1回につき，c_1z の費用が必要となる．N ステップの間には，品切れが $\bar{s}_1$ 回発生するので，

$$c_1z\bar{s}_1=\frac{c_1N}{a+2} \tag{20}$$

が，N ステップ間の全品切れ損失である．従って，品切れ損失の1ステップ当り負担額 I_1 は，

$$I_1=\frac{c_1}{a+2} \tag{21}$$

次に，予備品保有に基づく費用の1ステップ当り負担額 I_2 を求めてみる．

G：バイト1本の原価

t： 1日当りの金利

とすると，a 本のバイトを保有するのに，Gta だけの費用を要する．これを1日当りの平均ステップ数 2λ で割ると

$$I_2=\frac{Gta}{2\lambda}=c_2a \tag{22}$$

ここに　　　$c_2=\dfrac{Gt}{2\lambda}$

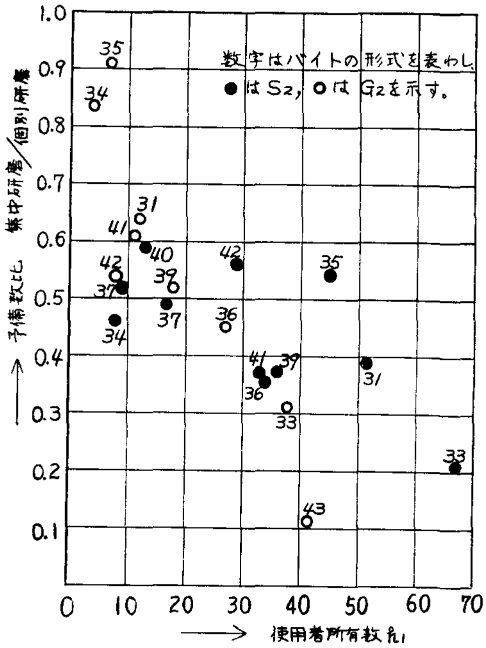
従って，損失函数 I は

$$I=I_1+I_2=\frac{c_1}{a+2}+c_2a \tag{23}$$

(23) より，I を最小とする a の値 a_0 は，

$$a_0=\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}-2=\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{Gt}}-2 \tag{24}$$

作業を行なうのに絶対必要な h_1 のバイト数以外に，集中研磨方式では，(24)の a_0 と，先程述べた研磨室最小滞在数 h_2 だけは余分に備えねばならぬが，従来の，すなわち個別研磨方式の場合の，h_1 以外の余分なバイト数の実績と以上のようにて求めた集中研磨の場合のそれとの比率を，国鉄小倉工場の場合に求めて，第5図に掲げた．第5図よりわかるとおり，集中研磨方式では，従来と比較して，いずれのバイトとも，余分のバイ



第5図　集中研磨と個別研磨の予備数の比較
(国鉄小倉工場の例)

ト数は減少している．特に，バイト使用者が常時所有するバイト数 h_1 が大きい程，減少率は著しい．つまり，同一種類のバイトを多く使用するところ程，集中研磨方式はますます有利であることがわかる．このことは，(24)で交換件数の平均値 λ が，根号の中に入っているところからも当然予想される．

集中研磨でのバイトの適正予備数の求め方として，他にもその方法は考えられるが，或る程度の仮定のもとに，ランダムウォークの理論を実際の工場の業務に応用した1例として，あえて本文を草した次第である．最後に本考察をするに当り，鉄道技術研究所阿部俊一氏に御指導いただいたことを感謝します．

文　献

「確率論とその応用」(上，下)，W. フェラー著，河田龍夫監訳，紀伊國屋書店．

▶ニュース◀

Prof P. M. Morse 一行来日

防衛庁の招きで Massachussetts Institute of Technology の Operations Research Center から Prof. Phillip M. Morse, Dr. James M. Dobbie, Dr. Ronald A. Howard の3氏が8月4日～27 日来日した．

本学会では7月の理事会で全幹事を委員とし矢部幹事を委員長とする準備実行委員会を構成することとした．一行は防衛庁，日本科学技術連盟でセミナーを行なったほか，8月 26 日午後特別公開講演会を，また同夜歓迎晩餐会を開くことになった．

Dr. P. M. Morse は MIT の物理学の教授で，ORC の長，米国音響学会，米国 OR 学会の前会長．また Sir Charles Goodeve のあとを受けて来年1月1日より3年間 IFORS の Secretary General を担当する．著書には“振動と音響”，“OR の方法”，“待合せ行列・在庫管理・設備保全”等あり，音響学のほか第2次大戦中米海軍の OR 指導者として有名である．

Dr. James M. Dobbie は MIT の主任研究員で，米海軍の OR グループのメンバー，第2次大戦以来米海軍に関する研究が多い．

Dr. Ronald A. Howard は MIT の電気工学科の助教授で，アーサードーリトル社のコンサルタント，著書は“ダイナミック・プログラミングとマルコフ過程”がある．

Prof. P. M. Morse 一行による 特別公開講演会

8月 26 日　13.00～16.30 早稲田大学小野記念講堂で司会を山口英治理事，座長を国沢清典理事が担当して開いた．参加者は 160 名をこえ盛況であった．

△Prof. P. M. Morse: “ International Development of OR”(世界における OR の現状——東工大・松田武彦君)

△Dr. J. M. Dobbie: “Allocation of Effort”(努力の最適配分——国際電電・井上洋一君)

△Dr. R. A. Howard: “Probabilistic System Analysis”(不確実性を考慮に入れたシステム分析——早大・出居茂君)

こころよく会場を提供された早稲田大学，また設営に当られた春日井博監事，通訳の労をとられた上記3君，ならびに8月 23 日この記事を掲載した朝日新聞社に対して感謝する．