モンテカルロ法を媒介とした行列のグループ別逆転

高 橋 磐 郎*

ま え が き

与えられた行列のエレメントが，たとえば表1の例にみられるように，互いに微細な連結をたもついくつかのグループにわけられるとき，この行列を逆転するという問題を考えよう．

第1表の例では(2, 5)，(4, 5)，(6, 2)，(6, 8)，(9, 1)なるエレメントによって三つのグループ I. J. K が連結している．これらのエレメントを**連結エレメント**(Liaison element)と呼ぶことにする．もしこれら微細な連結がなければ，すなわち連結エレメントが全部0ならば，この行列は各グループごとに独立に行うことができる．この解に，連結エレメントによる影響を補正すれば与えられた行列の逆行列がえられる．

この論文の主目的は，この補正項を能率よく求める公式を与えることである．

この公式を導出する媒介としてモンテカルロ法による行列の逆転を用いるが，その際，第一段階として各グループ内のみのモンテカルロ実験を行い，つぎに第二段階としてグループ間の実験を行うという手続きをへる．

この二段モンテカルロ実験はそれ自身としても上記のような行列の逆転を能率よくするものである．この論文の目的の副産物は上記の二段モンテカルロ実験の手順を明確にすることである．

第1表のように0要素の多い行列をそのまま普通の掃き出し法で行う場合，自動計算機を用いるならば，0をわったりかけたりする無意味な演算が多く計算能率が悪い．その意味でここで与える公式は能率を高めるだろう．

また問題がもっと Large Scale になると，行列のエレメント全体をいっぺんに計算機の中に記憶できない場合がある．このようなとき，各グループごとに処理をほどこしてあとから補正するという手法がどうしても必要になる．

§0. 序

§1では，この論文で使う用語定義を示す．

§2は行列のグループ別逆転の手順のみを示す．この§でのべる結果がこの論文の主目的である．

§3では§2の手順を用いて一つの数値例を計算する．

§4~6ではモンテカルロ実験を媒介として§2の諸公式を導出する．

§4でモンテカルロ法の一般論を与える．§5ではグループ別二段モンテカルロ実験による推定

* 早稲田大学生産研究所 昭和 35 年9月 21 日受理

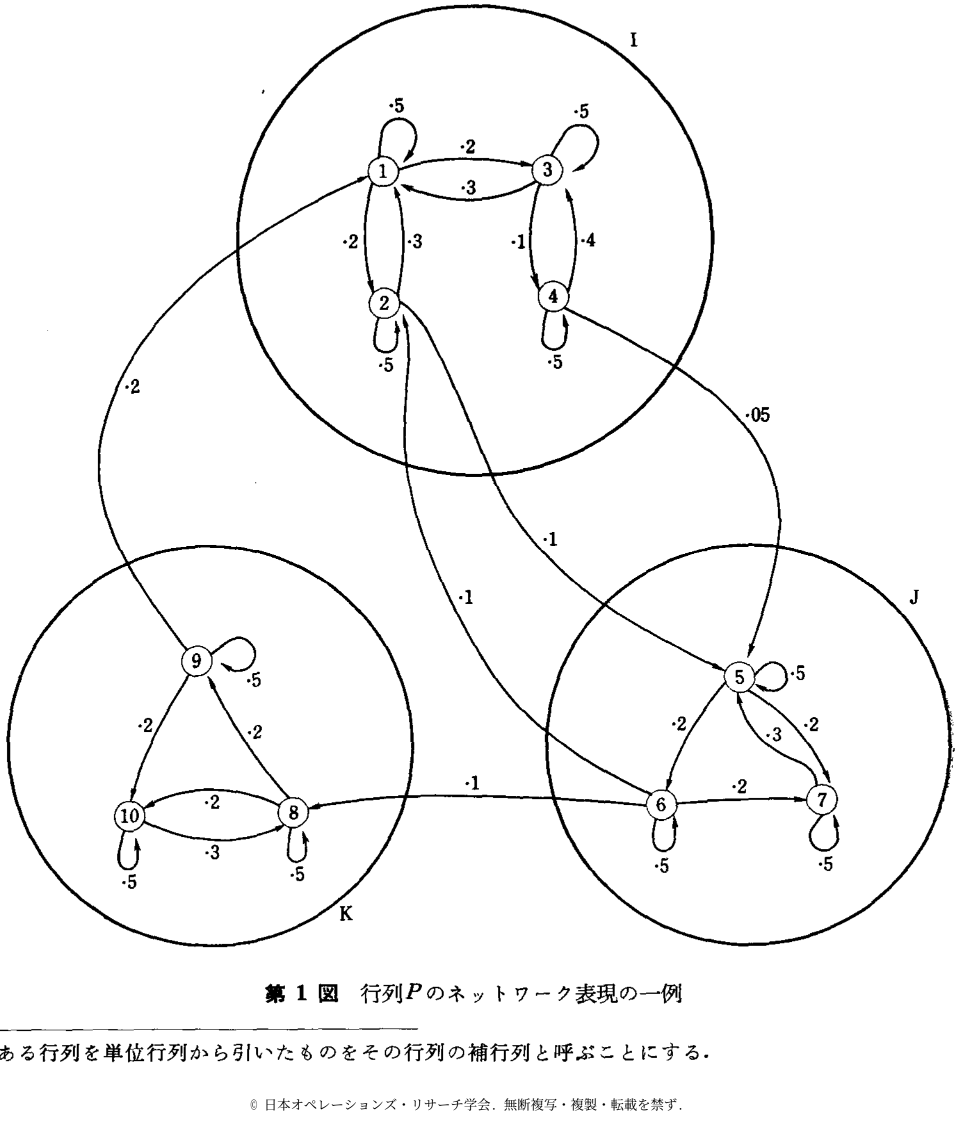
法の手順を示す．この§がこの論文の副産物である．§6では§5の結果の期待値をとり，§2の諸公式を Heuristic に導出する．

§7では§2の公式の証明をのせる．

§1. 行列のネットワーク表現

与えられた行列を Q とし，Q の補行列*(Complementary Matrix)を P とする．第1表が Q の一例である．その補行列 P を表現するのに第1図のようなネットワークを用いる．ここで node i からでて j へいく矢印につけた数値は P の(i, j)エレメントの値である．

このネットワークの node は I. J. K の3つのグループにわけられる．各グループ内の node のうち，他のグループの node からの矢印が入ってくるものをそのグループの Input node, 他のグループへでる矢印をもつものを Output node と呼ぶ．第1図の例で I グループの Input node



第1図 行列Pのネットワーク表現の一例

*ある行列を単位行列から引いたものをその行列の補行列と呼ぶことにする．

は①，②Output node は②，④である．

行列 Q または P のある列(行)の中に連結エレメントがあればその列(行)の番号をもつ node はその属するグループの Input(Output) である．

		I				J			K		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	1	.5	−.2	−.2	0						
	2	−.3	.5	0	0	−.1					
	3	−.3	0	.5	−.1						
	4	0	0	−.4	.5	−0.5					
J	5					.5	−.2	−.2			
	6		−.1			0	.5	−.2	−.1		
	7					−.3	0	.5			
K	8								.5	−.2	−.2
	9	−.2							0	.5	−.2
	10								−.3	0	.5

第1表 行列 Q の一例

§2. 行列のグループ別逆転の手順

ここでは行列のグループ別逆転の一般手順の結果のみをのべる．

与えられた $(n\times n)$ 行列 Q の補行列 P を §1のようにネットワーク表現した結果，各 node が I. J. K なるグループにわかれたとしよう．I の Input node を I_1，I_2，I_3，Output node を i_1，i_2 とする．J. K についても同様に Input を大文字，Output を小文字で表わす．また I の任意の2つの node を i，i' とする．これは同一であってもいいし，また Input, Output に一致していてもよいとする．J. K についても同様．(第1図参照)

Q の補行列 P の各エレメント $P_{\mu\nu}$ とし Q の逆行列 Q^{-1} の各エレメントを $q^{\mu\nu}$ とする．

連結エレメントを0としたときのグループ別の逆行列のエレメントを $\dot{q}^{ii'}$，$\dot{q}^{jj'}$，$\dot{q}^{kk'}$ 等で表わし，これらを知って，Q^{-1} を求める手順を示す．

手順1 各グループからの Output Flow を計算する．

I グループからの Outut Flow

$$\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \dot{q}^{ii_1} \\ \dot{q}^{ii_2} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} p_{i_1J_1} & p_{i_1K_1} \\ p_{i_2I_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (*\text{は Transposed}) \quad i\varepsilon I \tag{2・1}$$

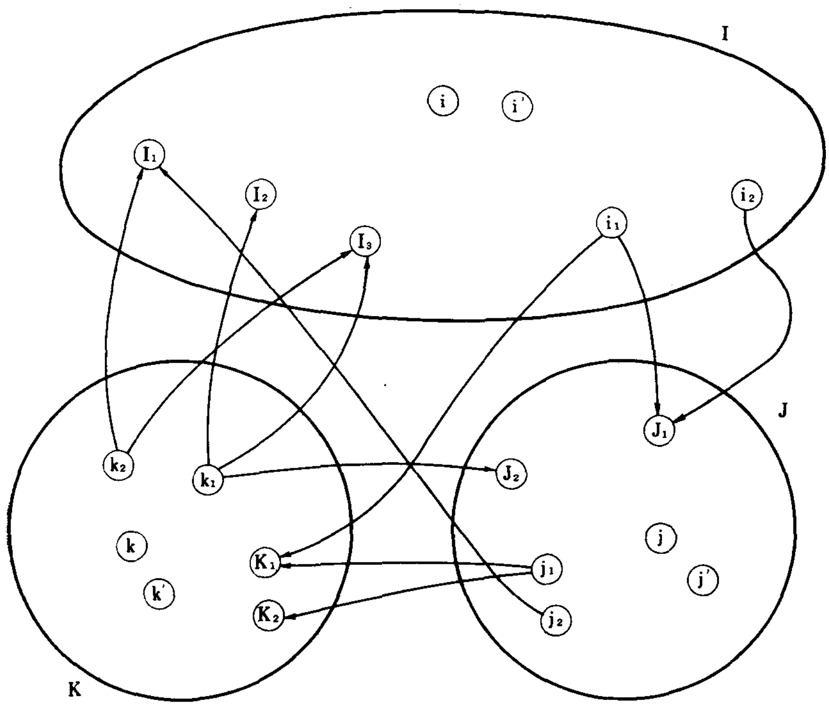
J グループからの Output Flow

$$\begin{bmatrix} P_{jI_1} \\ P_{jK_1} \\ P_{jK_2} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \dot{q}^{jj_1} \\ \dot{q}^{jj_2} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & p_{j_1K_1} & p_{j_1K_2} \\ p_{j_2I_1} & 0 & p_{j_2K_2} \end{bmatrix} \quad j\varepsilon J \tag{2・2}$$

K グループからの Output Flow

$$
\begin{bmatrix} P_{kI_1} \\ P_{kI_2} \\ P_{kI_3} \\ P_{kJ_2} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \dot{q}^{kk_1} \\ \dot{q}^{kk_2} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & p_{k_1I_2} & p_{k_1I_3} & p_{k_1J_2} \\ p_{k_2I_1} & 0 & p_{k_2I_3} & 0 \end{bmatrix} \qquad k \varepsilon K \tag{2・3}
$$

ここでたとえば(2・1)の右辺の右部の行列は行が I グループの Output node に，列がこれらの node からの矢印をもつ他のグループの input node(これを今後単に I グループからの Input node と呼ぶ)に対応する．他のグループについても同様．



第 2 図　一般の行列Pのネットワーク表現

	I_1	I_2	I_3	J_1	J_2	K_1	K_2
I_1				$P_{I_1J_1}$	0	$P_{I_1K_1}$	0
I_2				$P_{I_2J_1}$	0	$P_{I_2K_1}$	0
I_3				$P_{I_3J_1}$	0	$P_{I_3K_1}$	0
J_1	$P_{J_1I_1}$	0	0			$P_{J_1K_1}$	$P_{J_1K_2}$
J_2	$P_{J_2I_1}$	0	0			$P_{J_2K_1}$	$P_{J_2K_2}$
K_1	$P_{K_1I_1}$	$P_{K_1I_2}$	$P_{K_1I_3}$	0	$P_{K_1J_2}$		
K_2	$P_{K_2I_1}$	$P_{K_2I_2}$	$P_{K_2J_3}$	0	$P_{K_2J_2}$		

第 2 表　グループ間選移行列

手順 2　グループ間選移行列をとり，その補行列を逆転する．手順1で求めた Output Flow $P_{\mu\nu}$ のうちで各グループの Input に対応するもののみをとりだし第2表のような行列を作る

(第2表でブランクの箇所は0). この行列の補行列を逆転した結果が第3表である.

	I_1	I_2	I_3	J_1	J_2	K_1	K_3
I_1	$Q_{I_1I_1}$	$Q_{I_1I_2}$	$Q_{I_1I_3}$	$Q_{I_1J_1}$	$Q_{I_1J_2}$	$Q_{I_1K_1}$	$Q_{I_1K_2}$
I_2	$Q_{I_2I_1}$	$Q_{I_2I_2}$	$Q_{I_2I_3}$	$Q_{I_2J_1}$	$Q_{I_2J_2}$	$Q_{I_2K_1}$	$Q_{I_2K_2}$
I_3	$Q_{I_3I_1}$	$Q_{I_3I_2}$	$Q_{I_3I_3}$	$Q_{I_3J_1}$	$Q_{I_3J_2}$	$Q_{I_3K_1}$	$Q_{I_3K_2}$
J_1	$Q_{J_1I_1}$	$Q_{J_1I_2}$	$Q_{J_1I_3}$	$Q_{J_1J_1}$	$Q_{J_1J_2}$	$Q_{J_1K_1}$	$Q_{J_1K_2}$
J_2	$Q_{J_2I_1}$	$Q_{J_2I_2}$	$Q_{J_2I_3}$	$Q_{J_2J_1}$	$Q_{J_2J_2}$	$Q_{J_2K_1}$	$Q_{J_2K_2}$
K_1	$Q_{K_1I_1}$	$Q_{K_1I_2}$	$Q_{K_1I_3}$	$Q_{K_1J_1}$	$Q_{K_1J_2}$	$Q_{K_1K_1}$	$Q_{K_1K_2}$
K_2	$Q_{K_2I_1}$	$Q_{K_2I_2}$	$Q_{K_2I_3}$	$Q_{K_2I_1}$	$Q_{K_2J_2}$	$Q_{K_2K_1}$	$Q_{K_2K_2}$

第 3 表 グループ間選移行列の補行列の逆行列

手順 3 各グループごとに補正項を求める.

I グループについての補正公式

$$
(2\cdot4)\quad
\begin{cases}
q^{ii'}-\dot{q}^{ii'}=\begin{bmatrix}P_{iJ_1}\\P_{iK_1}\end{bmatrix}^{*}\ \boldsymbol{Q}_{II}\begin{bmatrix}\dot{q}^{I_1i'}\\ \dot{q}^{I_2i'}\\ \dot{q}^{I_3i'}\end{bmatrix} & i,\ i'\varepsilon I\\[2ex]
q^{ij'}=\begin{bmatrix}P_{iJ_1}\\P_{iK_1}\end{bmatrix}^{*}\ \boldsymbol{Q}_{IJ}\begin{bmatrix}\dot{q}^{J_1j'}\\ \dot{q}^{J_2j'}\end{bmatrix} & j'\varepsilon J\\[2ex]
q^{ik'}=\begin{bmatrix}P_{iJ_1}\\P_{iK_1}\end{bmatrix}^{*}\ \boldsymbol{Q}_{IK}\begin{bmatrix}\dot{q}^{K_1k'}\\ \dot{q}^{K_2k'}\end{bmatrix} & k'\varepsilon K
\end{cases}
$$

これによって $q^{i\mu}(\mu=1\sim n)$ を求めることができる. ここで

$$
(2\cdot5)\quad
\begin{cases}
\boldsymbol{Q}_{II}=\begin{bmatrix}Q_{J_1I_1} & Q_{J_1I_2} & Q_{J_1I_3}\\ Q_{K_1I_1} & Q_{K_1I_2} & Q_{K_1I_3}\end{bmatrix}\\[2ex]
\boldsymbol{Q}_{IJ}=\begin{bmatrix}Q_{J_1J_1} & Q_{J_1J_2}\\ Q_{K_1J_1} & Q_{K_1J_2}\end{bmatrix}\\[2ex]
\boldsymbol{Q}_{IK}=\begin{bmatrix}Q_{J_1K_1} & Q_{J_1K_2}\\ Q_{K_1K_1} & Q_{K_1K_2}\end{bmatrix}
\end{cases}
$$

であり, $\boldsymbol{Q}_{II}(\boldsymbol{Q}_{IJ},\boldsymbol{Q}_{IK})$ は, 行が I グループからの Input node に, 列が I(J. K) グループの Input node に対応する.

J. K グループについても (2•4), (2•5) と同様な手順で公式を求めることができる.

§3. 行列のグループ別逆転の数値例

ここでは §2 にのべた一般手順を第1表の数値例についてたどっていくことにする.

まず第1表で連結エレメントを0としたときのグループ別の逆行列の値を以下に示す.

I グループ	$\dot{q}^{11}$	$\dot{q}^{12}$	$\dot{q}^{13}$	$\dot{q}^{14}$		4.2168	1.6866	2.0078	0.4015
	$\dot{q}^{21}$	$\dot{q}^{22}$	$\dot{q}^{23}$	$\dot{q}^{24}$		2.5302	3.0121	1.2048	0.2409
	$\dot{q}^{31}$	$\dot{q}^{32}$	$\dot{q}^{33}$	$\dot{q}^{34}$		3.0121	1.2048	3.8152	0.7630
	$\dot{q}^{41}$	$\dot{q}^{42}$	$\dot{q}^{43}$	$\dot{q}^{44}$		2.4096	0.9637	3.0519	2.6103
J K グループ	$\dot{q}^{55}$	$\dot{q}^{56}$	$\dot{q}^{57}$	$\dot{q}^{88}$	$\dot{q}^{89}$	$\dot{q}^{810}$	3.012	1.205	1.687
	$\dot{q}^{65}$	$\dot{q}^{66}$	$\dot{q}^{67}$	$\dot{q}^{98}$	$\dot{q}^{99}$	$\dot{q}^{910}$	0.723	2.289	1.205
	$\dot{q}^{75}$	$\dot{q}^{76}$	$\dot{q}^{77}$	$\dot{q}^{108}$	$\dot{q}^{109}$	$\dot{q}^{1010}$	1.807	0.723	3.012

手順 1

I グループからの Output Flow

$$P_{i5}=\begin{bmatrix}\dot{q}^{i2}\\ \dot{q}^{i4}\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}p_{25}\\ p_{45}\end{bmatrix}$$

$$P_{15}=\dot{q}^{12}p_{25}+\dot{q}^{14}p_{45}=1.6866\times 0.1+0.4015\times 0.05=0.1887$$

$$P_{25}=\dot{q}^{22}p_{25}+\dot{q}^{24}p_{45}=3.0121\times 0.1+0.2409\times 0.05=0.3012$$

$$P_{35}=\dot{q}^{32}p_{25}+\dot{q}^{34}p_{45}=1.2048\times 0.1+0.7630\times 0.05=0.1587$$

$$P_{45}=\dot{q}^{42}p_{25}+\dot{q}^{44}p_{45}=0.9637\times 0.1+2.6103\times 0.05=0.1305$$

J グループからの Output Flow

$$\begin{bmatrix}P_{j,}\\ P_{j,}\end{bmatrix}^*=\dot{q}^{j6}[p_{62}\ \ p_{68}]$$

$$P_{52}=\dot{q}^{56}p_{62}=1.205\times 0.1=0.1205$$

$$P_{58}=\dot{q}^{56}p_{68}=1.205\times 0.1=0.1205$$

$$P_{62}=\dot{q}^{66}p_{62}=2.289\times 0.1=0.2289$$

$$P_{68}=\dot{q}^{66}p_{68}=2.289\times 0.1=0.2289$$

$$P_{72}=\dot{q}^{76}p_{62}=0.723\times 0.1=0.0723$$

$$P_{78}=\dot{q}^{76}p_{68}=0.723\times 0.1=0.0723$$

K グループからの Output Flow

$$P_{k1}=\dot{q}^{k9}p_{91}$$

$$P_{81}=\dot{q}^{89}p_{91}=1.205\times 0.2=0.2410$$

$$P_{91}=\dot{q}^{99}p_{91}=2.289\times 0.2=0.4578$$

$$P_{10,1}=\dot{q}^{10,1}p_{91}=0.723\times 0.2=0.1446$$

手順 2

	1	2	5	8
1			P_{15}	0
2			P_{25}	0
5	0	P_{52}		P_{58}
8	P_{71}	0	0	

	1	2	5	8
1			.1887	
2			.3012	
5	0	.1205		.1205
8	.2508	0	0	

グループ間選移行列(第2表に対応するもの)は以上のようになる.

この補行列を逆転した結果(第3表に対応するもの)は以下のようになる.

	1	2	5	8
1	Q_{11}	Q_{12}	Q_{15}	Q_{18}
2	Q_{21}	Q_{22}	Q_{25}	Q_{28}
5	Q_{51}	Q_{52}	Q_{55}	Q_{58}
8	Q_{81}	Q_{83}	Q_{85}	Q_{88}

	1	2	5	8
	1.0055	.0228	.1969	.0228
	.0088	1.0365	.3143	.0365
	.0302	.1256	1.0436	.1256
	.2421	.0055	.0474	1.0055

手順 3

ここでは紙面の都合で $q^{3\mu}(\mu=1\sim10)q^{7\mu}(\mu=1\sim10)$ のみを求めてみる. $q^{3\mu}$ を求めるにはまず(2・5)より

$$\boldsymbol{Q_{II}}=[Q_{51}Q_{52}]=[.0302 \quad .1256]$$

$$\boldsymbol{Q_{IJ}}=[Q_{55}] \quad =1.0436$$

$$\boldsymbol{Q_{IK}}=[Q_{58}] \quad = .1256$$

(2・4)より

$$P_{35}\boldsymbol{Q_{II}}=[P_{35}Q_{51}P_{35}Q_{52}]=[.1586\times.0302 \quad .1586\times.1256]=[.0048 \quad .0199]$$

$$P_{35}\boldsymbol{Q_{IJ}}=P_{35}Q_{55} \quad =.1586\times1.0436 \quad =.1675$$

$$P_{35}\boldsymbol{Q_{IK}}=P_{35}Q_{58} \quad =.1586\times \ .1256 \quad =.0199$$

$$q^{31}=\dot{q}^{31}+).0048\dot{q}^{11}+.0199\dot{q}^{21})=3.0121+.0716=3.0837$$

$$q^{32}=\dot{q}^{32}+(.0048\dot{q}^{12}+.0199\dot{q}^{22})=1.2048+.0685=1.2733$$

$$q^{33}=\dot{q}^{33}+(.0048\dot{q}^{13}+.0199\dot{q}^{23})=3.8152+.0341=3.8493$$

$$q^{34}=\dot{q}^{34}+(.0048\dot{q}^{24}+.0199\dot{q}^{24})= .7630+.0068= .7698$$

$$q^{35}=.1675\dot{q}^{55}=$$

$$q^{36}=.1675\dot{q}^{56}=.1996$$

$$q^{37}=.1675\dot{q}^{57}=$$

$$q^{38}=.0199\dot{q}^{88}=$$

$$q^{39}=.0199\dot{q}^{89}=.0240$$

$$q^{310}=.0199\dot{q}^{310}=$$

$q^{7\mu}$ を求めるにはまず(2・5)(2・4)より

$$\boldsymbol{Q_{JI}}=\begin{bmatrix}Q_{21} & Q_{22}\\ Q_{31} & Q_{82}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.0088 & 1.0365\\ .2421 & .0055\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_{JJ}}=\begin{bmatrix}Q_{25}\\ Q_{85}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.3143\\ .0474\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_{JK}}=\begin{bmatrix}Q_{28}\\ Q_{88}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.0365\\ 1.0055\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{72} \\ P_{78} \end{bmatrix}^* Q_{JI} = \begin{bmatrix} P_{72}Q_{21} + P_{78}Q_{81} \\ P_{72}Q_{22} + P_{78}Q_{82} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} .0181 \\ .0753 \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} P_{72} \\ P_{78} \end{bmatrix}^* Q_{JJ} = P_{72}Q_{25} + P_{78}Q_{85} = .0262$$

$$\begin{bmatrix} P_{72} \\ P_{78} \end{bmatrix}^* Q_{JK} = P_{72}Q_{28} + P_{78}Q_{88} = .0753$$

$$q^{71} = .0181\dot{q}^{11} + .0753\dot{q}^{21} = .2668$$

$$q_{72} = .0181\dot{q}^{12} + .0753\dot{q}^{22} = .2573$$

$$q^{73} = .0181\dot{q}^{13} + .0753\dot{q}^{23} = .1270$$

$$q^{74} = .0181\dot{q}^{14} + .0753\dot{q}^{24} = .0254$$

$$q^{75} = \dot{q}^{75} + .0262\dot{q}^{55} = 1.807 + .0789 = 1.886$$

$$q^{76} = \dot{q}^{76} + .0262\dot{q}^{56} = .723 + .0316 = .755$$

$$q^{77} = \dot{q}^{77} + .0262\dot{q}^{57} = 3.012 + .0442 = 3.056$$

$$q^{78} = .0753\dot{q}^{88} = .2268$$

$$q^{79} = .0753\dot{q}^{89} = .0907$$

$$q^{710} = .0753\dot{q}^{810} = .1270$$

§4. モンテカルロ実験による行列の逆転の一般論

§2でのべた手順および公式(2･1)～(2･5)がどのようにして導出されたかを示す手始めとして，ここではモンテカルロ実験による行列の逆転([I]，[II]，[III])の理論とそれに附随する基礎公式を要約してのべる．

ある行列 P の各エレメント $p_{\mu\nu}$ が $p_{\mu\nu}\geqq 0$, $\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}\leqq 1$ なる条件を充しているとき，P は確率要請を充すということにする．(経済分析にあらわれる産業連関表を投入係数であらわしたものは確率要請を充す行列である．産業連関分析はこの行列の補行列を逆転することである．)

与えられた行列 Q の補行列 P が確率要請を充す場合，P を §1ようにネットワーク表現したとき，$p_{\mu\nu}$ を node μ から ν への選移確率ということにする．また $1-\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}$ を node μ でとまる確率とする．

ある粒子がある node μ から出発して上の選移確率にしたがって各 node μ 上をつぎつぎと移行しとまるまでの一連の運動を node μ から出発する一回のランダムウォークと名づける．

$v_{\mu\nu}$ を node μ から出発する粒子がそのランダムウォークをおえるまでの間に node ν を通る回数とする($v_{\mu\mu}$ は出発の際の μ もふくめる)とつぎの式が成立つ〔II〕．

(4･1) $\quad E(v_{\mu\nu}) = q^{\mu\nu}$

また $f_{\mu\nu}$ を node μ から出発する粒子がいつか node ν に到着する確率とすると

$$(4\cdot 2)\quad \left.\begin{array}{l} p_r\{v_{\mu\nu}=x\}=f_{\mu\nu}f_{\mu\nu}{}^{x-1}(1-f_{\nu\nu}) \\ p_r\{v_{\mu\nu}=0\}1-f_{\mu\nu} \end{array}\right\} \text{for} \quad \mu\neq\nu$$

$$p_r\{v_{\mu\mu}-1=x\}=f_{\mu\mu}{}^{x}(1-f_{\mu\mu})$$

$$(4\cdot 3)\quad f_{\mu\nu}=\frac{q^{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}}{q^{\mu\nu}} \quad (\delta_{\mu\nu}.\text{はクロネッカーのデルタ})$$

が成立つ〔III〕.

この§以下，モンテカルロ実験に関係ある§では P が確率要請を充すという仮定を入れているが，§2でのべた手順や公式は §7で証明されるようにこの仮定がなくても成立する.

§5. 二段モンテカルロ実験による行列のグループ別逆転

ここでは第1表の例について二段モンテカルロ実験による行列のグループ別逆転の手順を示す.

第一段階 各グループ内の実験

I グループ内:

node $i(\varepsilon I)$から出発したランダムウォークをする粒子がそれをおえるまでに node $i'(\varepsilon I)$を通過した回数を $v_{ii'}$ とする. 粒子が他のグループへ出た場合は，そこでランダムウォークが終ったとみなす.

このランダムウォークを多数回繰返えすと $v_{ii'}$ の平均が $\dot{q}^{ii'}$ の推定値となる.

またこの際 node i から出発した粒子が，全体のランダムウォークのうち何回他のグループの Input node(ここでは node 5)でとまったかという相対頻度から $\dot{P}_{i5}$ が推定できる.

P_{i5} は node i から出発した粒子が他のグループを通ることなく node 5 へ至る確率であり，§2で Output Flow となづけたものである.

こうして

$$(5\cdot 1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \dot{q}^{11} & \dot{q}^{12} & \dot{q}^{13} & \dot{q}^{14} & P_{15} \\ \dot{q}^{21} & \dot{q}^{22} & \dot{q}^{23} & \dot{q}^{24} & P_{25} \\ \dot{q}^{31} & \dot{q}^{32} & \dot{q}^{33} & \dot{q}^{34} & P_{35} \\ \dot{q}^{41} & \dot{q}^{42} & \dot{q}^{43} & \dot{q}^{44} & P_{45} \end{array}\right.$$

の各推定値がえられる.

I グループ内:

この場合も I グループと同様な操作で $\dot{q}^{jj'}$, P_{j2}, P_{j8} が推定できる. これらをならべてかくと

$$(5\cdot 2)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \dot{q}^{55} & \dot{q}^{56} & \dot{q}^{57} & P_{52} & P_{58} \\ \dot{q}^{65} & \dot{q}^{66} & \dot{q}^{67} & P_{62} & P^{68} \\ \dot{q}^{75} & \dot{q}^{76} & \dot{q}^{77} & P_{72} & P_{78} \end{array}\right.$$

K グループ内:

以上と同様に

$$(5\cdot3)\quad\left\{\begin{array}{llll} \dot{q}^{88} & \dot{q}^{89} & \dot{q}^{8,10} & P_{81} \\ \dot{q}^{98} & \dot{q}^{99} & \dot{q}^{9,10} & P_{91} \\ \dot{q}^{10,3} & \dot{q}^{10,9} & \dot{q}^{10,10} & P_{10,1} \end{array}\right.$$

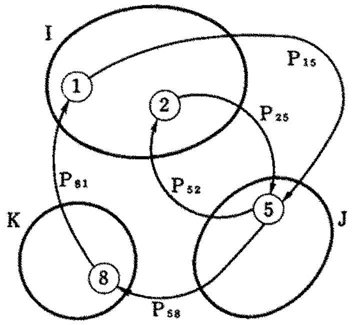
を推定する.

第二段階　グループ間の実験

第一段階で推定した $P_{\mu\nu}$ から Input node のみに関するものをとりだして第4表のようなグループ間選移確率行列をくむ.

	1	2	5	8
1			P_{15}	0
2			P_{25}	0
5	0	P_{52}		P_{58}
8	P_{81}	0	0	

第 4 表　グループ間選移確率



第 3 図　グループ間ネットワーク

この表で P_{15} は node 1 から出発し I 以外のグループを通らないで node 5 へ到る確率, P_{52} は node 5 から出発し J 以外のグループを通らないで node 2 へ到る確率である. またこの表のブランクの箇所は 0 である. すなわち同一グループで内の Input node 間の選移確率は 0 とする.

$1-\sum_j P_{ij}$ は node i から出発し i の属するグループ内でランダムウォークが終る確率.

第二段階では第3図に示すような選移確率をもつ node 間のランダムウォークを実行すればよい.

I グループ内からの $q^{i\mu}(\mu=1\sim10)$ を求める手順:

たとえば $q^{3\mu}$ を求めるには,

node 3 からランダムウォークをはじめ, まず確率 P_{35} で node 5 へいく(確率 $1-P_{35}$ で I グ

通過した node					V_{51}	V_{52}	V_{55}	V_{58}
3	0				0	0	0	0
3	5	0			0	0	1	0
3	5	2	0		0	1	1	0
3	5	8	0		0	0	1	1
3	5	2	5	0	0	1	2	0
3	5	8	1	0	1	0	1	1
					⋮			
					$\bar{V}_{51}$	$\bar{V}_{52}$	$\bar{V}_{55}$	$\bar{V}_{58}$

第 5 表　グループ間モンテカルロ実験の一例

ループ内でとまる)．node 5 へいったら以下は第4表の確率にしたがってグループ間ランダムウォークをつづける．そしてランダムウォークがおわるまでに第3図の各 node を通過する回数 V_{51}, V_{52}, V_{55}, V_{58} を求める．これを多数回繰返し V_{ij} の平均 $\bar{V}_{ij}$ を求める．第5表に例を示す．ここで0とあるのはランダムウォークがとまったことを示す．

この実験でえられた V_{5i} と第一段階でえられた $\dot{q}^{i\mu}$ を用い，

(5•4)　$q^{3i}=\dot{q}^{3i}+\bar{V}_{51}\dot{q}^{1i}+\bar{V}_{52}\dot{q}^{2i}$　$i\varepsilon I$

(5•5)　$q^{3j}=\bar{V}_{55}\dot{q}^{5j}$　$j\varepsilon J$

(5•6)　$q^{3k}=\bar{V}_{58}\dot{q}^{8k}$　$k\varepsilon K$

によって $q^{3\mu}(\mu=1\sim n)$ を求めることができる．

§6. 二段モンテカルロ実験による推定の期待値

ここでは §5 でのべた推定公式(5•4)，(5•5)，(5•6)の期待値をとることによって，§2 の諸公式を導出する．

たとえば(5•4)の期待値をとると，

$$E(q_{3i})=\dot{q}^{3i}+E(\bar{V}_{51})\dot{q}^{1i}+E(\bar{V}_{52})\dot{q}^{2i}$$

$E(\bar{V}_{51})=E(V_{51})$ を求めるには，つぎのようにする．まずグループ間モンテカルロ実験において node μ から出発した粒子がいつか node ν へ到る確率を $F_{\mu\nu}$ とすれば(4•2)より

$$p^r\left\{V_{51}=x\right\}=P_{35}F_{51}F_{11}^{x-1}(1-F_{11})$$

$$\therefore\quad E(V_{51})=P_{35}F_{51}(1-F_{11})\sum_{x=1}^{\infty}xF_{11}^{x-1}=P_{35}F_{51}/(1-F_{11})$$

同様にして

$$E(\bar{V}_{52})=E(V_{52})=P_{35}F_{52}/(1-F_{22})$$

$$\therefore\quad (6\text{•}1)\quad E(\dot{q}^{3i})=\dot{q}^{3i}+\frac{P_{35}F_{51}}{(1-F_{11})}\dot{q}^{1i}+\frac{P_{35}F_{52}}{(1-F_{22})}\dot{q}^{2i}$$

さらに，$Q_{\mu\nu}$ を第4表の補行列を逆行列とすれば，(4•3)より

$$F_{51}/1-F_{11}=Q_{51},\quad F_{52}/1-F_{22}=Q_{52}$$

となり，

$$(6\text{•}2)\qquad E(\dot{q}^{3i})=\dot{q}^{3i}+P_{35}(Q_{51}\dot{q}^{1i}+Q_{52}\dot{q}^{2i})$$

をうる．

(6•2)の右辺第2項は $\dot{q}^{3i}$ を q^{3i} へ補正する補正項であるが，この項の意味を考えてみよう．P_{35} の後部の suffix 5 は I グループからの Input node の番号であり，Q_{51}, Q_{52} の各々の後部の suffix 1, 2 は，I グループの Input node の番号である．したがって(6•2)の補正項を §2 のような一般の問題に拡張すると，$q^{ii'}$ に対する補正項は I グループの Flow out$[P_{iJ1},\ P_{iK2}]$ と I グループからの Input J_1, K_1 と I グループの Input I_1, I_2, I_3 の関連を示すマトリックス

$\begin{bmatrix} Q_{J_1I_1} & Q_{J_1I_2} & Q_{J_1I_3} \\ Q_{K_1I_1} & Q_{K_1I_2} & Q_{K_1I_3} \end{bmatrix}$ とをかけ，それに $[\dot{q}^{I_1i'} \quad \dot{q}^{I_2i'} \quad \dot{q}^{I_3i'}]$ をかければよいことがわかる.

$q^{ij'}$, $q^{ik'}$ についても同様である. 以上から公式(2•4)，(2•5)がえられる.

§7. 行列のグループ別逆転の公式(§2)の証明

§2 でのべた諸公式は，§4, 5, 6 によって導出されているが，§4, 5, 6 では行列 P が確率要請を充すという仮定があり導出法自身が Heuristic なものである. この仮定をのぞいても §2 の手順は使えることを示すために(2•4)で与えた公式がたしかに Q の逆行列になっていることをここで証明する.

(2•4)で求まる $q^{i\mu}$ が $Q=(q_{\mu\nu})$ の逆行列のエレメントであるためには

$$\sum_\mu q^{i\mu} q_{\mu\nu} = \delta_{i\nu} \tag{7•1}$$

を示せばよい.

$$\sum_\mu q^{i\mu} q_{\mu\nu} = \underbrace{\sum_{i'} q^{ii'} q_{i'\nu}}_{①} + \underbrace{\sum_{j'} q^{ij'} q_{j'\nu}}_{②} + \underbrace{\sum_{k'} {}^{ik'} q_{k'\nu}}_{③} \tag{7•2}$$

$$①=\sum_{i'} \dot{q}^{ii'} q_{i'\nu} + \begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{II} \begin{bmatrix} \sum_i{}' \ \dot{q}^{I_1i'} \ q_{i'\nu} \\ \sum_{i'} \ \dot{q}^{I_2i'} \ q_{i'\nu} \\ \sum_i{}' \ \dot{q}^{I_3i'} \ q_{i'\nu} \end{bmatrix}$$

$$②=\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{IJ} \begin{bmatrix} \sum_{j'} \ \dot{q}^{J_1j'} \ q_{j'\nu} \\ \sum_{j'} \ \dot{q}^{J_2j'} \ q_{j'\nu} \end{bmatrix}$$

$$③=\begin{bmatrix} P_{ij_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{IK} \begin{bmatrix} \sum_{k'} \ \dot{q}^{K_1k'} \ q_{k'\nu} \\ \sum_{k'} \ \dot{q}^{K_2h'} \ q_{k'\nu} \end{bmatrix}$$

ν がどの Input node にも一致していないときは，①の右辺第一項以外はすべて 0 となるから (7•1)は成立する. 問題は ν が Input node のどれかに一致しているときである. はじめに $\nu=I_1$ の場合を考える. このとき，

$$①=\delta_{iI_1}+\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{II} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{iI_1} + \begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q_{J_1I} \\ Q_{K_1I_1} \end{bmatrix}$$

$$②=\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{IJ} \begin{bmatrix} \dot{q}^{J_1j_1} \ q_{j_1I_1} \\ \dot{q}^{J_2j_2} \ q_{j_2I_1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* Q_{IJ} \begin{bmatrix} p_{J_1I_1} \\ p_{J_2I_1} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q_{J_1I_1} - (Q_{J_1K_1} \ p_{K_1I_1} + Q_{J_1K_2} \ p_{K_2I_1}) \\ Q_{K_1I_1} - (Q_{K_1K_1} \ p_{K_1I} + Q_{K_1K_2} \ p_{K_2I_1}) \end{bmatrix}$$

同様に

$$③=-\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q_{J_1K_1} \ p_{K_1I_1} + Q_{J_1K_2} \ p_{K_2I_1} \\ Q_{K_1K_1} \ p_{K_1I_1} + Q_{K_1K_2} \ p_{K_2I_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad ②+③=-\begin{bmatrix} P_{iJ_1} \\ P_{iK_1} \end{bmatrix}^{*} \begin{bmatrix} Q_{J_1I_1} \\ Q_{K_1I_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad ①+②+③=\delta_{iI_1} \qquad q.\ e.\ d.$$

$\nu=I_2$, I_3 の場合も同様にして証明できる．また $\nu=J_1$, J_2. K_1, K_2 の場合にも同じようにして証明できる．

また $q^{j\mu}$, $q^{k\mu}$ の場合も以上と同様に証明できる．

参 考 文 献

[I] Forsy the & Leibler; "Matrix Inversion by a Monte Carlo Method" MTAC Vol 1 (1950) p. 127～129

[II] Wasow; "A note on the Inversion of Matrices by Random Walks," MTAC Vol 3 (1952) p. 78～81.

[III] Edmun dson; "Monte Carlo Matrix Inversion and Recurrent Events" MTAC Vol 4 (1953) p 18～21.

■国際経営科学協会（TIMS）総会開催について

1961 年 8 月 23～25 日，ベルギー国ブラッセル市において開催される予定．詳細は不明．昨年，早稲田大学生産研究所が The Institute of Management Science 日本支部となったので同所に問合せられたい．

■外人専門家の来日予定について

1) 本年 6 月．日本生産性本部の招きにより来日する予定の Prof. W. Churchman (UCLA) は夏以降に延期の予定 "Introduction to OR" の著者である．

2) 8 月．防衛庁の招きにより Prof. P. F. Morse (MIT) が来日する予定 "Methods of OR" の著者．

3) Dr. R, Bellman が来日の希望があり日本科学技術連盟で進めている．Dynamic Programming の始祖

4) Prof. W. Weibull も来日の希望がある．Reliability のWeibull 分布で有名．

《海外交換雑誌》

Transactions of the Royal Society of Canada Section III Chemical, Mathematical & Physical Sciences. 3rd. series-vol. LIV, June, 1960.